Travaux dirigés sur les espaces homogènes et quelques décompositions des groupes de Lie classiques

Exercice 1. *(Structure de variété de G/H)*

Soit G un groupe de Lie de dimension finie et H un sous-groupe fermé de G. On va montrer que l'espace quotient G/H peut-être naturellement muni d'une structure de variété de dimension $\dim G - \dim H$. On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de G et H respectivement. Soit $\mathfrak{m}$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} & \longrightarrow & G \\ & (X, Y) & \longmapsto & \exp_G(X) \exp_G(Y) \end{array}$$

On rappelle que Ψ est un difféomorphisme local et qu'il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de $e_G \in G$ tel que :

$$\Psi^{-1}(\mathscr{U} \cap H) = \Psi^{-1}(\mathscr{U}) \cap \mathfrak{h}.$$

Soit $\mathscr{V}_{\mathfrak{m}}$ un voisinage de 0 dans $\mathfrak{m}$ tel que

$$\exp_G(\mathscr{V}_{\mathfrak{m}}) \cdot \exp_G(-\mathscr{V}_{\mathfrak{m}}) \subset \mathscr{U},$$

et $\mathscr{V}_{\mathfrak{h}}$ un voisinage de 0 dans $\mathfrak{h}$ tel que $\mathscr{V}_{\mathfrak{h}} \times \mathscr{V}_{\mathfrak{m}} \subset \Psi^{-1}(\mathscr{U})$.

1. Montrer que dans le voisinage $\Psi(\mathscr{V}_{\mathfrak{h}} \times \mathscr{V}_{\mathfrak{m}})$ de e_G, toute classe modulo H rencontre $\exp_G(\mathscr{V}_{\mathfrak{m}})$ en un et un seul point.
2. On munit G/H de la topologie quotient et on note $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Soit $\mathscr{V}'_{\mathfrak{m}}$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{m}$ dont l'adhérence est compacte et contenue dans $\mathscr{V}_{\mathfrak{m}}$. Montrer que l'application $\pi \circ \exp_G$ est un homéomorphisme de $\overline{\mathscr{V}'_{\mathfrak{m}}}$ sur son image.
3. En déduire que
$$\begin{array}{rccl} \psi = \pi \circ \exp_G : & \mathscr{V}'_{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & \psi(\mathscr{V}'_{\mathfrak{m}}) \subset G/H \\ & X & \longmapsto & \exp_G(X) \cdot H \end{array}$$
est un homéomorphisme.
4. Montrer que, pour tout $g_0 \in G$, les applications
$$\begin{array}{rccl} L_{g_0} : & G/H & \to & G/H \\ & gH & \mapsto & g_0 gH \end{array}$$
sont des homéomorphismes.
5. Montrer que $\mathscr{A} = \{\left((\psi_g(\mathscr{V}'_{\mathfrak{m}}), \psi_g^{-1}\right), g \in G\}$ est un atlas $\mathscr{C}^\infty$ de G/H.

Exercice 2. *(Ensemble des matrices complexes de rang r)*

1. Montrer que $GL(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs.
2. On appelle projecteur toute matrice P de $M(n, \mathbb{C})$ telle que $P^2 = P$. Montrer qu'un projecteur de rang r est conjugué à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que l'ensemble des projecteurs de rang r est un ensemble connexe de $M(n, \mathbb{C})$.
4. Montrer que l'ensemble des matrices complexes de taille $n \times n$ et de rang r est un ensemble connexe de $M(n, \mathbb{C})$.

Exercice 3. *(Ensemble des matrices réelles de rang r)*

Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$ et de rang r, noté $\mathscr{M}_r$, forme une sous-variété connexe de $M(n, \mathbb{R})$. On désigne par $\operatorname{rg} M$ le rang d'une matrice M : $\operatorname{rg} M = \dim \operatorname{Im} M$.

1. (a) Montrer que
$$\mathscr{O}_p := \{M \in M(n,\mathbb{R}) \mid \text{rg } M \geq p\}$$
est un ouvert de $M(n,\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que l'intersection d'un ouvert et d'un fermé d'un espace topologique est localement compact.

   (c) En déduire que $\mathscr{M}_r = \mathscr{O}_r \cap (M(n,\mathbb{R}) \setminus \mathscr{O}_{r+1})$ est une sous-variété de $M(n,\mathbb{R})$.

   (d) En considérent le stabilisateur de la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où I_r est la matrice identité de taille $r \times r$, montrer que
$$\dim \mathscr{M}_r = r(2n-r).$$

2. (a) Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe topologique de G. On suppose que H et G/H sont connexes. En déduire que G est connexe. (On pourra montrer qu'une application continue $f\ : G \to \{0,1\}$ est constante).

   (b) Montrer que $GL^+(n,\mathbb{R}) := \{M \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det M > 0\}$ est localement compact, et est une réunion dénombrable de compacts.

   (c) On considère l'action naturelle de $GL^+(n,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Montrer que le stabilisateur de $\vec{e_1} = (1,0,\cdots,0)$ est un produit semi-direct de $\mathbb{R}^{n-1}$ avec $GL^+(n-1,\mathbb{R})$.

   (d) En déduire que $GL^+(n,\mathbb{R})/\big(GL^+(n-1,\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^{n-1}\big)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

   (e) Montrer par récurrence que $GL^+(n,\mathbb{R})$ est connexe.

   (f) En déduire que $\mathscr{M}_r$ est connexe.

Exercice 4. *(Décomposition de Cartan)*

1. En utilisant la décomposition polaire, montrer que toute matrice g de $GL(n,\mathbb{R})$ s'écrit comme produit $g = k_1\, a\, k_2$ où $k_1, k_2 \in O(n,\mathbb{R})$ et où a est une matrice diagonale à coefficients réels.
2. En considérant une matrice diagonale, montrer que cette décomposition n'est pas unique.
3. Montrer de même qu'une matrice h de $GL(n,\mathbb{C})$ s'écrit comme produit $h = k_1\, a\, k_2$ où $k_1, k_2 \in U(n)$ et où a est une matrice diagonale à coefficients complexes, mais que cette décomposition n'est pas unique.

Exercice 5. *(Décomposition d'Iwasawa)*

Le but de cet exercice est de montrer que $GL(n,\mathbb{R})$ est homéomorphe au produit $K \times A \times N$, où $K = O(n,\mathbb{R})$, A est le sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$ formé des matrices diagonales à coefficients réels strictement positifs, et où N est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1.

1. Soit $g \in GL(n,\mathbb{R})$. On note $e_1, \cdots, e_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la base $\{g(e_i), i = 1, \cdots, n\}$, montrer qu'il existe une matrice triangulaire T à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $gT \in O(n,\mathbb{R})$.
2. Montrer que toute matrice triangulaire T' à coefficients diagonaux strictement positifs s'écrit comme un produit $n\, a$, où $a \in A$ et $n \in N$.
3. En déduire que toute matrice g de $GL(n,\mathbb{R})$ s'écrit comme produit $g = k\, a\, n$ où $k \in O(n,\mathbb{R})$, $a \in A$, $n \in N$. Montrer que cette décomposition est unique.
4. Soit $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices dans $GL(n,\mathbb{R})$ qui converge (pour la topologie de $M(n,\mathbb{R})$) vers une matrice $g \in GL(n,\mathbb{R})$ qui s'écrit $g = k\, a\, n$, avec $k \in O(n,\mathbb{R})$, $a \in A$, $n \in N$. On note $g_i = k_i a_i n_i$ les décompositions d'Iwasawa des éléments de la suite. Montrer que la suite $\{k_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $O(n,\mathbb{R})$ admet comme unique valeur d'adhérence la matrice $k \in O(n,\mathbb{R})$.
5. En déduire que l'application :
$$\begin{array}{ccl} GL(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & K \times A \times N \\ g & \longmapsto & (k,a,n) \quad \text{tel que } g = k\, a\, n, \end{array}$$
est continue et réalise un homéomorphisme de $GL(n,\mathbb{R})$ sur le produit $K \times A \times N$.

6. Déterminer la décomposition d'Iwasawa de la matrice $g = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. *(Décomposition de Bruhat)*

Le but de cet exercice est de montrer que $GL(n,\mathbb{R}) = \cup_{w\in\mathfrak{S}_n} N\,w\,B$, où w décrit l'ensemble des matrices de permutations $\mathfrak{S}_n$, N est le groupe des matrices triangulaires supérieures avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1, et où B est le groupe des matrices triangulaires supérieures.

1. Soit $g \in GL(n,\mathbb{R})$. Montrer qu'effectuer les opérations élémentaires suivantes sur la matrice g revient à multiplier g à droite par une matrice triangulaire supérieure :
   — multiplier une colonne de g par un coefficient non nul
   — ajouter à une colonne de g un multiple d'une autre colonne située à sa gauche.
2. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure T telle que le produit $g\,T := u$ vérifie les conditions suivantes :
   — chaque colonne de u se termine par un 1 (i.e. $\forall j \in \{1,\cdots,n\}, \exists\, i_j \in \{1,\cdots,n\}$ tel que $u_{i_j\,j} = 1$ et $u_{k\,j} = 0$ pour tout $k > i_j$)
   — les coefficients à droite de chaque 1 sont nuls (i.e. $u_{i_j\,k} = 0$ pour tout $k > j$).
3. On rappelle qu'une matrice de permutation est une matrice dont chaque ligne et chaque colonne contient un unique coefficient non nul et égal à 1. Montrer qu'il existe une matrice de permutation w telle que le produit $u\,w^{-1} := n$ appartient à N.
4. En déduire que tout élément g de $GL(n,\mathbb{R})$ se factorise sous la forme $g = n\,w\,b$, où n appartient à l'ensemble N des matrices triangulaires supérieures avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1, w est une matrice de permutation, et b est une matrice triangulaire supérieure.
5. Montrer que la décomposition est unique à condition d'imposer que $n \in N \cap wN^T w^{-1}$, où N^T désigne l'ensemble des matrices triangulaires inférieures avec tous les éléments diagonaux égaux à 1.
6. Déterminer la décomposition de Bruhat de la matrice $g = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. *(Groupes de Lie classiques comme sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{C})$)*

1. Montrer que le groupe orthogonal
$$\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \mid M^T M = \mathrm{Id}\}$$
est une sous-variété réelle de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que le groupe spécial orthogonal
$$\mathrm{SO}(n) = \{M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \mid M^T M = \mathrm{Id}, \det M = 1\}$$
est une sous-variété réelle de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
3. Montrer que le groupe unitaire
$$\mathrm{U}(n) = \{M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \mid M^* M = \mathrm{Id}\}$$
est une sous-variété réelle de $\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$. Quelle est sa dimension ?
4. Montrer que le groupe spécial unitaire
$$\mathrm{SU}(n) = \{M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \mid M^* M = \mathrm{Id}, \det M = 1\}$$
est une sous-variété réelle de $\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$. Quelle est sa dimension ?

Liste des groupes de Lie classiques

On note $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels, et $\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients complexes. La transposée de la matrice $M = (m_{ij})$ sera notée $M^{\mathrm{T}} = (m_{ji})$, et la matrice conjuguée de M sera notée $\overline{M} = (\overline{m_{ij}})$. L'adjoint de M sera noté $M^* = \overline{M}^T$, et la matrice identité de taille $n \times n$ sera notée Id. La matrice $J \in \mathrm{M}(2n,\mathbb{R})$ est définie comme la matrice anti-diagonale par blocs $J = \begin{pmatrix} 0 & \text{-Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}$.

Groupe général linéaire complexe :

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) = \{M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \mid \det M \neq 0\}$$

Groupe général linéaire réel :

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \mid \det M \neq 0\}$$

Groupe spécial linéaire complexe :

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) = \{M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \mid \det M = 1\}$$

Groupe spécial linéaire réel :

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$$

Groupe orthogonal complexe :

$$\mathrm{O}(n,\mathbb{C}) = \{M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \mid M^T M = \mathrm{Id}\}$$

Groupe orthogonal :

$$\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \mid M^T M = \mathrm{Id}\}$$

Groupe spécial orthogonal :

$$\mathrm{SO}(n) = \{M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \mid M^T M = \mathrm{Id}, \det M = 1\}$$

Groupe unitaire :

$$\mathrm{U}(n) = \{M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \mid M^* M = \mathrm{Id}\}$$

Groupe spécial unitaire :

$$\mathrm{SU}(n) = \{M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \mid M^* M = \mathrm{Id}, \det M = 1\}$$

Groupe symplectique complexe :

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) = \{M \in \mathrm{M}(2n,\mathbb{C}) \mid M^T J M = J\}$$

Groupe symplectique réel :

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}(2n,\mathbb{R}) \mid M^T J M = J\}$$

Groupe orthogonal quaternionique :

$$\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \cap U(2n).$$

Travaux dirigés sur le Théorème de Nash-Moser

1 Enoncé du théorème et définitions

Théorème 1 (Théorème de Nash-Moser)**.** *Soit $P : \mathscr{U} \subset \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ une application* ***lisse et contrôlée (smooth and tame map)*** *entre deux espaces de* ***Fréchet*** *telle que*

1. *l'équation pour la dérivée $DP(f)(h) = k$ a une unique solution $h = L(f)k$ pour tout $f \in \mathscr{U}$ et $\forall k \in \mathscr{F}_2$*
2. *la famille d'inverse $L : \mathscr{U} \times \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_1$ est une application* ***lisse et contrôlée****.*

Alors P est localement inversible. De plus, chaque inverse local est lisse et contrôlé.

Corollaire 1. *Soit $\mathscr{F}$ un espace de Fréchet contrôlé et $P : \mathscr{U} \subset \mathscr{F} \to V$ une application lisse d'un ouvert de $\mathscr{F}$ dans un espace vectoriel de dimension finie V. Supposons que pour un f_0 donné, la dérivée $DP(f_0)$ est surjective. Alors, dans un voisinage de f_0, l'ensemble $\mathscr{N} = \{f \in \mathscr{U} : P(f) = P(f_0)\}$ est une sous-variété lisse et contrôlée de $\mathscr{F}$ dont l'espace tangent $T_f\mathscr{N}$ en f est le noyau de l'application linéaire $DP(f)$.*

Définition 1 (Espaces de Fréchet gradués)**.** Un **espace de Fréchet gradué** est un espace de Fréchet muni d'une collection de semi-normes $\{\|\cdot\|_n, n \in \mathbb{N}\}$ de plus en plus fortes qui définissent la topologie :

$$\|f\|_0 \leq \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \cdots$$

Exemple 1 (Prototype d'espace de Fréchet gradué)**.** L'espace $\Sigma(\mathscr{B})$ des suites d'éléments d'un espace de Banach $\mathscr{B}$ qui décroissent exponentiellement est un espace de Fréchet gradué.

$$\{f_k\} \in \Sigma(\mathscr{B}) \Leftrightarrow \|\{f_k\}\|_n := \sum_{k=0}^{\infty} e^{nk}\|f_k\|_{\mathscr{B}} < \infty, \quad \forall n \geq 0.$$

Définition 2 (Applications linéaires contrôlées = Tame linear maps)**.** Une application linéaire $L : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ entre deux espaces de Fréchet gradués possède une **estimée contrôlée de degré r et base b (tame estimate of degree r and base b)** si

$$\|Lf\|_n \leq C_n\|f\|_{n+r} \quad \forall f \in \mathscr{F}, \forall n \geq b$$

Une application linéaire $L : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est dite **contrôlée (tame)** si elle satisfait une estimée contrôlée pour un certain couple de paramètres r et b.

Exemple 2. $L : \Sigma(\mathscr{B}) \to \Sigma(\mathscr{B})$, $\{f_k\} \mapsto \{e^{rk} f_k\}$, satisfait

$$\|Lf\|_n \leq \|f\|_{n+r}$$

et est donc une application contrôlée de degré r et base 0.

Définition 3 (Espaces de Fréchet contrôlés = Tame Fréchet spaces)**.** Un espace de Fréchet gradué $\mathscr{F}$ est un **facteur direct contrôlé (tame direct summand)** d'un espace de Fréchet gradué $\mathscr{G}$ si

1. il existe $L : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ une application linéaire contrôlée
2. il existe $M : \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ une application linéaire contrôlée

telles que la composition $M \circ L : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ soit l'identité.

Une espace de Fréchet gradué est appelé **contrôlé (tame)** si c'est un facteur direct contrôlé d'un espace $\Sigma(\mathscr{B})$ des suites d'éléments d'un espace de Banach $\mathscr{B}$ à décroissance exponentielle.

Exemple 3. Le sous-espace de $\Sigma(\mathscr{B})$ constitué des suites $\{f_k\}$ s'annulant pour $k \geq N$ est un facteur direct contrôlé de $\Sigma(\mathscr{B})$ avec une injection L et une projection M de degré 0 et base 0.

Définition 4 (Applications contrôlées = Tame maps)**.** Une application non-linéaire $P\ : \mathscr{U} \subset \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ entre deux espaces de Fréchet gradués satisfait **une estimée contrôlée de degré** r **et base** b si

$$\|P(f)\|_n \leq C_n(1 + \|f\|_{n+r}) \quad \forall f \in \mathscr{U}, \quad \forall n \geq b$$

Une application non-linéaire $P\ : \mathscr{U} \subset \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est dite **contrôlée (tame)** si elle est continue sur l'ouvert $\mathscr{U}$ est satisfait une estimée contrôlée au voisinage de chaque point de $\mathscr{U}$.

Exemple 4. $P\ : \mathscr{C}^\infty([a,b],\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$, $f \mapsto e^f$ *est une application contrôlée.*

Définition 5 (catégorie contrôlée = Tame category)**.** Une application non-linéaire P est une **application lisse et contrôlée (smooth tame map)** si elle est lisse et toutes ses dérivées sont contrôlées (tame).

Proposition 1 (Propriétés des applications contrôlées)**.**

a) Une composition d'applications contrôlées est contrôlée.
b) Toute application continue d'un espace de Fréchet gradué dans un espace de Banach est contrôlée.
c) Toute application continue d'un espace de dimension fini dans un espace de Fréchet est contrôlée.

Proposition 2 (Construction de nouveaux espaces contrôlés)**.**

d) Un facteur direct contrôlé d'un espace contrôlé est contrôlé.
e) Un produit cartésien de deux espaces contrôlés est contrôlé.

Proposition 3 (Liste d'espaces contrôlés et de variétés contrôlées)**.**

f) Si X est une variété compacte, $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ est contrôlé.
g) Si X est une variété compacte à bord, $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ est contrôlée.
h) Si X est une variété compacte et V un fibré vectoriel au-dessus de X, alors l'espace $\mathscr{C}^\infty(X,V)$ des sections lisses de V est contrôlé.
i) Si X est une variété compacte et $\mathscr{F}$ est un fibré au-dessus de X, alors l'espace $\mathscr{C}^\infty(X,\mathscr{F})$ des sections lisses de $\mathscr{F}$ est une variété de Fréchet contrôlée.
j) Si X est une variété compacte et Y est une variété de dimension finie, l'espace des applications $\mathscr{M}(X,Y)$ de X vers Y est une variété de Fréchet contrôlée.
k) Si X est une variété compacte, le groupe des difféomorphismes de X est un groupe de Lie lisse et contrôlé.

2 Démonstration à trous....

L'exercice suivant consiste à démontrer la proposition 4 ci-dessous selon laquelle l'ensemble des courbes de longueur 1 *est une sous-variété lisse et contrôlée de l'ensemble des courbes de longueur quelconque. Cet exercice est basé sur l'article de A.B. Tumpach, S. C. Preston, Quotient Elastic Metrics on the manifold of arc-length parameterized plane curves, J. of Geometric Mechanics 9, n°2 (2017), 227–256. https://doi.org/10.3934/jgm.2017010 .*

2.1 Contexte

Soit I l'intervalle $[0,1]$. On considère l'espace de Banach $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}^2$ des courbes planes de classe $\mathscr{C}^k$ modulo translation, muni de la norme

$$\|\gamma\|_{\mathscr{C}^k} := \sum_{j=1}^{k} \max_{s\in I} |\gamma^{(j)}(s)|, \tag{1}$$

où, pour $z \in \mathbb{R}^2$, $|z|$ dénote la norme de z. Rappelons qu'une application $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ est une immersion si et seulement si $\gamma'(s) \neq 0$ pour tout $s \in I$. L'ensemble des immersions de classe $\mathscr{C}^k$ de $I = [0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$ modulo translation sera noté

$$\mathcal{C}^k(I) = \left\{\gamma \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}^2, \gamma'(s) \neq 0, \forall s \in I\right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{C}^k(I)$ est un **ouvert** de l'espace de Banach $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}^2$. Ainsi $\mathcal{C}^k(I)$ est une sous-variété de Banach de $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}^2$.

L'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}^2) = \cap_{k=0}^{\infty}\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^2)$ des courbes lisses $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ modulo translation muni de la famille de normes $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^k}$ est un espace de Fréchet gradué. L'espace des immersions lisses modulo translation

$$\mathcal{C}(I) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k(I) = \{\gamma \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}^2, \gamma'(s) \neq 0, \forall s \in I\}. \tag{2}$$

est un ouvert de $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}^2)$ pour la topolgie induite par la famille de normes $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^k}$, c'est donc une variété de Fréchet.

2.2 Proposition à démontrer

L'ensemble des courbes de longueur 1 est noté

$$\mathcal{C}_1(I) = \{\gamma \in \mathcal{C}(I) : \int_0^1 |\gamma'(s)|\, ds = 1\}. \tag{3}$$

Proposition 4. *Le sous-ensemble $\mathcal{C}_1(I)$ des immersions de longueur 1 modulo translation est une sous-variété lisse et contrôlée de la variété de Fréchet lisse et contrôlée $\mathcal{C}(I)$.*

Démonstration. En tant qu'.............. de $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}(I)$ est une variété avec une seule carte, donc une variété de Fréchet .... Montrons que $\mathcal{C}(I)$ est une variété contrôlée. Tout d'abord $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ est contrôlé car I est .... De plus, puisque le .... de deux espaces contrôlés est contrôlé, l'espace $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}^2)$ est un espace de Fréchet contrôlé. L' espace quotient $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}^2$ est .... à l'espace $\mathscr{C}_0^\infty(I,\mathbb{R}^2)$ des courbes partant de l'origine

$$\mathscr{C}_0^\infty(I,\mathbb{R}^2) = \left\{\gamma \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}^2), \gamma(0) = 0\right\},$$

qui est un facteur direct contrôlé de $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}^2)$ avec $L : \mathscr{C}_0^\infty(I,\mathbb{R}^2) \to \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}^2)$ donné par .... et $M : \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}^2) \to \mathscr{C}_0^\infty(I,\mathbb{R}^2)$ donné par .... Comme un facteur direct d'un espace de Fréchet contrôlé est ...., on en déduit que $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}^2$ est un espace de Fréchet contrôlé. Ainsi $\mathcal{C}(I)$ est modelé sur une espace de Fréchet contrôlé, possède une seule carte donc il n'y a qu'une seule fonction de transition qui est .... et qui est donc contrôlée. On en déduit que $\mathcal{C}(I)$ est une variété de Fréchet contrôlée.

Munissons $\mathcal{C}(I)$ de l'atlas complet compatible avec sa structure de variété lisse et contrôlée (on rajoute à la carte que nous avions toutes les cartes compatibles, c'est-à-dire telles que les changements de cartes soient lisses et contrôlées). En particulier, la carte suivante appartient à cet atlas : pour tout $\gamma \in \mathcal{C}$ on note

$$\gamma'(s) = e^{\sigma(s)}\big(\cos\theta(s), \sin\theta(s)\big) = e^{\sigma(s)+i\theta(s)}, \tag{4}$$

où $\sigma \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ et $\theta \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$. Nous obtenons un difféomorphisme de l'ouvert

$$\{(\sigma,\theta) \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}), \theta(0) \in]\theta_0 + 2\pi n, \theta_0 + 2\pi(n+1)[\}$$

de l'espace de Fréchet $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ dans l'ouvert de $\mathcal{C}(I)$ constitué des courbes telles que $\frac{\gamma'(0)}{|\gamma'(0)|} \neq e^{i\theta_0}$. Les fonctions de transitions sont données par l'identité sur la première coordonnée (puisque σ est déterminée de manière unique) et une translation sur la deuxième coordonnée, donc sont des applications contrôlées.

Dans les coordonnées (σ,θ), la condition de longueur 1 devient $L(\sigma) = 1$, avec

$$L(\sigma) = \int_0^1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, ds.$$

Ainsi $\mathcal{C}_1(I)$ est l'image inverse de 1 par une fonction $\mathscr{C}^\infty$. La dérivée de L par rapport aux coordonnées (σ,θ) est

$$DL_{(\sigma,\theta)}(\rho,\phi) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} L(\sigma + t\rho, \theta + t\phi) = \int_0^1 \rho(s) e^{\sigma(s)}\, ds;$$

Le noyau de cette application admet un supplémentaire en tout point $(\sigma, \theta) \in L^{-1}(\{1\})$ puisque l'on peut écrire

$$(\rho, \phi) = \Big(\rho - C, \phi\Big) + \Big(C, 0\Big), \qquad C = \int_0^1 \rho(x) e^{\sigma(x)}\, dx,$$

où $\Big(\rho - C, \phi\Big)$ appartient au .... (qui est fermé), et $\Big(C, 0\Big)$ appartient à un sous-espace de dimension .... de $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \times \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ (qui est aussi fermé). Puisque l'image de $(C, 0)$ par $DL_{(\sigma,\theta)}$ est C, la dérivée est aussi .... D'après le corollaire 1 du Théorème de Nash-Moser, $\mathcal{C}_1(I)$ est une sous-variété lisse et contrôlée de $\mathcal{C}(I)$.

□