STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES SUR LES VARIÉTÉS BANACHIQUES

ALICE BARBARA TUMPACH

Le lecteur trouvera dans ces notes les bases de la géométrie sur les variétés banachiques et l'étude des exemples les plus naturels. Pour plus de détails sur les notions abordées, nous renvoyons le lecteur à [Lan], [Car], [Bou], [Bou2] et [Bou3]. Les résultats décrits ici sont classiques, mais ne figurent pas toujours dans la littérature. En particulier, on trouvera en 1.5 exemple 2 et 3, une démonstration de l'équation (7.5.3) de [PS] utilisée pour définir l'injection de Plücker de la grassmanienne restreinte Gr_{res} dans l'espace projectif (proposition 7.5.2 de [PS]). Nous invitons le lecteur intéressé par l'injection de Plücker à consulter également [SpVa].

1. Géométrie différentielle dans le cadre banachique

1.1. Différentielle d'une application entre deux espaces de Banach.

Définition 1. Soient E et F deux espaces de Banach et U un ouvert de E. Une application $f\,: U \to F$ est différentiable en $x \in E$ s'il existe une application linéaire *continue* $A \in B(E,F)$ telle que $\forall h \in E$:

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{1}{\|h\|_E} \|f(x+h) - f(x) - Ah\|_F = 0$$

Une application $f\,: E \to F$ est différentiable sur $U \subset E$ si elle l'est en chaque point de U. On note $df(x)$ ou $d_x f$ l'application linéaire continue différentielle de f en x : $df(x) \in B(E,F)$.

Remarque 1. La condition de continuité de la différentielle exigée dans la définition implique qu'une fonction différentiable en un point est continue en ce point.

Définition 2. Une application $f\,: E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \subset E$ ssi $df\,: U \to B(E,F)$, où $B(E,F)$ est muni de la topologie associée à la norme d'opérateur, est continue.

Remarque 2. On ne demande pas seulement que l'application $df\,: U \times E \to F$ soit continue.

Définition 3. Une application $f\,: E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U \subset E$ ssi $df\,: U \to B(E,F)$ est $\mathcal{C}^1$ sur U. On note $d^2 f$ la différentielle d'ordre 2. On a :

$$\begin{array}{rccl} d^2 f \;: & U & \longrightarrow & B(E, B(E,F)) \\ & x & \longmapsto & \{h_1 \mapsto (h_2 \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(df(x+\varepsilon h_2)(h_1) - df(x)(h_1)))\} \end{array}$$

Remarque 3. Il existe une isométrie naturelle entre l'espace de Banach $B(E, B(E,F))$ et l'espace de Banach $B^{(2)}(E,F)$ des applications bilinéaires continues de E dans F. Plus généralement, l'espace de Banach $B^{(k)}(E,F)$ des applications k-linéaires continues de E dans F est identifié isométriquement à l'espace $B(E, B^{k-1}(E,F))$.

Définition 4. Une application $f\ : E \rightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $U \subset E$ ssi $d^k f\ : U \rightarrow B^{(k)}(E,F)$ est $\mathcal{C}^1$ sur U. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ssi elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exemple 1. Soit H un espace de Hilbert et $f\ : H \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à $x \in H$ associe $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. On a :

$$\begin{array}{rccl} df\ : & H & \longrightarrow & B(H,\mathbb{R}) \\ & x & \longmapsto & \{h_1 \mapsto 2\Re\langle h_1, x\rangle\} \end{array}$$

L'application df est continue car $|||df(x_1) - df(x_2)||| \leq 2\|x_1 - x_2\|$. De plus :

$$\begin{array}{rccl} d^2f\ : & H & \longrightarrow & B(H,B(H,\mathbb{R})) \\ & x & \longmapsto & \{h_1 \mapsto (h_2 \mapsto 2\Re\langle h_1, h_2\rangle)\} \end{array}$$

L'application d^2f est une application bilinéaire symétrique constante sur H. Les dérivées d'ordre $k > 2$ de f sont donc nulles.

Définition 5. Soient E un espace de Banach et γ une application $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans E. La différentielle de γ en un point $t \in \mathbb{R}$ est une application linéaire continue de $\mathbb{R}$ dans E . On appelle dérivée de γ en t et on note: $\gamma'(t)$ l'élément $d_t\gamma(1) \in E$. On a : $d_t\gamma\ : u \mapsto u.\gamma'(t)$.

Proposition 1. *Soient E, F, G trois espaces de Banach, $f\ : E \rightarrow F$ et $g\ : F \rightarrow G$ deux applications différentiables respectivement sur $U \subset E$ et $V \subset F$ contenant $f(U)$. Alors la composée $h = g \circ f$ est différentiable sur U et : $dh(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$.*

1.2. **Variétés banachiques.**

Définition 6. Soit M un ensemble. On appelle carte de M un triplet $(\mathcal{U}, \varphi, E)$ où $\mathcal{U}$ est une partie de M, E un espace de Banach, et φ une bijection de $\mathcal{U}$ sur un ouvert de E. On dit que deux cartes $(\mathcal{U}_1, \varphi_1, E_1)$ et $(\mathcal{U}_2, \varphi_2, E_2)$ sont $\mathcal{C}^r$-compatibles si :
- $\varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ (resp. $\varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$) est un ouvert de E_1 (resp. E_2)
- l'application $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ (resp. $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$) de $\varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ dans $\varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ (resp. $\varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ dans $\varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$) est de classe $\mathcal{C}^r$.
On appelle $\mathcal{C}^r-$ atlas de M un ensemble de cartes deux à deux $\mathcal{C}^r-$ compatibles et dont les domaines recouvrent M. Deux atlas sont dits $\mathcal{C}^r$-équivalents si leur réunion est encore un atlas $\mathcal{C}^r$. Une variété banachique de classe $\mathcal{C}^r$ est un ensemble M muni d'une classe d'équivalence d'atlas de classe $\mathcal{C}^r$.

Remarque 4. On ne demande pas que les espaces de Banach de deux cartes distinctes soient les mêmes. Lorsque tous les espaces de Banach intervenant dans la définition sont des espaces de Hilbert, on parlera de variété hilbertienne. Plus généralement, pour toute famille $\mathcal{F}$ d'espaces de Banach, on parlera de variété banachique de type $\mathcal{F}$ lorsque tous les espaces de Banach intervenants dans la définition appartiennent à $\mathcal{F}$.

Exemple 1. *La sphère unité d'un espace de Hilbert*

Soit H un espace de Hilbert réel séparable et $\mathbb{S}(H) = \{x \in H, \|x\| = 1\}$ l'ensemble des éléments de norme 1 de H. $\mathbb{S}(H)$ est une variété hilbertienne $\mathcal{C}^\infty$. En effet, munissons $\mathbb{S}(H)$ de la topologie induite par H : un ensemble O de $\mathbb{S}(H)$ est ouvert s'il existe un ouvert O' de H tel que $O = O' \cap \mathbb{S}(H)$. Soit $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H permettant d'identifier H avec $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Les projections stéréographiques p_1 et p_2 respectivement de pôle nord $N = e_0$ et de pôle sud $S = -e_0$ définissent les applications cartes de $\mathbb{S}(H)$. De manière explicite :

$$\begin{array}{rccl} p_1\ : & \mathbb{S}(H) \setminus \{N\} & \longrightarrow & e_0^\perp \\ & x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} & \longmapsto & p_1(x) = \frac{1}{1-x_0}(x_i)_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} p_2 : & \mathbb{S}(H) \setminus \{S\} & \longrightarrow & e_0^{\perp} \\ & x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} & \longmapsto & p_2(x) = \frac{1}{1+x_0}(x_i)_{i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \end{array}$$

Les applications p_1 et p_2 sont des homéomorphismes et l'application de changement de cartes $p_2 \circ p_1^{-1}$ définie de $e_0^{\perp} \setminus \{0\}$ dans lui-même est donnée par : $y \mapsto \frac{y}{\|y\|^2}$ et est C^{∞}.

Remarque 5. En général la boule unité d'un espace de Banach n'est pas une variété, même en dimension finie (penser à $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ ou $(\mathbb{R}^2, \|.\|_{\infty})$). La différentiabilité de la norme est étroitement liée aux propriétés de séparabilité, d'uniforme convexité et de réflexivité de l'espace de Banach considéré. (voir par exemple B. Beauzamy ([Beau]) et J. Diestel ([Die]).

Exemple 2. *L'espace projectif complexe*

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable et $\mathbb{P}(H)$ l'ensemble des droites vectorielles complexes de H, défini comme espace quotient de $H \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $\sim$ qui identifie x et y de H dès lors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x = \lambda.y$. On notera $p \ : H \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(H)$ l'application quotient. On munit $\mathbb{P}(H)$ de la topologie quotient : un ensemble $O \subset \mathbb{P}(H)$ sera dit ouvert si $p^{-1}(O)$ est un ouvert de $H \setminus \{0\}$ pour la topologie induite par la norme. Identifiant H à $l^2(\mathbb{N})$ grâce au choix d'une base hilbertienne, on définit les ouverts $\mathcal{V}_i = \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid x_i \neq 0)$ de H et les applications :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & \mathcal{V}_i & \to & l^2(\mathbb{N} - i) \\ & x = (x_j)_{j \in \mathbb{N} - i} & \mapsto & (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{\hat{x_i}}{x_i}, \ldots, \frac{x_j}{x_i}, \ldots). \end{array}$$

où le terme accentué doit être omis. Puisque $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ si $x \sim y$, ces applications passent au quotient et définissent les applications cartes $\tilde{\varphi}_i$ de l'ouvert $\mathcal{U}_i := p(\mathcal{V}_i)$ dans $l^2(\mathbb{N} - i)$ par : $\tilde{\varphi}_i(p(x)) = \varphi_i(x)$. Les applications φ_i étant continues et ouvertes, les applications $\tilde{\varphi}_i$ sont des homéomorphismes. Les applications réciproques $\tilde{\varphi}_i^{-1}$ sont données par :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi}_i^{-1} : & l^2(\mathbb{N} - i) & \to & \mathcal{U}_i \\ & y = (y_j, j \in \mathbb{N} - i) & \mapsto & p((y_0, \ldots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \ldots, y_j, \ldots)) \end{array}$$

Les applications de changement de cartes sont explicitées par :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1} : & l^2(\mathbb{N} - i, j) & \to & l^2(\mathbb{N}) \\ & y = (y_j, j \in \mathbb{N} - i, j) & \mapsto & (\frac{y_0}{y_j}, \ldots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_{i+1}}{y_j}, \ldots, \frac{\hat{y_j}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j} \ldots) \end{array}$$

et sont C^{∞}.

Exemple 3. *La grassmannienne des p-plans de H*

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable et $Gr^{(p)}(H)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension p de H :

$$Gr^{(p)}(H) = \{P \text{ s.e.v. de } H, \ \dim P = p\}.$$

Pour tout $P \in Gr^{(p)}(H)$ soit :

$$\mathcal{U}(P) = \{P' \in Gr^{(p)}(H) \ \mid \ P' \cap P^{\perp} = \{0\}\}.$$

L'ensemble $\mathcal{U}(P)$ est en bijection avec $L(P, P^{\perp})$. En effet, la condition $P' \cap P^{\perp} = \{0\}$ implique que la projection orthogonale $pr_P \ : P' \to P$ est injective, donc surjective car P est de dimension finie. Soit $(pr_P)^{-1}$ l'application réciproque de P dans P'. En notant $pr_{P^{\perp}}$ la projection orthogonale de P' dans $P^{\perp}$ et i_P (resp. $i_{P^{\perp}}$) l'injection naturelle de P (resp. $P^{\perp}$) dans H, tout élément $p' \in P'$ s'écrit :

$$\begin{aligned} p' &= i_P \circ pr_P(p') + i_{P^{\perp}} \circ pr_{P^{\perp}}(p') \\ &= (i_P + i_{P^{\perp}} \circ pr_{P^{\perp}} \circ (pr_P)^{-1})(pr_P(p')). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout P' tel que $P' \cap P = \{0\}$, il existe une application appartenant à $L(P, P^{\perp})$ (à savoir $pr_{P^{\perp}} \circ (pr_P)^{-1}$) dont P' est le graphe. L'unicité de cette application provient de l'unicité dans la décomposition d'un élément de P' en la somme d'un élément de P et d'un élément de $P^{\perp}$. L'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_P \ : & \mathcal{U}(P) & \to & L(P, P^{\perp}) \\ & P' & \mapsto & \varphi_P(P') = pr_{P^{\perp}} \circ (pr_P)^{-1} \end{array}$$

est donc injective. Elle est aussi surjective car pour tout élément $u \in L(P, P^{\perp})$ l'application $i_P + i_{P^{\perp}} \circ u$ est de rang p et son image est donc un élément de $\mathcal{U}(P)$. Nous allons montrer que $\{(\mathcal{U}(P), \varphi_P, L(P, P^{\perp})), P \in Gr^{(p)}\}$ est un atlas de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ (même $\mathcal{C}^{\omega}$) de $Gr^{(p)}$. Soient P_1 et P_2 deux points de $Gr^p(H)$ et $P' \in \mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)$ que l'on suppose non vide, c'est-à-dire que P' est à la fois le graphe d'une application T_1 de P_1 dans $P_1^{\perp}$ et le graphe d'une application T_2 de P_2 dans $P_2^{\perp}$. Relativement aux décompositions orthogonales de H selon $P_1 \oplus P_1^{\perp}$ et $P_2 \oplus P_2^{\perp}$, l'application identité $Id : P_1 \oplus P_1^{\perp} \to P_2 \oplus P_2^{\perp}$ à une décomposition par blocs:

$$Id = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où $a \in L(P_1, P_2)$, $b \in L(P_1^{\perp}, P_2)$, $c \in L(P_1, P_2^{\perp})$ et $d \in L(P_1^{\perp}, P_2^{\perp})$. La condition $P' \in \mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)$ équivaut à: $a + bT_1 \in Isom(P_1, P_2)$. Ainsi :

$$\varphi_{P_1}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) = \{T_1 \in L(P_1, P_1^{\perp}) \mid a + bT_1 \in Isom(P_1, P_2)\}$$

est un ouvert de $L(P_1, P_1^{\perp})$. En effet, pour $u \in L(P_1, P_1^{\perp})$ tel que $\|(a+bT_1)^{-1}bu\| < 1$, l'application $(a + b(T_1 + u))$ est inversible. De même : $\varphi_{P_2}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2))$ est un ouvert de $L(P_2, P_2^{\perp})$. De plus l'application de changement de cartes:

$$\begin{array}{rccl} \varphi_{P_2} \circ \varphi_{P_1}^{-1} : & \varphi_{P_1}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) & \to & \varphi_{P_2}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) \\ & T_1 & \mapsto & T_2 = (c + d \circ T_1) \circ (a + bT_1)^{-1} \end{array}$$

est une application rationnelle en la variable T_1 et donc C^{∞} (même $\mathcal{C}^{\omega}$) pour la topologie de la norme d'opérateur de l'ouvert $\varphi_{P_1}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) \subset L(P_1, P_1^{\perp})$ dans l'ouvert $\varphi_{P_2}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) \subset L(P_2, P_2^{\perp})$. Les cartes $\{(\mathcal{U}(P), \varphi_P), P \in Gr^{(p)}(H)\}$ munissent $Gr^{(p)}(H)$ d'une structure de variété banachique C^{∞} (même $\mathcal{C}^{\omega}$).

Exemple 4. *La grassmannienne des espaces de dimension et de codimension infinies d'un espace de Hilbert*

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable. On s'intéresse maintenant aux sous-espaces vectoriels fermés de dimension et de codimension infinies de H. On note :

$$Gr(H) = \{P \subset H \text{ s.e.v. fermé de } H,\ \dim P = +\infty,\ \operatorname{codim} P = +\infty\}.$$

Nous allons munir $Gr(H)$ d'une structure de variété banachique modellée sur l'espace de Banach des applications linéaires continues d'un espace de Hilbert séparable de dimension infinie dans un autre, muni de la topologie de la convergence forte. La construction est l'analogue de celle de $Gr^{(p)}(H)$. Pour tout $P \in Gr(H)$, on définit l'ensemble $\mathcal{U}(P) = \{P' \subset Gr(H) \mid pr_P \in Isom(P', P)\}$ et l'application $\varphi_P \ : \mathcal{U}(P) \to B(P, P^{\perp})$ qui à $P' \in \mathcal{U}(P)$ associe l'unique application de P dans $P^{\perp}$ dont P' est le graphe. Etant donnés deux éléments P_1 et P_2 de $Gr(H)$, la décomposition par blocs de l'application identité

$$Id = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

relative aux décompositions orthogonales de H selon $P_1 \oplus P_1^\perp$ et $P_2 \oplus P_2^\perp$, où $a \in L(P_1, P_2)$, $b \in L(P_1^\perp, P_2)$, $c \in L(P_1, P_2^\perp)$ et $d \in L(P_1^\perp, P_2^\perp)$, fournit la caractérisation suivante de l'ensemble :

$$\varphi_{P_1}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) = \{T_1 \in L(P_1, P_1^\perp) \mid a + bT_1 \in Isom(P_1, P_2)\},$$

qui est donc un ouvert dans l'espace de Banach $L(P_1, P_1^\perp)$. De même :

$$\varphi_{P_2}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2))$$

est un ouvert de $L(P_2, P_2^\perp)$. De plus, l'application de changement de cartes:

$$\begin{array}{rlcl} \varphi_{P_2} \circ \varphi_{P_1}^{-1} : & \varphi_{P_1}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) & \to & \varphi_{P_2}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) \\ & T_1 & \mapsto & T_2 = (c + d \circ T_1) \circ (a + bT_1)^{-1} \end{array}$$

est une application rationnelle en la variable T_1 et donc C^∞ pour la topologie de la norme d'opérateur de l'ouvert $\varphi_{P_1}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) \subset L(P_1, P_1^\perp)$ dans l'ouvert $\varphi_{P_2}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) \subset L(P_2, P_2^\perp)$. Les cartes

$$\{(\mathcal{U}(P), \varphi_P, L(P, P^\perp)), P \in Gr(H)\}$$

munissent ainsi $Gr(H)$ d'une structure de variété banachique C^∞ (même C^ω).

Exemple 5. *Les grassmanniennes associées aux idéaux de Schatten*

Munissons un espace de Hilbert séparable d'une polarisation $H = H_+ \oplus H_-$ c'est-à-dire d'une décomposition orthogonale en deux sous-espaces vectoriels fermés de dimension infinie. Pour tout $p \geq 1$, on note $L^p(H_+, H_-)$ l'idéal bilatère de $L(H_+, H_-)$ formé des éléments T tels que :

$$\|T\|_p = (Tr(T^*T)^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}}$$

est finie. En notant $L^\infty(H_+, H_-)$ l'ensemble des opérateurs compacts de H_+ dans H_-, on a les injections continues suivantes :

$$L^1(H_+, H_-) \subset L^p(H_+, H_-) \subset L^2(H_+, H_-) \subset L^q(H_+, H_-) \subset L^\infty(H_+, H_-)$$

où $1 \leq p \leq 2$ et $2 \leq q \leq +\infty$. En notant p_+ (resp. p_-) la projection orthogonale sur H_+ (resp. H_-) et $Fred(H_+, H_-)$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm de H_+ dans H_-, on définit la suite des grassmanniennes restreintes modellées sur les idéaux de Schatten $L^p(H_+, H_-)$, $1 \leq p \leq +\infty$ suivante :

$$\begin{array}{rl} Gr_p(H) = \{P \in Gr(H) \mid & p_+ \ : P \to H_+ \in Fred(H_+, H_-), \\ & p_- \ : W \to H_- \in L^p(H_+, H_-)\}. \end{array}$$

On définit de manière analogue à celle des deux exemples précédents les ensembles :

$$\mathcal{U}(P) = \{P' \in Gr_p(H) \mid pr_P \in Isom(P', P)\},$$

où pr_P désigne la projection orthogonale sur P, et les applications :

$$\begin{array}{rlcl} \varphi_P : & \mathcal{U}(P) & \to & L(P, P^\perp) \\ & P' & \mapsto & \varphi_P(P') = pr_{P^\perp} \circ (pr_P)^{-1}. \end{array}$$

On remarque en premier lieu que puisque $\mathcal{U}(P) \subset Gr_p(H)$, φ_P est en fait à valeur dans $L^p(P, P^\perp)$ et établit une bijection entre $\mathcal{U}(P)$ et $L^p(P, P^\perp)$. En second lieu, P_1 et P_2 étant deux éléments de $Gr_p(H)$, les ensembles $\varphi_{P_1}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2))$ (resp. $\varphi_{P_2}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)))$ sont des ouverts de $L^p(P_1, P_1^\perp)$ (respectivement de $L^p(P_2, P_2^\perp)$) pour la topologie induite par la norme $\|.\|_p$ (ceci résulte du fait que l'ensemble des éléments inversibles d'un espace de Banach est un ouvert pour la topologie induite par la norme). De même, les applications de changements de cartes sont des applications rationnelles et donc $\mathcal{C}^\infty$ ($\mathcal{C}^\omega$) pour la topologie induite par la norme $\|.\|_p$. Ainsi les cartes $\{(\mathcal{U}(P), \varphi_P, L^p(P, P^\perp)), P \in Gr_p(H)\}$ munissent $Gr_p(H)$

d'une structure de variété banachique $\mathcal{C}^\infty$ (même $\mathcal{C}^\omega$) et on a les injections continues suivantes :

$$Gr_1(H) \subset Gr_p(H) \subset Gr_2(H) \subset Gr_q(H) \subset Gr_\infty(H) \subset Gr(H)$$

où $1 \leq p \leq 2$ et $2 \leq q \leq +\infty$. La grassmanienne $Gr_2(H)$ sera également notée Gr_{res} comme dans [PS].

Remarque 6. Il est possible de définir de la même manière une grassmannienne associée à tout autre idéal de Schatten. (cf [Sat]).

1.3. **Morphismes de variétés, espace tangent et application tangente.**

Définition 7. Soient N et M deux variétés banachiques de classe $\mathcal{C}^r$, et $f\ : N \to M$ une application. On dit que f est un morphisme de variétés de classe $\mathcal{C}^r$ si pour toutes cartes $(\mathcal{U}, \varphi, E)$ de N et $(\mathcal{V}, \psi, F)$ de M l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\ : \varphi(\mathcal{U}) \to F$ est de classe $\mathcal{C}^r$.

Définition 8. Soit M une variété banachique de classe C^∞. Un vecteur tangent à M en un point $x \in M$ est une classe d'équivalence de couples (c, h), où $c = (\mathcal{U}, \varphi, E)$ est une carte locale en $x \in M$ et h un vecteur de E, pour la relation d'équivalence: $(c, h) \sim (c', h')$ ssi $d_{\varphi(x)}(\psi \circ (\varphi)^{-1})(h) = h'$, où $c = (\mathcal{U}, \varphi, E)$ et $c' = (\mathcal{V}, \psi, F)$. L'espace tangent en un point $x \in M$ est l'espace vectoriel formé par les vecteurs tangents à M en x.

Remarque 7. L'espace tangent en un point x d'un espace de Banach E s'identifie naturellement à E. Une carte locale $c = (\mathcal{U}, \varphi, E)$ en x d'une variété banachique M étant donnée, l'espace tangent T_xM s'identifie à E via l'application qui au couple (c, h) associe h.

Proposition 2. *L'espace tangent à M, noté TM, ensemble des vecteurs tangents à M, muni de l'atlas $\{(\mathcal{U}_\alpha \times E), (\varphi_\alpha, d\varphi_\alpha), E_\alpha \times E_\alpha), \alpha \in \Delta\}$, où l'ensemble $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha, E_\alpha), \alpha \in \Delta\}$ est un atlas de M, est une variété banachique.*

Définition 9. Soient N et M deux variétés de classe $\mathcal{C}^r$, $r \leq 1$, f un morphisme de variétés de N dans M, $(\mathcal{U}, \varphi, E)$ une carte locale en $x \in N$ et $(\mathcal{V}, \psi, F)$ une carte locale en $f(x)$ telle que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. La différentielle $d_{\varphi(x)}\Phi$ de l'application $\Phi = \psi\ \circ f \circ \varphi^{-1}$ de l'ouvert $\varphi(\mathcal{U})$ de l'espace de Banach E dans l'espace de Banach F est une application linéaire continue indépendante des cartes choisies. On la note d_xf et on l'appelle l'application linéaire tangente de f en $x \in N$.

Exemple 1. L'espace tangent à la sphère $\mathbb{S}(H)$ en un point x s'identifie à l'hyperplan H_x de H tangent à $\mathbb{S}(H)$ en x. En effet, tout $Y \in H_x$ représente bien une classe d'équivalence de couple (c, h) avec $c = (\mathbb{S}(H)\backslash\{N\}, p_1, e_0^\perp)$ ou $(\mathbb{S}(H)\backslash\{S\}, p_2, e_0^\perp)$ et $h \in e_0^\perp$, muni de la relation d'équivalence :
$((\mathbb{S}(H)\backslash\{N\}, p_1, e_0^\perp), h) \sim ((\mathbb{S}(H)\backslash\{S\}, p_2, e_0^\perp), h')$ si $h' = d_xp_2 \circ d_{p_1^{-1}(x)}p_1^{-1}(h)$,
en posant : $h = d_xp_1(Y)$ et $h' = d_xp_2(Y)$.

Exemple 2. La projection p d'un espace de Hilbert complexe H sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}(H)$ lu dans la carte $(U_i, \tilde{\varphi}_i)$ a pour différentielle en $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{array}{rlcl} d_x(\tilde{\varphi}_i \circ p) = \ d_x\varphi_i : & H & \to & l^2(\mathbb{N} - i) \\ & X = (X_i)_{i\in\mathbb{N}} & \mapsto & \frac{1}{x_i^2}(X_kx_i - x_kX_i)_{k\in\mathbb{N}-i}. \end{array}$$

Pour tout i, Ker $d_x\varphi_i = \mathbb{C}x$ et, pour tout $\lambda \neq 0$, $d_x\phi_i(X) = d_{\lambda x}\varphi_i(\lambda X)$. Ainsi tout couple $(y, Y) \in l^2(\mathbb{N} - i) \times l^2(\mathbb{N} - i)$ définit une unique application $u\ : \mathbb{C}x \to \mathbb{C}x^\perp$ telle que $(\varphi_i(\lambda x), d_{\lambda x}\varphi\lambda X) = (y, Y)$, permettant d'identifier l'espace tangent en $l = \mathbb{C}x \in \mathbb{P}(H)$ à $L(l, l^\perp)$.

1.4. **Les briques de la théorie.**

Théorème 1 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach, f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert $\mathcal{U} \subset E$ dans F, x et y deux points de $\mathcal{U}$ tels que le segment $[x,y]$ appartienne à $\mathcal{U}$, et $k = \sup_{z\in[x,y]} |||df(z)|||$. Alors :*

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq k\|y - x\|_E.$$

Théorème 2 (Théorème de point fixe de Picard)**.** *Soit (M,d) un espace métrique complet et $f\ : M \to M$ une application contractante, i.e. telle qu'il existe une constante k, $0 < k < 1$ vérifiant :*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y) \quad \forall x, y \in M.$$

Alors f possède un unique point fixe et pour tout $x_0 \in M$, la suite des itérées $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ce point lorsque n tend vers $+\infty$.

■ **Preuve du théorème** 2 :
Simple conséquence de la convergence d'une série géométrique de raison $k < 1$. ■

Théorème 3 (Théorème de Hahn-Banach)**.** *Soit E une espace vectoriel réel et p une sous-norme sur E i.e. vérifiant :*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall x \in E, \forall \lambda > 0,$$
$$p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

Soit G un sous-espace vectoriel de E et $g\ : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle, pour tout $x \in G$, $g(x) \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g et telle que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

■ **Preuve du théorème** 3 :
Découle du lemme de Zorn. ■

Corollaire 1. *Soit E un espace vectoriel normé et E' son dual continu muni de la norme : $\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|$. Alors l'application canonique :*

$$\begin{array}{cccc} i & : & E & \to & E'' \\ & & x & \mapsto & (f \mapsto f(x)), \end{array}$$

est une injection continue de E dans son bi-dual.

Théorème 4 (Théorème de l'application ouverte)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach et soit T une application linéaire continue et surjective de E sur F. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que l'image de la boule ouverte de E de centre 0 et de rayon 1 contienne la boule ouverte de F de centre 0 et de rayon c.*

■ **Preuve du théorème** 4 :
Repose sur le fait qu'un espace de Banach est de Baire. ■

Corollaire 2. *Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue et bijective. Alors T^{-1} est continue de F dans E.*

Théorème 5 (Théorème d'inversion locale)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach, $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $f\ : \mathcal{U} \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 1$ telle que la différentielle de f en un point $x_0 \in E$ soit inversible. Alors f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphime local au voisinage de x_0.*

■ **Preuve du théorème** 5:
D'après le théorème de l'application ouverte, la différentielle est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de E sur F, ainsi, quitte à considérer $(d_{x_0}f)^{-1} \circ f$ au lieu de f, on peut supposer que $E = F$ et $d_{x_0}f = Id_E$. Quitte à considérer la fonction $f(x + x_0) - f(x_0)$, on peut aussi supposer que $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0$.

Soit $u(x) = x - f(x)$. La différentielle de u en 0 étant 0, et l'application $du\ : \mathcal{U} \to B(E,E)$ étant continue, il existe un rayon $r > 0$ telle que pour tout point x de la boule de rayon $2r$ centrée en 0, $B_{2r}(0)$, la norme de l'application linéaire $du(x)$ est inférieure à 1/2. Alors, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\|u(x)\| < \frac{1}{2}\|x\|$, ainsi l'image de la boule fermée de rayon r est incluse dans la boule fermée de rayon $r/2$.

Montrons que f réalise une bijection de la boule fermée $\bar{B}_r(0)$ sur la boule fermée $\bar{B}_{\frac{r}{2}}(0)$. Soit $y \in \bar{B}_{\frac{r}{2}}(0)$, le théorème de point fixe de Picard va nous donner l'existence et l'unicité d'une solution $x \in \bar{B}_r(0)$ de l'équation $f(x) = y$. Considérons en effet la fonction $u_y(x) = y + u(x) = y + x - f(x)$. Il est immédiat que $u_y(x) = x$ équivaut à $f(x) = y$. Comme $\|y\| \leq \frac{r}{2}$, on a $\|u_y(x)\| \leq r$ pour tout $x \in \bar{B}_r(0)$. Donc u_y envoie la boule fermée $\bar{B}_r(0)$ dans elle-même. Celle-ci étant un espace métrique complet, il reste à montrer que u_y est contractante. Grâce à l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\|u_y(x_1) - u_y(x_2)\| = \|u(x_1) - u(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

On a ainsi démontrer l'existence de la bijection inverse $g = f^{-1}\ : \bar{B}_{\frac{r}{2}}(0) \to \bar{B}_r(0)$.

La continuité de l'inverse g provient de la majoration :

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|u(x_1) - u(x_2)\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \|f(x_1) - f(x_2)\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

c'est-à-dire:

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|.$$

Montrons que g est différentiable dans $\bar{B}_{\frac{r}{2}}(0)$ et que $dg(y) = (df(g(y)))^{-1}$. Observons d'abord que pour $r > 0$ suffisamment petit, $df(x)$ est inversible pour tout $x \in \bar{B}_r(0)$. Pour tout y_1 et y_2 de $\bar{B}_{\frac{r}{2}}(0)$, en notant $x_1 = g(y_1)$ et $x_2 = g(y_2)$, on a:

$$\begin{aligned}\|g(y_1) - g(y_2) - (df(x_2))^{-1}(y_1 - y_2)\| &= \|x_1 - x_2 - (df(x_2))^{-1}(f(x_1) - f(x_2)\| \\ &\leq \|\|(df(x_2))^{-1}\|\| \times \|(df(x_2)(x_1 - x_2) - f(x_1) + f(x_2)\|.\end{aligned}$$

La différentiabilité de f permet d'obtenir:

$$\|df(x_2)(x_1 - x_2) - f(x_1) + f(x_2)\| = o(x_1 - x_2),$$

et la continuité de g implique que $\|x_1 - x_2\| = o(y_1 - y_2)$, ce qui permet de conclure.

La continuité de g, de df et de la prise de l'inverse permettent de déduire de l'égalité $dg(y) = (df(g(y)))^{-1}$ que g est de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout $y \in \bar{B}_{\frac{r}{2}}(0)$. L'opération d'inversion étant $\mathcal{C}^\infty$ et la différentielle df de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, en itérant le processus, on obtient que g est de classe $\mathcal{C}^k$. ■

Corollaire 3. *Soit f une application $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ d'un ouvert $\mathcal{U}$ d'un espace de Banach E dans le produit de deux espaces de Banach $F_1 \times F_2$, et $x_0 \in \mathcal{U}$. Supposons que $f(x_0) = (0,0)$ et que $d_{x_0}f$ est un isomorphisme continu de E dans $F_1 = F_1 \times \{0\}$. Alors il existe un difféomorphisme local g de $F_1 \times F_2$ fixant $(0,0)$ tel que $g \circ f\ : \mathcal{U} \to F_1 \times F_2$ envoie un ouvert $\mathcal{U}_1$ de $\mathcal{U}$ sur $F_1 \times \{0\}$ et se restreigne en un difféomorphisme local de $\mathcal{U}_1$ sur un voisinage ouvert de $0 \in F_1$.*

Corollaire 4. *Soit f une application $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ d'un ouvert $\mathcal{U}$ d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F, et $x_0 \in \mathcal{U}$. Supposons que $d_{x_0}f$ est surjective et que son noyau K possède un supplémentaire topologique L. Alors il existe un ouvert $\mathcal{U}_1$ de $\mathcal{U}$ contenant x_0, un ouvert $\mathcal{V}_1$ de K, un ouvert $\mathcal{V}_2$ de L et un isomorphime $h\ : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathcal{U}_1$ de classe $\mathcal{C}^k$ tel que $f \circ h(v_1, v_2) = f \circ h(0, v_2)$.*

Théorème 6 (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soient E, F, G trois espaces de Banach, $\mathcal{U}$ un ouvert de E, $\mathcal{V}$ un ouvert de F et $f\ : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to G$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ et $z_0 = f(x_0, y_0)$. Supposons que la* *différentielle de f en (x_0, y_0) selon la seconde variable $D_2f(x_0, y_0)\ : F \to G$ soit un isomorphisme. Alors il existe un voisinage $\mathcal{U}_1$ de x_0 dans E, un voisinage $\mathcal{V}_1$ de y_0 dans F et une application $g\ : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{V}_1$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $\forall x \in \mathcal{U}_1$, $\forall y \in \mathcal{V}_1$,*

$$f(x, y) = z_0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

En particulier $g(x_0) = y_0$ et $\forall x \in \mathcal{U}_1$, $f(x, g(x)) = z_0$. De plus si $\mathcal{U}_1$ est une boule suffisamment petite, g est uniquement déterminé.

Remarque 8. On trouvera dans la proposition 3 (resp. 7) du paragraphe 1.5 une application importante du corollaire 3 (resp. 4), permettant de donner du contenu à la notion de sous-variété banachique. Le corollaire du théoreme de Hahn-Banach sera utilisé entre autre pour définir le crochet de champs de vecteurs. Cependant un théorème important manque encore à la liste des "briques fondamentales de la théorie ", il s'agit du théorème de Frobenius, qui nécessite les notions de fibrés vectoriels, champs de vecteurs et formes différentielles et qui sera donc exposé plus loin.

1.5. **Sous-variétés banachiques.**

1.5.1. *Définition.*

Définition 10. Soient M une variété banachique et N un sous-ensemble de M muni de la topologie induite. N est une sous-variété banachique de M si pour tout $x \in N$ il existe une carte locale $(\mathcal{U}, \varphi, E)$ de M, appelée carte adaptée à N en x, telle que $x \in \mathcal{U}$ et φ induise un homéomorphisme de $\mathcal{U} \cap N$ sur l'intersection de $\varphi(\mathcal{U})$ avec un sous-espace fermé de E admettant un supplémentaire topologique.

Exemple 1. La sphère unité d'un espace de Hilbert H est une sous-variété hilbertienne de H. Une carte de H adaptée à $\mathbb{S}(H)$ en un point appartenant à l'hémisphère nord est par exemple l'application qui à $y \in H - \{N\}$ associe le point $p_1(y) + (y - x)$, où p_1 désigne la projection stéréographique de pôle nord et x le point de $\mathbb{S}(H)$ sur la droite reliant N à y. De manière explicite, on pose $\mathcal{U} = \{y \in H, y_0 > 0, y \neq N\}$ et $\varphi\ : H \to H$ associant à y le point $z = \varphi(y)$ de coordonnées :

$$\begin{aligned} z_0 &= (y_0 - 1)(1 + \tfrac{2(y_0-1)}{1-2y_0+\|y\|^2}) \\ z_k &= (\tfrac{1}{1-y_0} + 1 + \tfrac{2(y_0-1)}{1-2y_0+\|y\|^2})y_k \quad \text{pour tout } k > 0 \end{aligned}$$

Alors $\varphi(\mathcal{U} \cap N) = \varphi(\mathcal{U}) \cap \{z_0 = 0\}$. En considérant diverses applications de la sorte, on recouvre $\mathbb{S}(H)$ de cartes adaptées.

1.5.2. *Immersions.*

Définition 11. Soient N et M deux variétés banachiques, et $f\ : N \to M$ un morphisme de variétés. On dit que f est une immersion en $x \in N$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :
- $df_x\ : T_xN \to T_{f(x)}M$ est injective, son image est fermée et admet une supplémentaire topologique dans $T_{f(x)}M$.
- il existe un espace de Banach F, un sous-espace vectoriel fermé E de F possédant un supplémentaire topologique, des cartes $(\mathcal{U}, \varphi, E)$ en $x \in N$ et $(\mathcal{V}, \psi, F)$ en $f(x) \in M$ tels que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ et $\varphi = \psi \circ f_{|\mathcal{U}}$.
- il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $x \in N$, un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $f(x)$ tels que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ et un morphisme q de $\mathcal{V}$ dans N tel que $q(f(x)) = x$ pour tout $x \in \mathcal{U}$.

On dit que f est une immersion, si c'est une immersion en tout point de N.

Proposition 3. *Soit f une immersion d'une variété banachique N dans une variété banachique M. On suppose que f induise un homéomorphisme de N sur $f(N)$. Alors $f(N)$ est une sous-variété de M.*

Définition 12. On appelle plongement une immersion induisant un homéomorphisme sur son image.

Exemple 2. *L'injection de Plücker* $Gr^{(p)} \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^p H)$ *:*

Proposition 4. *L'injection de Plücker :*

$$\begin{array}{llcl} i_P \ : & Gr^{(p)}(H) & \to & \mathbb{P}(\Lambda^p H) \\ & W = vect\{w_1, w_2, \dots, w_p\} & \mapsto & [w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_p] \end{array}$$

est un plongement holomorphe.

□ **Preuve de la proposition** 4 :
Soient $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de l'espace de Hilbert H. L'espace de Hilbert $\Lambda^p H$ a alors pour base hilbertienne $\{e_{s(1)} \wedge e_{s(2)} \wedge \dots \wedge e_{s(p)}\}_{s\in\mathcal{S}}$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des injections de $\{1, \dots, k\}$ dans $\mathbb{Z}$ telles que $s(1) < s(2) < \dots s(p)$. Pour tout $s \in \mathcal{S}$, on définit les sous-espaces vectoriels :

$$H_s = vect\{e_{s(1)}, e_{s(2)}, \dots, e_{s(p)}\},$$

les ouverts de cartes :

$$\mathcal{U}_s = \{W \in Gr^{(p)}, pr_s \ : W \tilde{\to} H_s\},$$

où pr_s est la projection orthogonale sur H_s et les coordonnées de Plücker :

$$\begin{array}{llcl} \pi_s \ : & Gr^{(p)} & \to & H_s \\ & W & \mapsto & \det(pr_s \circ w), \end{array}$$

où $w \ : vect\{e_1, \dots, e_p\} \to H$ est défini par $w(e_i) = w_i$. Les coordonnées de Plücker permettent d'expliciter i_P :

$$\begin{array}{ll} i_P(W) & = [w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_p] = [\sum_{s\in\mathcal{S}} \det(pr_s \circ w) e_{s(1)} \wedge e_{s(2)} \wedge \dots \wedge e_{s(p)}] \\ & = [\sum_{s\in\mathcal{S}} \pi_s(W) e_{s(1)} \wedge e_{s(2)} \wedge \dots \wedge e_{s(p)}]. \end{array}$$

Montrons tout d'abord que π est bien définie, i.e. que pour toute base $\{w_1, \dots, w_p\}$ de $W \in Gr^{(p)}$, l'élément $w_1 \wedge \dots \wedge w_p$ appartient bien à $\Lambda^p H = l^2(\mathcal{S})$. Pour cela, il suffit de montrer le lemme suivant :

Lemme 1.

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} |\pi_s(w)|^2 = \det(w^* w).$$

△ **Preuve du lemme** 1 :
Montrons que pour tout couple (P, Q) de matrices, où $P \in L^2(H, \mathbb{C}^p)$ et $Q \in L^2(\mathbb{C}^p, H)$, on a :

$$\det PQ = \sum_{s\in\mathcal{S}} \det P_s Q_s,$$

où P_s (resp. Q_s) désigne la sous-matrice $p \times p$ de P (resp Q) formée des lignes indexées par $s \in \mathcal{S}$. En désignant par $\mathcal{S}_p$ le groupe des permutations de p éléments, on a :

$$\begin{array}{ll} \det(PQ) & = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p (PQ)_{\sigma(i),i} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p (\sum_{j\in\mathbb{Z}} P_{\sigma(i)j} Q_{ji}) \\ & = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \sum_{s \ :[1,p]\to Z} \prod_{i=1}^p P_{\sigma(i),s(i)} Q_{s(i),i} \\ & = \sum_{s \ :[1,p]\to Z} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p P_{\sigma(i),s(i)} Q_{s(i),i} \\ & = \sum_{\{s_1,\dots,s_p\}} \sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_p} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p P_{\sigma(i),\sigma'(s_i)} Q_{\sigma'(s_i),i} \\ & = \sum_{\{s_1,\dots,s_p\}} \sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_p} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma \circ \sigma'^{-1}) \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^p P_{\sigma\circ\sigma'^{-1}(i),s_i)} Q_{s_i,i} \\ & = \sum_{\{s_1,\dots,s_p\}} (\sum_{\sigma''\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma'') \prod_{i=1}^p P_{\sigma''(i),s_i}) (\sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^p Q_{s_i,i}) \\ & = \sum_{\{s_1,\dots,s_p\}} \det P_s \det Q_s = \sum_{s\in\mathcal{S}} \det P_s \det Q_s \end{array}$$

△

Montrons maintenant que i_P est un plongement holomorphe. En notant $\phi_s \ : \mathcal{U}_s \to L(H_s, H_s^\perp)$ les applications cartes associées aux ouverts $\mathcal{U}_s$ de $Gr^{(p)}$, $\mathcal{V}_s =$

$\{p((\lambda_{s'})_{s'\in\mathcal{S}}) \in \mathbb{P}(\Lambda^p H), \lambda_s \neq 0\}$ les ouverts de cartes de $\mathbb{P}(\Lambda^p H)$ et $\tilde{\phi}_s$ les applications cartes associées, on a :

$$\begin{array}{rcll} \tilde{\phi}_{s_0} \circ i_P \circ \phi_{s_0}^{-1} & : & L(H_{s_0}, H_{s_0}^{\perp}) & \to & l^2(\mathcal{S} - s_0) \\ & & T = (T_{ij})_{i\in\mathbb{Z}-\mathrm{Im}s_0, 1\leq j\leq p} & \mapsto & (\det T_s)_{s\in\mathcal{S}-s_0}, \end{array}$$

où T_s est la matrice $p \times p$ obtenue à partir de la matrice $\mathbb{Z} \times p$ de l'application $\mathrm{Id}_{\ H_s} + T$ en choisissant les p lignes correspondant à l'image de s. En particulier, $T_{ij} = \det(T_{s^{(ij)}})$ où $s^{(ij)}(k) = s_0(k)$ pour tout k appartenant à $\{1, \ldots, p\} - \{j\}$ et $s^{(ij)}(j) = i$. Chacune des coordonnées de la matrice T apparaissant comme une des composantes de l'application $\tilde{\phi}_{s_0} \circ i_P \circ \phi_{s_0}^{-1}$, cette application, ainsi que sa différentielle, sont injectives. Comme la variété $\mathbb{P}(\Lambda^p H)$ est une variété hilbertienne, l'image de la différentielle possède bien un supplémentaire topologique (à savoir son orthogonal), donc i_P est une immersion. Pour prouver que i_P est un plongement il suffit de montrer que i_P est (globalement) injective, c'est-à-dire que les images de deux ouverts $\mathcal{U}_{s_1}$ et $\mathcal{U}_{s_2}$ d'intersection vide sont d'intersection vide. Ceci est clair car les coordonnées de Plücker associées π_{s_1} et π_{s_2} ne peuvent pas être non nulles en même temps. On en déduit que i_P est un plongement. De plus, dans les cartes considérées, chacune des applications π_s est une expression polynomiale des coordonnées et est donc holomorphe. On en déduit qu'il en est de même pour i_P. □

Exemple 3. *L'injection de Plücker $Gr_2 \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$:*
Soit H l'espace de Hilbert $l^2(S^1, \mathbb{C})$ muni de la polarisation $H = H_+ \oplus H_-$, où H_+ (resp. H_-) désigne le sous-espace vectoriel de H formé des applications de la variable $z \in S^1$ s'étendant en une application holomorphe à l'intérieur (resp. extérieur) du disque unité. On considère la variété banachique Gr_2 associée à cette polarisation. Les composantes connexe de Gr_2 sont indexées par l'indice de l'opérateur de Fredholm donné par la projection orthogonale sur H_+ restreinte à $W \in Gr_2$ ([PS]), appelé dimension virtuelle de W. Pour tout élément $W \in Gr_2$ de dimension virtuelle d, l'espace $z^{-d}H_+$ est un espace de référence par rapport auquel on définit la notion de bases admissibles :

Définition 13. Une base admissible d'un élément $W \in Gr_2$ est une suite de vecteurs $(w_k)_{k\geq -d}$ de W, où d est la dimension virtuelle de W, vérifiant les deux conditions suivantes :
- l'application $w\ : z^{-d}H_+ \to W$ associant à l'élément z^k le vecteur w_k est un isomorphisme continu.
- l'opérateur $\mathrm{pr} \circ w$, où pr désigne la projection orthogonale sur $z^{-d}H_+$, est un opérateur à déterminant.

Remarque 9. Deux bases admissibles sont reliées par un opérateur à déterminant.

Proposition 5. *Soit $\mathcal{S} = \{S \subset \mathbb{Z}, \sharp(S - \mathbb{N}) < \infty, \sharp(\mathbb{N} - S) < \infty\}$ et $W \in Gr_2$ de dimension virtuelle d. Pour tout $S \in \mathcal{S}$, on définit le sous-espace de Hilbert H_S engendré par $(z^s)_{s\in S}$ et la dimension virtuelle de S par $\sharp(S-\mathbb{N}) - \sharp(\mathbb{N} - S)$. Alors pour tout $S \in \mathcal{S}$ de dimension virtuelle d la projection orthogonale $pr_S\ : W \to H_S$ est un opérateur à déterminant.*

Définition 14. Pour tout $S \in \mathcal{S}$ de dimension virtuelle d, et toute base admissible de $W \in Gr_2$ donnée par $w\ : H_+ \to W$, on définit :

$$\pi_S(w) = \det(\mathrm{pr}_S\ \circ w).$$

Pour tout $S \in \mathcal{S}$ de dimension virtuelle différente de d, on pose $\pi_S(w) = 0$.

Proposition 6. *Les coordonnées de Plücker $\{\pi_S\}_{S\in\mathcal{S}}$ définissent une injection holomorphe $\pi\ : Gr_2 \hookrightarrow \mathbb{P}(l^2(\mathcal{S}))$.*

Lemme 2.
$$\sum_{S\in\mathcal{S}} |\pi_s(w)|^2 = \det(w^*w)$$

$\triangle$ **Preuve du lemme** 2 :
- Tout d'abord, w définissant une base admissible, w^*w est bien un opérateur à déterminant.
- Pour les éléments W tels qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant : $z^k H_+ \subset W \subset z^{-k} H_+$ le déterminant $\det(w^*w)$ se réduit à un déterminant de dimension fini et se déduit du lemme 1.
- L'ensemble $Gr_0 = \{W \in Gr_2 \mid \exists k \in \mathbb{Z}, z^k H_+ \subset W \subset z^{-k} H_+\}$ étant dense dans Gr_2, par un argument de continuité, on en déduit que la formule est valable pour toute base admissible w. $\triangle$

$\square$ **Preuve de la proposition** 6 :
Analogue à la démonstration de la proposition 4. $\square$

1.5.3. *Submersions.*

Définition 15. Soient N et M deux variétés banachiques, et $f\ : N \to M$ un morphisme de variétés. On dit que f est une submersion en $x \in N$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :
- L'application linéaire $df_x\ : T_xN \to T_{f(x)}M$ est surjective et son noyau admet un supplémentaire topologique dans T_xN.
- il existe une carte $(\mathcal{U}, \varphi, E)$ en $x \in N$, une carte $(\mathcal{V}, \psi, F)$ en $f(x) \in M$ et une application linéaire surjective u de E dans F telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$, $\psi \circ f = u \circ \varphi$ et telles que $\ker\ u$ admette un supplémentaire topologique dans E.
- il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $x \in N$, un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $f(x)$ contenant $f(\mathcal{U})$ et un morphisme g de $\mathcal{U}$ dans une variété X tels que l'application (f, g) de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V} \times X$ soit un isomorphisme.
- il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $f(x)$ dans M et un morphisme s de $\mathcal{V}$ dans N tels que $s(f(x)) = x$ et $f(s(y)) = y$ pour tout $y \in \mathcal{V}$.

On dit que f est une submersion si c'est une submersion en tout point de N. L'ensemble des points où f est une submersion est un ouvert de N donc une sous-variété de N.

Proposition 7. *L'image réciproque d'un point $c \in M$ par une submersion $f\ : N \to M$ est une sous-variété banachique de N.*

Exemple 1. Soit H un espace de Hilbert réel et $\mathbb{S}(H)$ la sphère unité de H. On considère l'application :
$$\begin{array}{rccc} f & : & H & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \|x\|^2, \end{array}$$
de telle sorte que $\mathbb{S}(H) = f^{-1}(1)$. La différentielle de f en $x \in H$ est :
$$\begin{array}{rccc} d_xf & : & H & \to & H \\ & & h & \mapsto & 2\langle h, x\rangle. \end{array}$$
L'ensemble des $x \in X$ où d_xf est une submersion est l'ouvert $H - \{0\}$, et $\mathbb{S}(H) = f^{-1}(1)$ est une sous variété hilbertienne de $H - \{0\}$ donc de H.

1.6. Groupes de Lie et algèbres de Lie banachiques.

Définition 16. Un groupe de Lie banachique G est une variété banachique $\mathcal{C}^\infty$ muni d'une structure de groupe telle que la multiplication $G\times G\to G$, $(x,y)\mapsto xy$, ainsi que l'inversion $G\to G$, $x\mapsto x^{-1}$ soient des applications $\mathcal{C}^\infty$.

Définition 17. On appelle algèbre de Lie d'un groupe de Lie G l'espace tangent à G en l'élément neutre du groupe. Elle sera souvent notée $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$.

Exemple 1. *Le groupe linéaire $GL(H)$:*
Soit H un espace de Hilbert et $B(H)$ l'ensemble des applications linéaires continues de H dans H. $B(H)$ possède une structure naturelle d'espace de Banach pour la norme d'opérateur :

$$|||A||| = \sup_{x\in H, \|x\|\leq 1} \|A(x)\|.$$

L'ensemble des opérateurs bornés inversibles de H dans H, noté $\mathrm{GL}(H)$, est un ouvert de $B(H)$ car pour $A\in\mathrm{GL}(H)$ et $B\in B(H)$ tel que $|||A^{-1}B|||<1$, la série suivante est normalement convergente et définit l'inverse de $A+B$:

$$\begin{array}{ll}(A+B)^{-1} & = (A(I+A^{-1}B))^{-1} = (I+A^{-1}B)^{-1}A^{-1} \\ & = (\sum_{n\geq 0}(-1)^n(A^{-1}B)^n)A^{-1}\end{array}$$

On en déduit que $\mathrm{GL}(H)$ est un groupe de Lie banachique d'algèbre de Lie $B(H)$.

Exemple 2. *Le groupe unitaire $U(H)$:*
Le groupe unitaire de H est défini par :

$$U(H)=\{u\in\mathrm{GL}(H)\mid u^*u=\mathrm{Id}_H\}.$$

Considérons l'application :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathrm{GL}(H) & \to & \mathrm{Sym}(H) \\ & & u & \mapsto & u^*u, \end{array}$$

où $\mathrm{Sym}(H)$ désigne les éléments auto-adjoints de $B(H)$ i.e. vérifiant $y^*=y$. La différentielle de f en un point u de $\mathrm{GL}(H)$ est donnée par :

$$\begin{array}{rcccl} d_uf & : & B(H) & \to & \mathrm{Sym}(H) \\ & & a & \mapsto & a^*u+u^*a. \end{array}$$

Pour $u\in U(H)$, elle est surjective, un antécédent de $Y\in\mathrm{Sym}(H)$ étant donné par $\frac{1}{2}uY$. De plus, son noyau est donné par :

$$\mathrm{Ker}\ d_uf=\{a\in B(H)\mid a^*u+u^*a=0\},$$

et possède un supplémentaire topologique à savoir :

$$\mathrm{Supp}_u=\{s\in B(H)\mid s^*u-u^*s=0\},$$

la projection sur Ker d_uf parallèlement à Supp_u étant l'application que à $X\in B(H)$ associe $\frac{1}{2}(X-uX^*u)$. On en déduit que f est une submersion un tout point de $U(H)$ et que $U(H)$ est une sous-variété banachique de $\mathrm{GL}(H)$ dont l'algèbre de Lie est l'ensemble $\mathcal{A}(H)$ des éléments anti-hermitiens de $B(H)$. Pour les détails concernant cet exemple, nous renvoyons le lecteur à [Wur1].

Exemple 3. *Le groupe unitaire restreinte U_{res} :*
Soit $H=H_+\oplus H_-$ une décomposition de l'espace de Hilbert H en deux sous-espaces vectoriels fermés de dimension infinie en somme directe orthogonale, et U_{res} le groupe unitaire restreint défini par :

$$\begin{array}{rll} U_{res} & = \{\begin{pmatrix} U_+ & U_{-+} \\ U_{+-} & U_- \end{pmatrix}\in U(H)\mid & U_{-+}\in L^2(H_-,H_+), \\ & & U_{+-}\in L^2(H_+,H_-)\}. \end{array}$$

U_{res} est un sous-groupe du groupe unitaire $U(H)$ que l'on munit d'une structure de variété banachique par l'inclusion :

$$\begin{array}{ccc} U_{res} & \hookrightarrow & U(H)\times L^2(H,H) \\ u = \begin{pmatrix} U_+ & U_{-+} \\ U_{+-} & U_- \end{pmatrix} & \mapsto & (u, \begin{pmatrix} 0 & U_{-+} \\ U_{+-} & 0 \end{pmatrix}). \end{array}$$

Son algèbre de Lie est :

$$\begin{array}{rll} \mathfrak{u}_{res} & = \{A = \begin{pmatrix} A_+ & A_{-+} \\ A_{+-} & A_- \end{pmatrix} \mid & A^* + A = 0, \\ & & A_{+-} \in L^2(H_+, H_-), A_{-+} \in L^2(H_-, H_+)\}. \end{array}$$

1.7. **Fibrés vectoriels et fibrés principaux.**

Définition 18. Un fibré vectoriel de fibre F où F est un espace de Banach de dimension finie ou infinie sur une variété banachique B modelée sur E est une variété banachique T modelée sur $E \times F$ munie d'une projection $p\ : T \to B$ vérifiant :
(i) $\forall x \in B, p^{-1}(x)$ est isomorphe à F
(ii) $\forall x \in B$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $x \in B$ et un isomorphisme (appelé trivialisation locale) $\Psi\ : \mathcal{U} \times F \to p^{-1}(\mathcal{U})$ commutant aux projections naturelles et tel que la restriction de Ψ à une fibre soit un isomorphisme continu.

Exemple 1. *Fibré tangent de* $\mathbb{S}(H)$ *:*
L'espace tangent en un point $x \in \mathbb{S}(H)$ s'identifie à l'orthogonal de x dans H. Le fibré tangent est alors le sous-ensemble de $H\times H$ constitué des paires $(x,y) \in H\times H$ telles que $x \in \mathbb{S}(H)$ et $y \in x^{\perp}$.

Exemple 2. *Fibré normal au dessus de* $\mathbb{S}(H)$ *:*
On définit le fibré normal $\mathcal{N}(H)$ de la sphère unité $\mathbb{S}(H)$ d'un espace de Hilbert réel séparable H comme le sous-ensemble de $H \times H$ muni de la topologie produit donné par : $\mathcal{N}(H) = \{(x, \lambda.x) \in H \times H, x \in \mathbb{S}(H), \lambda \in \mathbb{R}\}$. La projection $p\ :\ \mathcal{N}(H) \to \mathbb{S}(H)$ est la projection sur le premier facteur : pour tout $x \in \mathbb{S}(H)$, $p^{-1}(x)$ est un espace vectoriel réel de dimension 1. En reprenant les notations du 1.2, les projections stéréographiques p_1 et p_2 permettent de définir une structure de variété banachique sur $\mathcal{N}(H)$ et de fibré de rang 1 au dessus de $\mathbb{S}(H)$. Les applications cartes s'écrivent :

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1 & : & p^{-1}(\mathbb{S}(H)\setminus N) & \to & l^2(\mathbb{N})\times\mathbb{R} \\ & & (x,\lambda.x) & \mapsto & (p_1(x),\lambda) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} \varphi_2 & : & p^{-1}(\mathbb{S}(H)\setminus S) & \to & l^2(\mathbb{N})\times\mathbb{R} \\ & & (x,\lambda.x) & \mapsto & (p_2(x),\lambda) \end{array}$$

L'application de changement de cartes est donnée par :

$$\begin{array}{cccc} \varphi_2\ \circ\varphi_1^{-1} & : & l^2(\mathbb{N})\times\mathbb{R} & \to & l^2(\mathbb{N})\times\mathbb{R} \\ & & (y,\lambda) & \mapsto & (\frac{y}{\|y\|^2}, -\lambda) \end{array}$$

Exemple 3. *Fibré tangent de* $Gr^{(p)}(H)$ *:*
L'espace tangent en un point $P \in Gr^{(p)}(H)$ s'identifie à l'ensemble des applications linéaires de l'espace vectoriel P de dimension p dans $P^{\perp}$. Le fibré tangent de $Gr^{(p)}(H)$ est l'ensemble $\{(P,T) \in Gr^{(p)}(H) \times B(H) \mid T_{|P^{\perp}} = 0, \operatorname{Im} T \subset P^{\perp}\}$.

Exemple 4. *Fibré tautologique au dessus de* $Gr^{(p)}(H)$ *:*
Le fibré tautologique associé à $Gr^{(p)}(H)$ est le fibré vectoriel de rang p dont la fibre en $P \in Gr^{(p)}(H)$ est l'espace vectoriel P. C'est le sous-ensemble des couples $(P,x) \in Gr^{(p)}(H) \times H$ tels que $x \in P$.

Exemple 5. *Fibré tangent de $Gr_p(H)$:*
L'espace tangent en un point $P \in Gr_p(H)$ s'identifie à l'ensemble des applications linéaires de l'espace vectoriel fermé P de dimension infinie dans $P^\perp$ appartenant à l'idéal de Schatten $L^p(P, P^\perp)$. Le fibré tangent de $Gr_p(H)$ est l'ensemble $\{(P,T) \in Gr_p(H) \times L^p(H) \mid T_{|P^\perp} = 0, \mathrm{Im}\, T \subset P^\perp\}$.

Exemple 6. *Fibré tautologique au-dessus de $Gr_p(H)$:*
Le fibré tautologique associé à $Gr_p(H)$ est le fibré vectoriel en espaces de Hilbert de dimension infinie dont la fibre en $P \in Gr_p(H)$ est l'espace vectoriel fermé P. C'est le sous-ensemble des couples $(P, x) \in Gr_p(H) \times H$ tels que $x \in P$.

Définition 19. Soient B une variété banachique et G un groupe de Lie banachique. Un fibré principal de groupe G et de base B est une variété banachique Q munie d'une projection $p : Q \to B$ et d'une action de G sur Q telles que:
- G agit sur Q à droite en laissant stables les fibres et cette action restreinte à chaque fibre est libre et transitive.
- $\forall x \in B$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x dans B et un isomorphisme Ψ G-invariant tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \mathcal{U} \times G & \longrightarrow & Q_{|\mathcal{U}} = p^{-1}(\mathcal{U}) \\ p_1 \searrow & & \swarrow p \\ & \mathcal{U} & \end{array}$$

Exemple 7. *Fibration de Hopf :*
La projection canonique $H - \{0\}$ sur $\mathbb{P}(H)$ restreinte à $\mathbb{S}(H)$ muni $\mathbb{S}(H)$ d'une structure de S^1-fibré principal au-dessus de $\mathbb{P}(H)$ appelé fibré de Hopf.

Exemple 8. *Fibré des repères de $Gr^{(p)}(H)$:*
Le sous-ensemble de $Gr^{(p)}(H) \times L(\mathbb{C}^p, H)$ formé des couples (P, x) tels que $\mathrm{Im}\ x = P$ et $\det(x^*x) > 0$ est un fibré principal de groupe $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ au-dessus de $Gr^{(p)}(H)$ appelé le fibré des repères de $Gr^{(p)}(H)$.

1.8. **Champs de vecteurs.**

Définition 20. Un champ de vecteurs sur un ouvert $\mathcal{U}$ d'une variété banachique M est une section C^∞ du fibré TM. On notera $\Gamma(\mathcal{U}, TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur $\mathcal{U}$.

Exemple 9. Soit G un groupe de Lie et X un élément de son algèbre de Lie. Alors il existe un unique champs de vecteurs $\tilde{X}$ sur G invariant à gauche valant X en l'élément neutre e du groupe. Il est défini par $\tilde{X}(g) = dL_g(X)$, où L_g désigne la multiplication à gauche par $g \in G$.

Définition 21. Soit X un champs de vecteurs dépendant du temps sur une variété banachique M, et $x_0 \in M$. On appelle flot ou courbe intégrale du champs de vecteurs X en x_0 une application $\varphi\ : J \to M$, où J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, telle que $\varphi(0) = x_0$ et telle que $\varphi'(t) = X(t, \varphi(t))$.

Théorème 7 (Existence et unicité du flot local)**.** *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, x_0 un point d'un espace de Banach E, $\mathcal{U}$ un ouvert de E contenant la boule fermée $\bar{B}_{3a}(x_0)$ de centre x_0 et de rayon $3a$ avec $0 < a < 1$, et $X\ : J \times \mathcal{U} \to E$ un champs de vecteurs continu dépendant du temps, vérifiant :*
- $\exists L \geq 1$, $\|X(t,x)\| \leq L$, $\forall (t,x) \in J \times \mathcal{U}$
- $\exists K \geq 1$, $\|X(t,x) - X(t,y)\| \leq K\|x - y\|$, $\forall x, y \in \mathcal{U}, t \in J$.
Soit $b < \frac{a}{LK}$. Alors $\forall x \in B_a(x_0)$, il existe un unique flot :

$$\varphi\ :] - b, b[\times B_a(x_0) \to \mathcal{U}$$

tel que $\varphi(0,x) = x$ *et :*

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,x) = X(t,\varphi(t,x)).$$

De plus, si X *est de classe* $\mathcal{C}^p$*, il en est de même de toute courbe intégrale* $t \to \varphi(t,x)$ *pour tout* $x \in B_a(x_0)$*.*

■ **Preuve du théorème** 7 :
Remarquons que le flot φ cherché vérifie :

$$\varphi(t,x) = x + \int_0^t X(s,\varphi(s,x))ds.$$

Nous allons l'obtenir comme point fixe de l'opérateur S_x agissant sur l'espace métrique complet $\mathcal{C} := \mathcal{C}^0([-b,b],\bar{B}_{2a}(x_0))$ muni de la distance :

$$d(\alpha,\beta) = \sup_{t\in[-b,b]} \|\alpha(t) - \beta(t)\|,$$

défini par :

$$S_x \ : \alpha \mapsto (S_x(\alpha) \ : t \mapsto x + \int_0^t X(s,\alpha(s))ds).$$

- S_x préserve $\mathcal{C}$ car, X étant continu, pour α continue, $S_x(\alpha)$ est continue et :

$$\begin{aligned} \|S_x(\alpha)(t) - x_0\| &= \|x - x_0 - \textstyle\int_0^t X(s,\alpha(s))ds\| \\ &\leq \|x - x_0\| + \textstyle\int_0^t \|X(s,\alpha(s))\|ds \leq a + bL \leq 2a. \end{aligned}$$

- D'autre part S_x est contractante car :

$$\begin{aligned} \|S_x(\alpha) - S_x(\beta)\| &= \sup_{t\in[-b,b]} \|\textstyle\int_0^t (X(s,\alpha(s)) - X(s,\beta(s)))ds\| \\ &\leq \sup_{t\in[-b,b]} \textstyle\int_0^t \|X(s,\alpha(s)) - X(s,\beta(s))\|ds \\ &\leq \sup_{t\in[-b,b]} Kt\|\alpha(s) - \beta(s)\| \leq \tfrac{a}{L} d(\alpha,\beta). \end{aligned}$$

On en déduit que s_x possède un unique point fixe γ dans $\mathcal{C}$ qui vérifie :

$$\gamma(t) = x + \int_0^t X(s,\gamma(s))ds.$$

La continuité de γ permet d'écrire :

$$\gamma'(t) = X(t,\gamma(t)),$$

et d'en conclure que γ est de classe $\mathcal{C}^1$. En itérant l'argument, on obtient que γ est de classe $\mathcal{C}^k$. ■

Remarque 10. Pour tout $x \in B_a(x_0)$ on a montré l'existence et l'unicité d'une courbe intégrale γ partant de x à $t = 0$, mais le théorème précédent ne dit rien sur la dépendance du flot par rapport à la condition initiale x.

Proposition 8. *Soient* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* M *et* $Der(C^\infty(\mathcal{U}))$ *l'ensemble des dérivations sur* $\mathcal{U}$ *i.e l'ensemble de formes linéaires sur* $C^\infty(\mathcal{U})$ *vérifiant la règle de Leibnitz. L'application :*

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \Gamma(\mathcal{U},TM) & \to & Der(C^\infty(\mathcal{U})) \\ & & X & \mapsto & (f \mapsto X.f = df(X)) \end{array}$$

est injective.

□ **Preuve de la proposition** 8 :
provient de l'injection canonique de E dans son bidual continu E'' (théorème de Hahn-Banach). Nous renvoyons le lecteur à [MR] pour les détails. □

Remarque 11. Cette proposition permet de définir le crochet de deux champs de vecteurs :

Définition 22. Soient X et Y deux champs de vecteurs sur $\mathcal{U} \subset M$. Il existe un unique champ de vecteur sur $\mathcal{U}$ appelé crochet de X et Y et noté $[X, Y]$ vérifiant : $[X, Y].f = X.(Y.f) - Y.(X.f)$ pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathcal{U})$.

Proposition 9 (Identité de Jacobi pour les champs de vecteurs)**.** *Soient X, Y, Z trois champs de vecteurs définient sur une variété banachique M. Alors :*

$$[Z, [X, Y]] = [[Z, X], Y] + [X, [Z, Y]].$$

Proposition 10. *Soient $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ deux champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie G. Alors le crochet $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ est un champs de vecteurs invariant à gauche sur G.*

Remarque 12. Cette proposition permet de définir le crochet de Lie sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G par :

$$[X, Y] = [\tilde{X}, \tilde{Y}](e),$$

où $\tilde{X}$ (resp. $\tilde{Y}$) est le champs de vecteurs invariant à gauche valant X (resp. Y) en e.

Définition 23. Soient M et N deux variétés banachiques et $f\ : M \to N$ une application différentiable surjective. On dit qu'un champ de vecteurs X sur M est projetable si $\forall n \in N$, $\forall m, m' \in f^{-1}\{n\}$, on a : $d_m f(X) = d_{m'} f(X)$.

Proposition 11. *Un champ de vecteurs X sur M projetable pour $f\ : M \to N$ définit un unique champ de vecteurs sur N, noté f_*X, par : $\forall g\ : N \to \mathbb{R}$ différentiable :*

$$f_*X(g)(f(m)) = X(g \circ f)(m).$$

Les flots ϕ_X et ϕ_{f_*X} de X et f_*X vérifient :

$$f \circ \phi_X(t, x) = \phi_{f_*X}(t, f(x)).$$

□ **Preuve de la proposition** 11 :
Le flot ϕ_X est solution de :

$$\begin{aligned} &\phi_X(0, x) = x \\ &\tfrac{d}{dt}_{|t=0} \phi_X(t, x) = X(x). \end{aligned}$$

Le flot ϕ_{f_*X} est solution de :

$$\begin{aligned} &\phi_{f_*X}(0, y) = y \\ &\tfrac{d}{dt}_{|t=0} \phi_{f_*X}(t, y) = f_*X(y). \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} f \circ \phi_X(t, x) = df \circ \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi_X(t, x) = df(X(x)) = f_*X(f(x)).$$

Ainsi $f \circ \phi_X(t, x) = \phi_{f_*X}(t, f(x))$. □

Proposition 12. *Soient M et N deux variétés banachiques, f une application différentiable surjective de M sur N et X et Y deux champs de vecteurs sur M projetables. Alors :*

$$f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y].$$

□ **Preuve de la proposition** 12 :
En notant ϕ_U le flot d'un champ de vecteurs U on a :

$$\begin{aligned} &\phi_{f_*[X,Y]}(t, f(x)) = f \circ \phi_{[X,Y]}(t, x), \\ &\phi_{f_*X}(t, f(x)) = f \circ \phi_X(t, x), \\ &\phi_{f_*Y}(t, f(x)) = f \circ \phi_Y(t, x). \end{aligned}$$

Ainsi pour toute fonction différentiable $g\ : N \to \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
&[f_*X, f_*Y](g)(f(m))\\
&= \tfrac{d}{dt}\tfrac{d}{ds}_{|t=0,s=0}(g(\phi_{f_*Y}(t, \phi_{f_*X}(s, f(m)))) - g(\phi_{f_*X}(t, \phi_{f_*Y}(s, f(m)))))\\
&= \tfrac{d}{dt}\tfrac{d}{ds}_{|t=0,s=0}(g(\phi_{f_*Y}(t, f\circ\phi_X(s, m)) - g(\phi_{f_*X}(t, f\circ\phi_Y(s, m))\\
&= \tfrac{d}{dt}\tfrac{d}{ds}_{|t=0,s=0}(g\circ f\circ\phi_Y(t, \phi_X(s, m)) - g\circ f\circ\phi_X(t, \phi_Y(s, m))\\
&= [X, Y](g\circ f)(m)\\
&= f_*[X, Y](g)(f(m)).
\end{aligned}$$

1.9. **Formes différentielles.**

Définition 24. Soit E un espace de Banach et $B^{(k)}(E)$ l'ensemble des applications k-linéaires continues sur E. On note $\Lambda^k E'$ le sous-espace vectoriel fermé de $B^{(k)}(E)$ composé des applications k-linéaires alternées i.e vérifiant :

$$T(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)T(e_1, \dots, e_k)$$

pour tous $e_1, \dots, e_k \in E$ et tout élément σ du groupe de permutation de k éléments.

Définition 25. Soient M une variété banachique C^∞ modelée sur un espace de Banach E. Le produit extérieur d'ordre k de TM est défini par :
$\Lambda^k T'M = \cup_{x\in M}\Lambda^k(T'_x M)$.

Proposition 13. *Le produit extérieur d'ordre k de TM est une variété banachique modelée sur $E\times\Lambda^k E'$ et un fibré vectoriel de fibre $\Lambda^k E'$ au-dessus de M.*

Définition 26. Une forme différentielle d'ordre k sur M est une section $\mathcal{C}^\infty$ de $\Lambda^k T'M$.

Proposition 14. *Soient ξ un champ de vecteurs sur M et ω une k-forme différentielle sur M. La contraction de ω par ξ définie par $i_\xi\omega = \omega(\xi, \dots)$ est une (k-1)-forme différentielle sur M.*

Définition 27. La différentielle extérieure d'une k-forme différentielle ω sur M, notée $d\omega$ est une (k+1)-forme différentielle sur M définie par :

$$d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) = \sum_{0\leq i\leq k}(-1)^i\xi_i.\omega(\xi_0, \dots, \hat{\xi_i}, \dots, \xi_k)$$

$$+\sum_{0\leq i<j\leq k}(-1)^{i+j}\omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \hat{\xi_i}, \dots, \hat{\xi_j}, \dots, \xi_k)$$

Définition 28. Une forme différentielle ω d'ordre k est fermée si elle vérifie $d\omega = 0$. Elle est exacte s'il existe une (k-1)-forme différentielle η telle que $d\eta = \omega$.

Proposition 15. *Pour toute forme différentielle ω on a : $d(d\omega) = 0$.*

Définition 29. Le produit extérieur d'une r-forme différentielle ω par une s-forme différentielle η est la $(r+s)$-forme différentielle $\omega\wedge\eta$ définie par :

$$\omega\wedge\eta(\xi_1, \dots, \xi_{r+s}) = \frac{1}{p\ !q\ !}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{(r+s)}}\varepsilon(\sigma)\omega(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(r)})\eta(\xi_{\sigma(r+1)}, \dots, \xi_{\sigma(r+s)}).$$

Proposition 16.

$$d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^{d^o\omega}\omega\wedge d\eta$$

1.10. **Calcul de Lie.**

Définition 30. Soit $f\ : M \to N$ un morphisme de variétés banachiques. Pour toute r-forme différentielle ω sur N, on définit une r-forme différentielle $f^*\omega$ sur M, appelée pull-back de ω par f, par :

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_r \in T_xM,$$
$$f^*\omega(\xi_1, \dots, \xi_r) = \omega(d_xf(\xi_1), \dots, d_xf(\xi_r)).$$

Proposition 17. *Pour tout morphisme f de variétés banachiques, on a :*

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta.$$

$$f^*(d\omega) = df^*\omega.$$

Lemme 3 (Lemme de Poincaré)**.** *Soit $\mathcal{U}$ une boule ouverte d'un espace de Banach E et ω une forme différentielle de degré $r \geq 1$ telle que $d\omega = 0$. Alors il existe une $(r-1)$-forme différentielle η sur $\mathcal{U}$ telle que $d\eta = \omega$.*

$\triangle$ **Preuve du lemme** 3 Nous allons construire un opérateur K des r-formes différentielles dans les $(r-1)$-formes différentielles, vérifiant :

$$dK + Kd = 0.$$

Grâce à cette relation, la condition $d\omega = 0$, implique que la $(r-1)$-forme $\eta = K\omega$ convient.

Quitte à faire une translation, on peut supposer que le centre de la boule $\mathcal{U}$ est 0. On définit $K\omega$ par :

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_{r-1} \in E, \forall x \in \mathcal{U},$$
$$(K\omega)_x(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}) = \int_0^1 t^{r-1}\omega_{tx}(x, \xi_1, \dots, \xi_{r-1})dt.$$

Calculons la différentielle de $K\omega$:

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_r \in E, \forall x \in \mathcal{U},$$
$$\begin{array}{ll}
(dK\omega)_x(\xi_1, \dots, \xi_r) & = \sum_{1\leq i\leq r}(-1)^{i-1}\xi_i.K\omega(\xi_1, \dots, \hat{\xi_i}, \dots, \xi_r) \\
& + \sum_{1\leq i<j\leq r}(-1)^{i+j}K\omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \hat{\xi_i}, \dots, \hat{\xi_j}, \dots, \xi_r) \\
& = \sum_{1\leq i\leq r}(-1)^{i-1}\xi_i.\int_0^1 t^{r-1}\omega_{tx}(x, \xi_1, \dots, \hat{\xi_i}, \dots, \xi_r)dt \\
& = \sum_{1\leq i\leq r}(-1)^{i-1}\int_0^1 t^{r-1}(\xi_i.\omega_{tx})(x, \xi_1, \dots, \hat{\xi_i}, \dots, \xi_r)dt \\
& + \sum_{1\leq i\leq r}(-1)^{i-1}\int_0^1 t^{r-1}\omega_{tx}(\xi_i, \xi_1, \dots, \hat{\xi_i}, \dots, \xi_r)dt \\
(dK\omega)_x(\xi_1, \dots, \xi_r) & = \sum_{1\leq i\leq r}(-1)^{i-1}\int_0^1 t^{r-1}(\xi_i.\omega_{tx})(x, \xi_1, \dots, \hat{\xi_i}, \dots, \xi_r)dt \\
& +r\int_0^1 t^{r-1}\omega_{tx}(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_r)dt
\end{array}$$

D'autre part :

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_r \in E, \forall x \in \mathcal{U},$$
$$\begin{array}{ll}
(Kd\omega)_x(\xi_1, \dots, \xi_r) & = \int_0^1 t^r(d\omega)_{tx}(x, \xi_1, \dots, \xi_r) \\
& = \int_0^1 t^r x.\omega_{tx}(\xi_1, \dots, \xi_r)dt \\
& + \sum_{1\leq i\leq r}(-1)^i\int_0^1 t^r\xi_i.\omega_{tx}(x, \xi_1, \dots, \hat{\xi_i}, \dots, \xi_r)dt \\
& = \int_0^1 t^r x.\omega_{tx}(\xi_1, \dots, \xi_r)dt \\
& + \sum_{1\leq i\leq r}(-1)^i\int_0^1 t^r(\xi_i.\omega_{tx})(x, \xi_1, \dots, \hat{\xi_i}, \dots, \xi_r)dt \\
& + \sum_{1\leq i\leq r}(-1)^i\int_0^1 t^r\omega_{tx}(\xi_i, \xi_1, \dots, \hat{\xi_i}, \dots, \xi_r)dt \\
& = \int_0^1 t^r x.\omega_{tx}(\xi_1, \dots, \xi_r)dt \\
& + \sum_{1\leq i\leq r}(-1)^i\int_0^1 t^r(\xi_i.\omega_{tx})(x, \xi_1, \dots, \hat{\xi_i}, \dots, \xi_r)dt \\
& -r\int_0^1 t^r\omega_{tx}(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_r)dt
\end{array}$$

On a donc bien $dK + Kd = 0$. $\triangle$

Définition 31. Un champ de tenseur de type (r,s) est une section $\mathcal{C}^\infty$ du fibré $(TM)^{\otimes^r} \otimes (T'M)^{\otimes^s}$.

Définition 32. Soit X un champ de vecteur sur une variété banachique M, $\alpha\ :\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\times\mathcal{U}\rightarrow\mathcal{U}$ le flot local de X défini sur un voisinage de $(0,x)\in\mathbb{R}\times M$ et η un champ de tenseur sur M de type (r,s). La dérivée de Lie de η par rapport à X est le champ de tenseur du même type que η défini par :

$$\mathcal{L}_X\eta\ := \frac{d}{dt}_{|t=0}(\alpha_{-t})_*\circ\eta\circ\alpha_t,$$

où $(\alpha_{-t})_*$ est l'application induite par l'application tangente de $\alpha_{-t}\ := \alpha(-t,.)$ avec pour tout champ de vecteur Y :

$$(\alpha_{-t})_*(Y) = d\alpha_{-t}(Y),$$

et pour toute 1-forme différentielle ω :

$$(\alpha_{-t})_*(\omega)(Y)\ := \omega(d\alpha_{-t}(Y)).$$

Remarque 13. Pour toute fonction f sur M, alors :

$$\mathcal{L}_X f = X.f,$$

et pour tout champ de vecteur Y sur M :

$$\mathcal{L}_X Y = [X,Y].$$

Proposition 18.

$$\mathcal{L}_X = di_X + i_X d$$

$$\mathcal{L}_X(\omega\wedge\phi) = \mathcal{L}_X\omega\wedge\phi + \omega\wedge\mathcal{L}_X\phi.$$

Proposition 19 (Formule de Cartan)**.** *Soit X_t un champ de vecteur dépendant du temps, α son flot local et ω_t une forme différentielle dépendant du temps. Alors :*

$$\frac{d}{dt}(\alpha_t)_*\omega_t = (\alpha_t)_*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t) = (\alpha_t)_*(di_{X_t}\omega_t + i_{X_t}d\omega_t).$$

1.11. **Le théorème de Frobenius.**

Définition 33. Soit E un sous-fibré vectoriel du fibré tangent à une variété banachique M. On dit que E est intégrable en $x_0\in M$ s'il existe une sous-variété N de M contenant x_0 telle que l'application tangente de l'inclusion $i\ : N\hookrightarrow M$ induise un isomorphisme de fibrés vectoriels de TN sur E. On dit que E est intégrable s'il est intégrable en tout point de M.

Théorème 8 (Théorème de Frobenius)**.** *Soit M une variété banachique de classe $\mathcal{C}^p$ avec $p\geq 2$ et E un sous-fibré vectoriel du fibré tangent de M. Alors E est intégrable ssi E satisfait l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

(1) *Pour tout point $x\in M$ et tous champs de vecteurs X_1 et X_2 définis au voisinage de x et contenu dans E, le crochet $[X_1,X_2]$ est également contenus dans E.*
(2) *Pour tout point $x\in M$ et toute 1-forme différentielle ω définie au voisinage de x et qui s'annule sur E, la forme $d_{dR}\omega$ s'annule quand appliquée aux couples de champs de vecteurs à valeurs dans E.*

1.12. **Connexions.**

Définition 34. Une connexion générale sur un fibré E de base B est la donnée:
- soit d'une 1-forme A sur E à valeurs dans l'espace tangent à la fibre, dont la restriction à la fibre est l'identité;
- soit d'une distribution de sous-espaces vectoriels fermés H_ξ, $\xi \in E$, appelés espaces horizontaux, en tout point supplémentaires à l'espace tangent à la fibre.

Remarque 14. Les deux définitions coïncident au sens où: $\forall \xi \in E$, $\forall X \in T_\xi B$, $A(\xi)X$ est la projection de X sur l'espace tangent à la fibre parallèlement à l'espace horizontal H_ξ, i.e. $H_\xi = \text{ Ker } A(\xi)$.

Définition 35. Une dérivée covariante sur un fibré E de base B est la donnée d'une application ∇ qui a toute section s de E associe un élément $\nabla s \in \Gamma(s^*TF)$, où TF est le fibré de base B dont la fibre est l'espace total du fibré tangent à la fibre F.

Remarque 15. La donnée d'une connexion A équivaut à la donnée d'une dérivée covariante au sens où:
- A étant donnée, on définit ∇ par:
$\forall \sigma \in \Gamma(E)$, $\forall X \in T_x B$, $\nabla_X \sigma = A(\sigma_*(X))$;
- ∇ étant donnée, on définit A par:
$\forall \xi \in E$, $\forall Y \in T_\xi E$, $A(\xi)Y = \nabla_X \sigma$, où $\sigma \in \Gamma(E)$, $X \in T_x B$ sont tels que: $\sigma(x) = \xi$, $\sigma_*(X) = Y$.

Définition 36. Une connexion linéaire sur un fibré vectoriel E de base B est la donnée d'une 1-forme A sur E à valeurs dans TE dont la restriction à la fibre est l'identité, et telle que:

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in p^{-1}(x), \forall \lambda \in \mathbb{C}, A(\xi_1 + \lambda \xi_2) = A(\xi_1) + \lambda A(\xi_2).$$

La dérivée covariante correspondante vérifie:

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E), \forall \lambda \in \mathbb{C}, \nabla(\sigma_1 + \lambda \sigma_2) = \nabla(\sigma_1) + \lambda \nabla(\sigma_2)$$

$$\forall \sigma \in \Gamma(E), \forall X \in TE, \forall f \in C^\infty(B), \nabla_X(f\sigma) = f \nabla_X \sigma + df(X)\sigma.$$

(Cette dernière égalité est la règle de Leibniz).

Définition 37. Une connexion sur un G-fibré principal Q de base B est la donnée d'une 1-forme A sur Q à valeurs dans l'espace tangent à la fibre, dont la restriction à la fibre est l'identité, et telle que:

$$\forall x \in B, \forall \xi \in p^{-1}(x), \forall X \in T_\xi Q, \forall g \in G :$$

$$(A(\xi)X).g_* = A(\xi.g)(X.g_*)$$

En identifiant l'espace tangent à la fibre à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ via l'action infinitésimale du groupe, A peut être vu comme une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$ vérifiant:

$$\forall x \in B, \forall \xi \in p^{-1}(x), \forall X \in T_\xi Q, \forall g \in G :$$

$$(A(\xi)X).g_* = \text{Ad } g \;\; A(\xi.g)(X.g_*)$$

La dérivée covariante correspondante vérifie:

$$\forall \sigma \in \Gamma(Q), \forall X \in TM, (\nabla_X \sigma).g_* = \nabla_X(\sigma.g)$$

Définition 38. Puisque la donnée d'une connexion sur un fibré vectoriel E de base B permet d'identifier les fibres voisines, elle permet aussi de dériver les p-formes sur B à valeurs dans E, i.e. les sections de $E \otimes \Lambda^p B$. On définit la différentielle extérieure d^∇ associée à une dérivée covariante ∇ par:

$$\forall \psi \in \Gamma(E \otimes \Lambda^p B),$$

$$d^\nabla\psi(X_0,\ldots,X_p)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\nabla_{X_i}(\psi(X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p))$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\psi([X_i,X_j],X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j\ldots,X_p)$$

Exemple 10. *Soient B une variété, G un groupe de Lie et $Q = B\times G$. Pour $(x,g)\in Q$, on notera $T_{(x,g)}Q = T_xB\oplus T_gG$ l'espace tangent au fibré. Dans ce cas particulier, une connexion sur Q est une 1-forme A sur Q à valeurs dans TG, vérifiant les conditions précédemment énoncées. Il est commode de la considérer comme une 1-forme sur Q à valeurs dans $T_eG=\mathfrak{g}$ en identifiant T_gG à $\mathfrak{g}$ via la multiplication à gauche $(L_{g^{-1}})_*$. La condition de compatibilité de A avec l'action (à droite) de G sur Q s'exprime alors de la manière suivante:*

$$\forall x\in B,\forall g\in G,\forall X\in T_{(x,g)}Q, A((x,g))X=(Ad\ g^{-1})\left(A((x,e))(X.g_*^{-1})\right)$$

Du fait de la décomposition $T_{(x,g)}Q = T_xB\oplus T_gG$, on peut aussi considérer une connexion $\tilde{A}$ sur Q comme une 1-forme sur B à valeurs dans $\mathfrak{g}$. On retrouve la 1-forme de connexion précédente en posant:

$$A((x,e))_{|\mathfrak{g}}=Id$$
$$A((x,e))_{|T_xB}=\tilde{A}$$
$$A((x,g))X=Ad\ g^{-1}.A((x,e))(X.g_*^{-1})$$

En d'autres termes:

$$\tilde{A}=s^*A$$

où s est la section canonique: $s(x)=(x,e)$.

Exemple 11. *Soit Q un fibré trivial de groupe G et de base B, dont on ne fixe pas la trivialisation. L'action de G sur la fibre permet d'identifier chaque espace tangent à la fibre à $\mathfrak{g}$ via l'action infinitésimale de l'algèbre de Lie. Via cette identification, une connexion sur Q est une 1-forme A sur Q à valeurs dans $\mathfrak{g}$ vérifiant:*

$$\forall x\in B,\forall g\in G,\forall X\in T_{(x,\xi)}Q,$$
$$A((x,\xi))X=Ad\ g^{-1}A(x,\xi g^{-1})(X.g_*^{-1}).$$

Dans le cas d'un fibré trivialisé, on retrouve la 1-forme précédente.

Donnons nous maintenant deux sections s et s' et considérons $\alpha=s^*A$ et $\alpha'=s'^*A$. On définit une application de jauge $\gamma:B\to G$ par $s(x)=s'(x).\gamma(x)$. Les deux formes de connexion α et α' sont liées par:

$$\alpha'=Ad\ \gamma\alpha-d\gamma.\gamma^{-1}$$

i.e.

$$\forall x\in B,\forall X\in T_xB,$$
$$\alpha'(X)=Ad\gamma(x)\alpha(X)-d\gamma(X).\gamma^{-1}(x).$$

En d'autres termes, une connexion sur un fibré trivial Q est une classe d'équivalence de 1-formes sur B à valeurs dans $\mathfrak{g}$, modulo le groupe de jauge des applications de B dans G.

Définition 39. Soit une connexion A sur un fibré E quelconque de base B correspondant à une distribution horizontale H. La courbure R de la connexion A est une 2-forme sur la base B à valeurs dans le fibré vectoriel des champs de vecteurs sur E tangents aux fibres, définie par :

$$\forall x\in B,\forall X,Y\in T_xB,\forall\xi\in E_x,$$
$$R_{X,Y}\xi=A(\xi).[\tilde{X},\tilde{Y}],$$

où $\tilde{X},\tilde{Y}\in H_\xi$ sont des relèvements horizontaux de X et Y.

Proposition 20. *On a :* $d^\nabla \circ d^\nabla = -R^\nabla$.

Exemple 12. *Soit E un fibré vectoriel de base B muni d'une connexion linéaire. Pour $x \in B$ et $X, Y \in T_xB$ fixés, on a :*

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in E_x, \forall \lambda \in \mathbb{K},$$
$$R_{X,Y}(\xi_1 + \lambda \xi_2) = R_{X,Y}(\xi_1) + \lambda R_{X,Y}(\xi_2),$$

de sorte que $R_{X,Y}$ peut être vu comme un endomorphisme de E_x. En particulier si E est le fibré tangent de M, la courbure a pour expression :

$$R_{X,Y}Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z,$$

où X, Y, Z sont des champs de vecteurs sur M.

Définition 40. Soit un connexion linéaire sur le fibré tangent d'une variété banachique M de dérivée covariante ∇. La torsion T^∇ de la connexion est la différentielle covariante $d^\nabla I$ de l'application identité de TM dans TM vue comme 1-forme de M dans TM. Pour tous champs de vecteurs X, Y sur M, on a :

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Définition 41. Soit $\gamma : I \to M$ une courbe sur une variété banachique M, ∇ une connexion sur le fibré tangent TM, et $V : I \to TM$ un champ de vecteur le long de γ. On dit que V est parallèle le long de γ si $\nabla_{\dot\gamma(t)}V(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Proposition 21 (Transport parallèle)**.** *Soit $\gamma : I \to M$ une courbe sur une variété banachique dont le fibré tangent est muni d'une connexion ∇ et $a \in I$ et $V_a \in T_{\gamma(a)}M$. Il existe un unique champ de vecteurs parallèle $V(t)$ le long de γ tel que $V(a) = V_a$.*

2. Variétés banachiques riemanniennes

2.1. **Définition et exemples.**

Définition 42. Soient M une variété banachique réelle (lisse) et g une section du fibré $T'M \odot T'M$ des formes bilinéaires symétriques de TM. On dit que g est une métrique faiblement riemannienne sur M ssi, pour tout $x \in M$, g_x est une application bilinéaire définie positive sur T_xM, i.e. ssi :

- $\mathrm{g}_x(X, X) \geq 0, \forall X \in T_xM$,
- $\mathrm{g}_x(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

Remarque 16. La seconde condition ci-dessus implique en particulier que g_x réalise une injection de T_xM dans T'_xM par :

$$\begin{array}{cccl} \tilde{\mathrm{g}}_x & : & T_xM & \to & T'_xM \\ & & X & \mapsto & \{i_X g_x : Y \mapsto g_x(X, Y)\} \end{array}$$

Définition 43. On dit que g est une métrique fortement riemannienne si $\tilde{\mathrm{g}}_x$ réalise un isomorphisme entre T_xM et T'_xM.

Remarque 17. Si P est un sous-espace vectoriel de l'espace tangent en un point d'une variété banachique faiblement riemannienne, on a :

$$P \subset (P^\perp)^\perp,$$

mais pas égalité, même si P est fermé.

Exemple 13. (1) *Tout espace de Hilbert réel est une variété fortement riemannienne pour la métrique donnée par le produit scalaire.*

(2) *Pour tout* $1 \leq p < 2$ *l'espace de Banach* $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ *muni du produit scalaire :* $\langle (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} \rangle = \Re \sum_{i\in\mathbb{Z}} x_i^* y_i$ *est une variété faiblement riemannienne, non fortement riemannienne.*

(3) *Pour tout* $2 < q \leq +\infty$ *et tout espace muni d'une mesure* m *de masse finie, l'espace de Banach* $\mathcal{L}^q(m)$ *des fonctions mesurables à valeurs complexes telles que* $\|f\|_q = (\int \|f\|^q dm)^{\frac{1}{q}}$ *est finie est une variété faiblement riemanniennne non fortement riemannienne pour le produit scalaire :*

$$\langle f, h \rangle = \Re \int \bar{f} g dm.$$

(4) *Pour tout* $1 \leq p < 2$ *l'espace de Banach* $L^p(H)$ *des opérateurs sur un espace de Hilbert complexe* H *bornés pour la norme* $\|.\|_p$ *est une variété faiblement riemannienne non fortement riemannienne pour le produit scalaire donné par :*

$$\langle A, B \rangle = \Re \; Tr \; A^* B.$$

Définition 44. On dira qu'une variété banachique M modellée sur un espace de Banach E munie d'une métrique faiblement riemannienne g est plate s'il existe en tout point x de M une carte locale dans laquelle la métrique g s'exprime comme un produit scalaire constant sur un ouvert de l'espace modèle E.

Exemple 14. *Les espaces* $l^p(\mathbb{Z})$*,* $\mathcal{L}^q(m)$ *ou* $L^p(H)$ *pour* $1 \leq p < 2$ *et* $2 < q \leq +\infty$ *sont des variétés faiblement banachiques plates.*

2.2. **Connexion de Levi-Civita.**

Proposition 22 (Existence et unicité de la connexion de Levi-Civita)**.** *Étant donnée une variété banachique* M *munie d'une métrique* ***fortement*** *riemannienne* g*, il existe une unique connexion linéaire* D^{g} *sur le fibré tangent* TM *préservant* g *et à torsion nulle. On l'appelle la connexion de Levi-Cevita de* g*.*

□ **Preuve de la proposition** 22 :
Une connexion D^{g} préserve la métrique g ssi pour tous champs de vecteurs X, Y, Z sur M :

$$X.\mathrm{g}(Y, Z) = \mathrm{g}(D^{\mathrm{g}}_X Y, Z) + \mathrm{g}(Y, D^{\mathrm{g}}_X Z).$$

Si de plus la torsion est nulle, on a pour tous champs de vecteurs X, Y sur M :

$$[X, Y] = D^{\mathrm{g}}_X Y - D^{\mathrm{g}}_Y X.$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rl} & X.\mathrm{g}(Y,Z) - Y.\mathrm{g}(Y,Z) - Z.\mathrm{g}(X,Y) \\ = & \mathrm{g}(D^{\mathrm{g}}_X Y, Z) + \mathrm{g}(Y, D^{\mathrm{g}}_X Z) - \mathrm{g}(D^{\mathrm{g}}_Y X, Z) - \mathrm{g}(Y, D^{\mathrm{g}}_Y Z) - \mathrm{g}(D^{\mathrm{g}}_Z X, Y) \\ & -\mathrm{g}(X, D^{\mathrm{g}}_Z Y) \\ = & \mathrm{g}([X,Y],Z) + \mathrm{g}([X,Z],Y) - \mathrm{g}(X,[Y,Z]) - 2\mathrm{g}(X, D^{\mathrm{g}}_Z Y), \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rl} \mathrm{g}(D^{\mathrm{g}}_Z Y, X) = & \frac{1}{2}(Y.\mathrm{g}(X,Z) - X.\mathrm{g}(Y,Z) + Z.\mathrm{g}(X,Y) \\ & +\mathrm{g}([X,Y],Z) + \mathrm{g}([X,Z],Y) - \mathrm{g}(X,[Y,Z])). \end{array}$$

Si g est une métrique fortement riemannienne, toute 1-forme sur M est donnée par le produit scalaire contre un champs de vecteurs et, pour toute fonction différentiable f sur M à valeurs réelles, on peut définir le gradient de f par :

$$\mathrm{g}(\mathrm{grad}(f), X) = df(X) = X.f.$$

En particulier : $X.\mathrm{g}(Y, Z) = \mathrm{g}(\mathrm{grad}(\mathrm{g}(Y, Z)), X)$. D'autre part, la dérivée de Lie de g a pour expression :

$$(\mathcal{L}_Y \mathrm{g})(X, Z) = Y.\mathrm{g}(X, Z) - \mathrm{g}([Y, X], Z) - \mathrm{g}(X, [Y, Z]).$$

On en déduit que :

$$\mathrm{g}(D^{\mathrm{g}}_Z Y, X) = \frac{1}{2}(-\mathrm{g}(\mathrm{grad}(\mathrm{g}(Y,Z)), X) - \mathrm{g}([Y,Z], X) + (\mathcal{L}_Y \mathrm{g})(X,Z) + (\mathcal{L}_Z \mathrm{g})(X,Y).$$

Finalement, en utilisant de nouveau l'isomorphisme de $T'M$ avec TM produit par g et noté $\natural$, on a :

$$D^{\mathrm{g}}_Z Y = \frac{1}{2}(-\mathrm{gradg}(Y,Z) - [Y,Z] + (i_Z \mathcal{L}_Y \mathrm{g})^{\natural} + (i_Y \mathcal{L}_Z \mathrm{g})^{\natural}).$$

L'expression de la dérivée covariante caractérisant de manière univalante la connexion, on en déduit que la connexion de Levi-Civita existe et est unique. □

Remarque 18. Il est à noter que la connexion de Levi-Civita n'existe pas généralement dans le cas faiblement riemannien, en particulier sur les variétés banachiques modellées sur un espace de Banach non isomorphe à son dual.

2.3. **Géodésiques.**

Définition 45. Soit M une variété banachique munie d'une métrique (faiblement) riemannienne g, et γ une courbe différentiable sur M définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. La longueur de γ est définie par :

$$L(\gamma) \ := \int_a^b \sqrt{\mathrm{g}_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}dt.$$

Proposition 23. *Une variété banachique connexe par arcs munie d'une métrique (faiblement) riemannienne est un espace métrique pour la distance définie par :*

$$\forall p, q \in M, d(p,q) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}} L(\gamma),$$

où $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des courbes continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de M joignant les points p et q. En outre la topologie définie par la distance d est la topologie de M.

Définition 46. On dit qu'une courbe γ minimise la longueur entre p et q si $L(\gamma) = d(p,q)$. On appelle géodésique toute courbe $\mathcal{C}^\infty$ $\gamma \ : I \to M$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $\dot\gamma(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$ et telle que γ minimise localement la longueur.

Remarque 19. Pour toute courbe γ définie sur un segment $I := [a,b]$ de $\mathbb{R}$ telle que $\dot\gamma(t) \neq 0$ pour $t \in I$, il existe un reparamétrage $\phi \ : I \to I$ tel que $C \ := \gamma \circ \phi$ vérifie $\|\dot C(t)\| = cst$. En effet, en notant L_γ l'application qui à $t \in I$ associe la longueur de la courbe $\gamma_{|[a,t]}$, la reparamétrisation $\phi = L_\gamma^{-1}$ convient.

Définition 47. On dira qu'une courbe γ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est paramétrée par la longueur si $\|\dot\gamma(t)\| = cst$ pour tout $t \in I$.

Remarque 20. Soit H un espace de Hilbert et γ une géodésique paramétrée par la longueur définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

$$\ddot\gamma(t) = 0 \text{ pour tout } t \in I.$$

En effet, soit $\beta(u,t) \ :]-\varepsilon, \varepsilon[\times I \to H$ une variation de la courbe γ i.e une application $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\beta(0,t) = \gamma(t)$, $\forall t \in I$. La courbe γ minimisant la longueur $L_\gamma([t,t']) = \int_t^{t'} \langle \dot\gamma(s), \dot\gamma(s)\rangle^{\frac{1}{2}} ds$ entre t et t', on a :

$$\delta L_\gamma([t,t']) = \frac{1}{2}\int_t^{t'} \frac{\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u}\beta\right)(0,s), \dot\gamma(s)\rangle}{\langle \dot\gamma(s), \dot\gamma(s)\rangle^{\frac{1}{2}}} ds = 0.$$

Ceci étant vérifié pour tout segment $[t,t'] \subset I$, on en déduit que pour tout $s \in I$ on a :

$$\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u}\beta\right)(0,s), \dot{\gamma}(s)\rangle = 0.$$

En particulier pour toute variation β vérifiant $\langle \dot{\gamma}(s), \frac{\partial}{\partial u}\beta(0,s)\rangle = 0\ \forall s \in I$, on a :

$$\langle \ddot{\gamma}(s), \frac{\partial}{\partial u}\beta(0,s)\rangle = -\langle \dot{\gamma}(s), \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u}\beta(0,s)\rangle = 0 \text{ pour tout } s \in I.$$

De plus, γ étant paramétrée par la longueur, on a :

$$\langle \ddot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)\rangle = 0 \text{ pour tout s} \in I.$$

Soit $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H telle que $e_0 = \dot{\gamma}(t_0)$ pour $t_0 \in I$. Par transport parallèle le long de γ on définit une famille de bases hilbertiennes $\{e_i(s), i \in \mathbb{N}^*\}$ de $\dot{\gamma}(s)^{\perp}$ telles que $e_i(t_0) = e_i$. En outre chaque courbe $s \mapsto e_i(s)$ fournit une variation de γ par :

$$\beta_i(u,s) = \gamma(s) + u e_i(s)$$

vérifiant pour $i \neq 0$: $\langle \dot{\gamma}(s), \frac{\partial}{\partial u}\beta(s)\rangle = 0\ \forall s \in I$, d'où on déduit : $\langle \ddot{\gamma}(s), e_i(s)\rangle = 0$ $\forall s \in I$. Puisque la famille $\{e_i(s), i \in \mathbb{N}^*\} \cup \dot{\gamma}(s)$ est une base hilbertienne de H pour tout $s \in I$, on a bien : $\ddot{\gamma}(s) = 0\ \forall s \in I$.

Proposition 24. *Si M est une variété fortement riemannienne, une courbe γ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une géodésique si et seulement si :*

$$D^g_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = 0 \textit{ pour tout } t \in I.$$

3. Variétés banachiques symplectiques

3.1. Définitions et exemples.

Définition 48. Une 2-forme alternée ω sur une variété banachique M est une forme faiblement symplectique si :

- ω est fermée : $d\omega = 0$
- ω est non dégénérée, i.e. $\forall x \in M$, le noyau de ω_x défini par :

  $$\text{Ker } \omega_x = \{X \in T_xM, \omega_x(X,Y) = 0, \forall Y \in T_xM\}$$

  est nul.

La forme ω est fortement symplectique si de plus l'injection :

$$\begin{array}{cccc} \varphi_x : & T_xM & \to & T'_xM \\ & X & \mapsto & i_X\omega \end{array}$$

est un isomorphisme.

Définition 49. Soit B un espace de Banach, ω une forme bilinéaire continue alternée sur B, et P un sous-espace vectoriel de B. On appelle orthogonal de P pour ω et on note $P^{\perp_\omega}$ le sous-espace vectoriel fermé :

$$P^{\perp_\omega} = \{X \in B \mid \omega(X,Y) = 0, \forall Y \in P\}$$

Remarque 21. Si ω est une forme bilinéaire continue sur B telle que Ker $\omega = \{0\}$, alors pour tous sous-espaces vectoriels P et Q de B, on a :

$$\begin{array}{l} P^{\perp_\omega} = \bar{P}^{\perp_\omega} \\ P \subset Q \Rightarrow Q^{\perp_\omega} \subset P^{\perp_\omega} \\ \bar{P} \subset \left(P^{\perp_\omega}\right)^{\perp_\omega} \end{array}$$

Si ω ne réalise pas d'isomorphisme entre B et son dual alors en général $P \neq (P^{\perp}_{\omega})^{\perp_\omega}$.

Définition 50. Soit P un sous-espace vectoriel d'un espace de Banach B muni d'une forme bilinéaire alternée continue. On dit que P est isotrope si $\omega_{|P}$ est dégénérée, i.e. si $P \cap P^{\perp_\omega} \neq \{0\}$. On dit que P est totalement isotrope si $P \subset P^{\perp_\omega}$.

Exemple 15. (1) *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une base hilbertienne $\{e_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. La 2-forme bilinéaire alternée ω définie par:*

$$\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}, \quad \omega(e_i, e_j) = 0, \quad \omega(f_i, f_j) = 0$$

est une forme fortement symplectique sur H.

(2) *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et $H_{\mathbb{R}}$ l'espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ sous-jacent muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ avec $f_i = \sqrt{-1}e_i$. On notera $B(H_{\mathbb{R}}, R)$ l'espace des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $H_{\mathbb{R}}$ dans lui-même. L'application J dont l'expression dans la base $\mathcal{B}$ est :*

$$J = \begin{pmatrix} O & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} \in B(H_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$$

définit une forme fortement symplectique sur $L^2(H_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ par :

$$\omega_{\mathbb{R}}(A, B) = \ Tr\ (A^T JB),$$

où A^T désigne la transposée de A. Le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in L^2(H_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \right\}$$

est totalement isotrope pour $\omega_{\mathbb{R}}$, et $\omega_{\mathbb{R}}$ se restreint en une forme fortement symplectique sur le sous-espace vectoriel fermé $L^2(H, \mathbb{C})$ (resp. $L^2(H, \bar{\mathbb{C}})$) des formes $\mathbb{C}$-linéaires (resp. $\mathbb{C}$-antilinéaires) d'expression :

$$\forall C, D \in L^2(H, \mathbb{C})(resp. L^2(H, \bar{\mathbb{C}})),$$

$$\omega_{\mathbb{C}}(C, D) = -2\Im\ Tr\ C^* D.$$

(3) *Pour tout $1 \leq p < 2$ l'espace de Banach $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ muni de la 2-forme : $\omega((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = -Im \sum_{i\in\mathbb{Z}} x_i^* y_i$ est une variété faiblement symplectique, non fortement symplectique.*

(4) *Pour tout $2 < q \leq +\infty$ et tout espace muni d'une mesure m de masse finie, l'espace de Banach $\mathcal{L}^q(m)$ des fonctions mesurables à valeurs complexes telles que $\|f\|_q = (\int \|f\|^q dm)^{\frac{1}{q}}$ est finie est une variété faiblement symplectique, non fortement symplectique pour la 2-forme définie par :*

$$\omega(f, h) = -\Im \int \bar{f} g dm.$$

(5) *Pour tout $1 \leq p < 2$ l'espace de Banach $L^p(H)$ des opérateurs sur un espace de Hilbert complexe H bornés pour la norme $\|.\|_p$ est une variété faiblement symplectique non fortement symplectique pour la 2-forme définie par :*

$$\omega(A, B) = -\Im\ Tr\ A^* B.$$

3.2. **La structure symplectique canonique d'un cotangent.**

Proposition 25. *Soit M une variété banachique et $T'M$ le fibré cotangent dont la fibre en un point $x \in M$ est le dual* ***continu*** *de l'espace tangent en x. Alors $T'M$ est une variété banachique naturellement munie d'une forme faiblement symplectique, appelée 2-forme de Liouville.*

□ **Preuve de la proposition** 25 :

. La variété banachique $T'M$ est naturellement munie d'une 1-forme, la 1-forme de Liouville θ, définie pour tout (x, ξ) de $T'M$ et tout vecteur tangent Z à $T'M$ en (x, ξ) par:

$$\theta_{(x,\xi)}(Z) := \xi(\pi_*(Z)),$$

où π est la projection naturelle de $T'M$ sur M.

. La 2-forme de Liouville Ω est, par définition, la différentielle de θ. C'est donc une 2-forme alternée fermée.

. Pour montrer que Ω est non-dégénérée, il suffit de raisonner dans une carte locale, ce qui permet de se ramener au cas où M est un espace de Banach. Dans ce cas, l'expression de la 1-forme de Liouville est la suivante:

$$\forall (x, \xi) \in T'M, \forall (Z, \eta) \in T_xM \oplus T'_xM,$$
$$\theta_{(x,\xi)}(Z, \eta) = \xi(Z) = \xi(\pi_*(Z, \eta)).$$

On en déduit l'expression de la 2-forme Ω suivante:

$$\forall (x, \xi) \in T'M, \forall (Z_1, \eta_1), (Z_2, \eta_2) \in T_{(x,\xi)}(T'M) = T_xM \oplus T'_xM,$$

$$\begin{aligned}\Omega_{(x,\xi)}((Z_1, \eta_1), (Z_2, \eta_2)) &= d\theta_{(x,\xi)}((Z_1, \eta_1), (Z_2, \eta_2)) \\ &= (Z_1, \eta_1).\xi(Z_2) - (Z_2, \eta_2).\xi(Z_1) - \xi([Z_1, Z_2]) \\ &= \eta_1(Z_2) + \xi(Z_1.Z_2) - \eta_2(Z_1) - \xi(Z_2.Z_1) \\ &\quad -\xi([Z_1, Z_2]) \\ &= \eta_1(Z_2) - \eta_2(Z_1).\end{aligned}$$

Soit $(x, \xi) \in T'M$ et (Z_1, η_1) un élément du noyau de $\Omega_{(x,\xi)}$. Pour tout $(Z, \xi) \in T_xM \oplus T'_xM$, on a :

$$\eta_1(Z) - \xi(Z_1) = 0,$$

en particulier pour tout $Z \in T_xM$, on a $\eta_1(Z) = 0$ donc $\eta_1 = 0$, et pour tout $\eta \in T'_xM$ on a $\eta(Z_1) = 0$ ce qui implique que $Z_1 = 0$ par l'injection de T_xM dans son bidual. Ainsi Ω est non dégénérée. □

Remarque 22. Si M est une variété banachique modellée sur un espace de Banach B réflexif, alors la forme symplectique de Liouville de $T'M$ est fortement symplectique. En effet, pour $(x, \xi) \in T'M$, considérons l'injection :

$$\begin{array}{cccc}\tilde{\Omega}_{(x,\xi)} : & T_{(x,\xi)}T'M = T_xM \oplus T'_xM & \longrightarrow & T'_{(x,\xi)}(T'M) = T'_xM \oplus T''_xM \\ & (Z_1, \eta_1) & \longmapsto & ((Z, \eta) \mapsto \eta_1(Z) - \eta(Z_1))\end{array}$$

Si $B'' = B$, cette application est surjective car pour tout $(\eta_1, \phi) \in T'_xM \oplus T''_xM$, il existe $Z_1 \in T_xM$ tel que ϕ soit l'évaluation en Z_1 et ainsi :$\forall (Z, \eta) \in T_xM \oplus T'_xM$,

$$(\eta_1, \phi)(Z, \eta) = \eta_1(Z) + \phi(\eta) = \eta_1(Z) - \eta(-Z_1) = \tilde{\Omega}_{(x,\xi)}(-Z_1, \eta_1)(Z, \eta).$$

Par conséquent $\tilde{\Omega}$ est une bijection continue de l'espace de Banach $T_{(x,\xi)}(T'M)$ dans son dual et est donc bicontinue.

3.3. La structure symplectique canonique d'une orbite coadjointe.

Proposition 26. *Soit G un groupe de Lie banachique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $\theta_\xi \subset \mathfrak{g}'$ l'orbite coadjointe d'un élément $\xi \in \mathfrak{g}'$. Si l'algèbre de Lie du stabilisateur de ξ est fermée dans $\mathfrak{g}$ et possède un supplémentaire topologique, alors θ_ξ possède une structure naturelle de variété banachique faiblement symplectique, dont la forme symplectique est appelée forme de Kirillov-Kostant-Souriau.*

□ **Preuve de la proposition** 26 :

. Il vient:

$$\begin{aligned}g.\xi \circ \mathrm{ad}\mathfrak{a}(\mathfrak{b}) &= g.\xi([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]) = \xi(g^{-1}[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]g) \\ &= \xi([g^{-1}\mathfrak{a}g, g^{-1}\mathfrak{b}g]) = \xi \circ \mathrm{ad}(g^{-1}\mathfrak{a}g)(g^{-1}\mathfrak{b}g).\end{aligned}$$

Ainsi on a: $g.\xi \circ \mathrm{ad}\mathfrak{a} = \xi \circ \mathrm{ad} g^{-1}\mathfrak{a} g \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})$ et :

$$\begin{array}{ll} T_{g.\xi}\theta_\xi & := \{g.\xi \circ \mathrm{ad}\mathfrak{a}, \mathfrak{a} \in \mathfrak{g}\} \\ & = \{\xi \circ \mathrm{ad}\mathfrak{c} \circ \mathrm{Ad}g^{-1}, \mathfrak{c} \in \mathfrak{g}\}. \end{array}$$

On en déduit que la fermeture et l'existence d'un supplémentaire fermé de $T_\xi\theta_\xi$ dans $\mathfrak{g}'$ implique la fermeture et l'existence d'un supplémentaire fermé de $T_{g.\xi}\theta_\xi$ dans $\mathfrak{g}'$, et permet de définir sur θ_ξ une structure de sous-variété banachique de $\mathfrak{g}'$.
. L'application $\Omega_{g.\xi}$ qui à $\eta_1 = g.\xi \circ \mathrm{ad}\mathfrak{a}$ et $\eta_2 = g.\xi \circ \mathrm{ad}\mathfrak{b}$ de $T_{g.\xi}\theta_\xi$ associe :

$$\Omega(\eta_1, \eta_2) \ := g.\xi([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]),$$

est bien définie sur $T_{g.\xi}\theta_\xi$. En effet, si $\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b}'$ sont tels que $g.\xi \circ \mathrm{ad}\mathfrak{a} = g.\xi \circ \mathrm{ad}\mathfrak{a}'$ et $g.\xi \circ \mathrm{ad}\mathfrak{b} = g.\xi \circ \mathrm{ad}\mathfrak{b}'$, alors $g.\xi \circ \mathrm{ad}(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}') = 0$, $g.\xi \circ \mathrm{ad}(b - b') = 0$ et :

$$\begin{array}{ll} g.\xi([\mathfrak{a}', \mathfrak{b}']) & = g.\xi([\mathfrak{a} + (\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}), \mathfrak{b} + (\mathfrak{b}' - \mathfrak{b})]) \\ & = g.\xi([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]) + g.\xi \circ \mathrm{ad}(\mathfrak{a}' - \mathfrak{a})(\mathfrak{b}) \\ & - g.\xi \circ \mathrm{ad}(\mathfrak{b}' - b)(a) + g.\xi \circ \mathrm{ad}(\mathfrak{a}' - \mathfrak{a})(\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}) \\ & = g.\xi([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]). \end{array}$$

De plus Ω est alternée.
. Ω est fermée car si $\eta_i = g.\xi \circ \mathrm{ad}\mathfrak{a}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, sont trois vecteurs tangents à l'orbite en $g.\xi$, on a :

$$\begin{array}{ll} d\Omega(\eta_1, \eta_2, \eta_3) & = \eta_1.\Omega(\eta_2, \eta_3) - \eta_2.\Omega(\eta_1, \eta_3) + \eta_3.\Omega(\eta_1, \eta_2) \\ & -\Omega([\eta_1, \eta_2], \eta_3) + \Omega([\eta_1, \eta_3], \eta_2) - \Omega([\eta_2, \eta_3], \eta_1) \end{array}$$

Or :

$$\begin{array}{ll} \eta_1.\Omega(\eta_2, \eta_3) & = \eta_1.g\xi([\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3]) \\ & = \mathrm{ad}^*_{\mathfrak{a}_1}(g\xi)([\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3]) = g\xi([\mathfrak{a}_1, [\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3]]), \end{array}$$

et : $[\eta_1, \eta_2] = g\xi([\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2])$. Ainsi :

$$d\Omega(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = 2g.\xi([\mathfrak{a}_1, [\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3]] - [\mathfrak{a}_2, [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3]] + [\mathfrak{a}_3, [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2]]),$$

qui est nul d'après l'identité de Jacobi. Ainsi $d\Omega = 0$.
. Ω est non dégénérée car pour $\eta_1 = g.\xi \circ \mathrm{ad}\mathfrak{a}$, l'égalité $\Omega(\eta_1, \eta) = 0$ pour tout $\eta \in T_{g.\xi}\theta_\xi$ équivaut à : $g.\xi([a, b]) = 0$ pour tout $\mathfrak{b} \in \mathfrak{g}$ c'est-à-dire $\eta_1 = 0$.
Ainsi Ω définit une forme faiblement symplectique sur θ_ξ. □

3.4. **Exemples de $Gr^{(p)}$ et Gr_{res}.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $Gr^{(p)}$ la grassmannienne des p-plans d'un espace de Hilbert H. Pour $p = 1$, $Gr^{(1)}$ désigne l'espace projectif de H.

Proposition 27. *Soit P_0 un sous-espace vectoriel de dimension p de référence et $P_0^\perp$ son orthogonal dans H. Soit ε l'élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(H)$ du groupe unitaire de H défini par :*

$$\varepsilon \ := ipr_{P_0},$$

où pr_{P_0} désigne la projection orthogonale sur P_0. Alors $Gr^{(p)}$ s'identifie à l'orbite adjointe de ε dans $\mathfrak{u}(H)$ et possède une structure naturelle de variété symplectique.

□ **Preuve de la proposition** 27 :
Soit :

$$\begin{array}{llll} \phi : & Gr^{(p)} & \to & \mathfrak{u}(H) \\ & P & \mapsto & i\mathrm{pr}_P. \end{array}$$

ϕ est injective et $U(H)$-équivariante pour l'action naturelle de $U(H)$ sur $Gr^{(p)}$ et l'action adjointe de $U(H)$ sur $\mathfrak{u}(H)$:

$$\begin{array}{ll} \phi(g.P) & = i\mathrm{pr}_{g.P} \\ & = ig\mathrm{pr}_P g^{-1}. \end{array}$$

L'image de $d\phi$ s'identifie à $\mathfrak{u}(H)/\text{Stab}\varepsilon = \mathfrak{u}(U)/(\mathfrak{u}(P_0)\times\mathfrak{u}(P_0^\perp)) = T_\varepsilon\theta_\varepsilon$ et ϕ définit un difféomorphisme $\tilde{\phi}$ de $Gr^{(p)}$ sur l'orbite θ_ε de ε dans $\mathfrak{u}(H)$ dont l'application tangente en $P = g.P_0 \in Gr^{(p)}$ est donnée par :

$$\begin{array}{cccc} d\tilde{\phi}_P : & T_P Gr^{(p)} = L(P, P^\perp) & \longrightarrow & T_{g\varepsilon g^{-1}}\theta_\varepsilon \\ & A & \longmapsto & \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P & P^\perp \end{array} \\ & \left(\begin{array}{cc} 0 & -A^* \\ A & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} P \\ P^\perp \end{array} \end{array} . \end{array}$$

L'espace P_0 étant de dimension finie, l'application :

$$\begin{array}{cccc} f_\varepsilon : & \mathfrak{u}(H) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & \text{Tr}\ \varepsilon A \end{array}$$

est bien définie et est une forme linéaire continue sur $\mathfrak{u}(H)$. La trace identifie l'orbite adjointe de ε avec l'orbite coadjointe de $\text{Tr}\ \varepsilon$ et le pull-back par $\tilde{\phi}$ de ($-\frac{1}{2}$ fois) la forme de Kirillov- Kostant- Souriau est la 2-forme fortement symplectique $\Omega_{Gr^{(p)}}$ dont l'expression en P est : $\forall A, B \in L(P, P^\perp)$,

$$\begin{array}{rl} \Omega_{Gr^{(p)},P}(A,B) & = -\frac{1}{2}\ \text{Tr} \left(\begin{array}{cc} i & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \left[\left(\begin{array}{cc} 0 & -A^* \\ A & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 0 & -B^* \\ B & 0 \end{array}\right) \right] \\ & = -\Im\ \text{Tr}\ A^*B. \end{array}$$

□

Remarque 23. Pour $p = 1$, on appelle forme symplectique de Fubini-Study la forme fortement symplectique sur l'espace projectif d'un espace de Hilbert ainsi obtenue.

Proposition 28. *La grassmanienne restreinte relative à la décomposition d'un espace de Hilbert H en somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels fermés H_+ et H_- de dimension infinie, définie par :*

$$\begin{array}{rl} Gr_2(H) = \{P \in Gr(H) | & p_+ \ : P \to H_+ \in Fred(H_+, H_-), \\ & p_- \ : W \to H_- \in L^2(H_+, H_-)\}, \end{array}$$

est une variété fortement symplectique pour la 2-forme définie par :

$$\forall P \in Gr_2(H), \forall A, B \in L^2(P, P^\perp),$$
$$\omega_P(A, B) := -\Im\ Tr\ A^*B.$$

□ **Preuve de la proposition** 28 :
Le seul point délicat est de montrer que ω est fermée. Pour cela rappelons que $Gr_2(H)$ s'injecte dans l'espace projectif $\mathbb{P}(l^2(\mathcal{S}))$ par l'injection de Plücker, où $\mathcal{S} = \{S \subset \mathbb{Z}, \sharp(S - \mathbb{N}) < \infty, \sharp(\mathbb{N} - S) < \infty\}$. De plus, la forme symplectique ω est le pull-back de la forme symplectique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}(l^2(\mathcal{S}))$. Elle est donc fermée. □

3.5. **Le Théorème de Darboux.** Étant donnée une variété banachique (M, ω) faiblement symplectique, on dira que la structure symplectique ω est intégrable si pour tout $x \in M$ il existe une carte locale $(\mathcal{U}, \Phi, E)$ en x dans laquelle la forme symplectique ω de M s'exprime comme une forme symplectique constante sur l'ouvert $\Phi(\mathcal{U})$ de l'espace de Banach modèle E. Dans le cas de la dimension finie, le théorème de Darboux affirme que la fermeture de ω implique son intégrabilité. Ce théorème ne se généralise pas aux variétés banachiques faiblement symplectiques mais reste valable dans le cas d'une variété fortement symplectique :

Théorème 9 (Darboux)**.** *Soit ω une forme fortement symplectique sur une variété banachique M. La condition $d\omega = 0$ est équivalente à l'existence en tout point $x \in M$ d'une carte locale $(\mathcal{U}, \Phi, E)$ dans laquelle ω s'exprime comme une forme symplectique constante sur l'ouvert $\Phi(\mathcal{U}) \subset E$.*

■ **Preuve du théorème** 9 :
Le problème étant local, il suffit de supposer que M est un ouvert d'un espace de Banach E. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de 0 dans E et ω_0 la valeur de ω en 0. Il s'agit de trouver un difféomorphisme de $\mathcal{V}$, Φ, tel que $\Phi^*\omega = \omega_0$. Pour tout $x \in \mathcal{V}$, on considère dans l'espace vectoriel des formes bilinéaires alternées le segment joignant ω_x à ω_0, et on note : $\omega_x(t) = \omega_0 + t(\omega_x - \omega_0)$. Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in M$, $\omega_x(t)$ est fermée. D'autrepart, $\mathrm{Isom}(E,E')$ étant un ouvert de l'espace de Banach $B(E,E')$, il existe une boule $B(\omega_0, r)$ centrée en ω_0 et de rayon r entièrement contenue dans $\mathrm{Isom}(E,E')$. Puisque l'application :

$$\begin{array}{cccc} \Psi & : & E & \longrightarrow & B(E,E') \\ & & x & \longmapsto & (Z \mapsto i_Z\omega_x) \end{array}$$

envoie 0 sur ω_0 et est continue, il existe une boule $B(0,\delta)$ centrée en $0 \in E$ telle que $\Psi(B(0,\delta)) \subset B(\omega_0, r)$. Pour tout $x \in B(0,\delta)$, le segment $[\omega_0, \omega_x]$ est contenu dans $B(\omega_0, r)$ et est donc formé de formes non dégénérées. Une forme fermée sur $B(0,\delta)$ étant exacte, il existe une 1-forme σ sur $B(0,\delta)$ telle que :

$$d\sigma = \omega - \omega_0.$$

Puisque pour $x \in B(0,\delta)$, $\omega_x(t) \in \mathrm{Isom}(E,E')$ quel que soit $t \in [0,1]$, il existe un champ de vecteurs dépendant du temps X_t sur $B(0,\delta)$ tel que :

$$i_{X_t}\omega_t = -\sigma.$$

Soit ϕ_t le flot du champ de vecteurs X_t partant de $\phi_0 = \mathrm{Id}$. On a :

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{dt}_{|t_0}(\phi_t^*\omega_t) & = \phi_{t_0}^*(\mathcal{L}_{X_{t_0}}\omega_{t_0} + \frac{d}{dt}_{|t_0}\omega_t) \\ & = \phi_t^*(di_{X_{t_0}}\omega_{t_0} + i_{X_{t_0}}\omega_{t_0} + \omega - \omega_0) \\ & = \phi_{t_0}^*(-d\sigma + d\sigma) = 0. \end{array}$$

Ainsi l'application : $t \mapsto \phi_t^*\omega_t$ est constante. Comme $\phi_0 = \mathrm{Id}$, on a : $\phi_0^*\omega_1 = \omega_1$, $\phi_0^*\omega_0 = \omega_0$ et $\phi_1^*\omega_1 = \phi_0^*\omega_0 = \omega_0$, ainsi ϕ est un difféomorphisme qui convient. ■

3.6. **Application moment.**

Définition 51. Soit (M,ω) une variété banachique faiblement symplectique et G un groupe de Lie banachique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agissant sur M par symplectomorphismes, i.e. tel que $\forall g \in G$, $g_*\omega = \omega$. Une application $\mu\ : M \to \mathfrak{g}'$ est une application moment pour l'action de G si :

$$\forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{g}, \forall x \in M, \forall X \in T_xM,$$

$$\langle d\mu_x(X), \mathfrak{a}\rangle = i_{X^{\mathfrak{a}}}\omega(X),$$

où $\langle , \rangle$ est le produit de dualité entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$, et $X^{\mathfrak{a}}$ est le champ de vecteurs engendré par l'action infinitésimale de l'élément $\mathfrak{a}$ de l'algèbre de Lie de G.

Proposition 29. *Soit θ une orbite coadjointe d'un groupe de Lie banachique G. Alors l'injection canonique μ de θ dans $\mathfrak{g}'$ est une application moment pour l'action coadjointe de G sur θ.*

□ **Preuve de la proposition** 29 :
On a pour tout élément ξ de l'orbite θ, pour tout $\eta = -\xi \circ \mathrm{ad}\mathfrak{b}$ de $T_\xi\theta$, et tout $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$:

$$\begin{array}{ll} \langle d\mu(\eta), \mathfrak{a}\rangle & = \langle \eta, \mathfrak{a}\rangle = -\xi \circ \mathrm{ad}\mathfrak{b}(\mathfrak{a}) \\ & = \xi([\mathfrak{a},\mathfrak{b}]) = \Omega(\xi^{\mathfrak{a}}, \eta) = i_{\xi^{\mathfrak{a}}}\Omega(\eta). \end{array}$$

4. Variétés banachiques presque-complexes

4.1. Définitions.

Définition 52. Une structure presque-complexe sur une variété banachique réelle M est la donnée d'une section $\mathcal{C}^\infty$ J du fibré $\mathrm{End}(TM)$ des endomorphismes de l'espace tangent telle que $\forall x \in M$, $J_x^2 = -1$.

Définition 53. Une structure presque-complexe J sur une variété banachique M est dite intégrable si en tout point $x \in M$, il existe une carte locale $(\mathcal{U}, \phi, E)$ où $\mathcal{U}$ est un voisinage ouvert de x, E un espace de Banach complexe et ϕ un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur un ouvert de E vérifiant :

$$d\phi \circ J = id\phi.$$

Définition 54. Une structure presque-complexe J sur une variété banachique M est dite formellement intégrable si le tenseur de Nijenhuis défini par

$$N_x(X, Y) = \frac{1}{4}([X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY])$$

pour tout x appartenant à M et tous X, Y appartenant à T_xM, est nul.

4.2. Le Théorème de Newlander-Nirenberg.

Dans la cas d'une structure presque-complexe analytique réelle sur une variété analytique réelle, le théorème de Newlander-Nirenberg ([NN]) est équivalent au théorème de Frobenius, est reste donc valable dans le cadre banachique. Nous donnons ci-dessous les grandes lignes de la démonstration, que le lecteur retrouvera dans l'article de J-P. Penot ([Pen]) et nous renvoyons le lecteur à l'article de D. Beltita ([Bel]) pour les détails.

Remarquons également qu'un exemple de structure presque-complexe formellement intégrable sur une variété banachique réelle qui ne possède pas d'ouvert biholomorphique à un ouvert d'un espace de Banach complexe est donné par I. Patyi dans [Pat], ce qui implique que le théorème de Newlander-Nirenberg n'est pas vrai en toute généralité dans le cadre banachique, et constitue une différence importante avec le cas de la dimension finie.

Théorème 10 (Newlander-Nirenberg)**.** *Une structure presque-complexe analytique réelle J sur une variété banachique analytique réelle M est intégrable si et seulement si le tenseur de Nijenhuis est nul.*

■ **Preuve du théorème** 10 :
Soit $J^{\mathbb{C}}$ l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de J au fibré vectoriel complexe $T^{\mathbb{C}}M := TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, et $T^{(1,0)}M$ (resp. $T^{(0,1)}M$) le sous-fibré de $T^{\mathbb{C}}M$ constitué des espaces propres de $J^{\mathbb{C}}$ relativement à la valeur propre $+i$ (resp. $-i$). On a : $T^{\mathbb{C}}M = T^{(1,0)}M \oplus T^{(0,1)}M$ en somme directe topologique, les projections pr_1 et pr_2 sur le premier et deuxième facteur étant données par :

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{pr}_1 & : & T^{\mathbb{C}}M & \to & T^{(1,0)}M \\ & & X & \mapsto & \frac{1}{2}(X - iJX) \\ \mathrm{pr}_2 & : & T^{\mathbb{C}}M & \to & T^{(0,1)}M \\ & & X & \mapsto & \frac{1}{2}(X + iJX) \end{array}$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} N \equiv 0 \quad & \Leftrightarrow [T^{(1,0)}M, T^{(1,0)}M] \subset T^{(1,0)}M \\ & \Leftrightarrow [T^{(0,1)}M, T^{(0,1)}M] \subset T^{(0,1)}M. \end{aligned}$$

Le problème étant local on peut supposer que M est un ouvert d'un espace de Banach E. Soit $x_0 \in M$ et $M^{\mathbb{C}}$ l'ouvert de l'espace de Hilbert complexifié $E^{\mathbb{C}}$ formé des éléments de la forme $x + iy$ avec $x, y \in M$. D'après le théorème de Frobenius, pour tout x dans un voisinage de x_0 de $M^{\mathbb{C}}$, il existe localement des sous-variétés $\mathcal{M}_x^{(1,0)}$ et $\mathcal{M}_x^{(0,1)}$ de $M^{\mathbb{C}}$ respectivement tangentes aux distributions $T^{(1,0)}M$ et $T^{(0,1)}M$. L'opérateur $J^{\mathbb{C}}$ laissant les distributions $T^{(1,0)}M$ et $T^{(0,1)}M$ invariantes, on en déduit qu'il existe un difféomorphisme $J^{\mathbb{C}}$-équivariant envoyant un voisinage de x_0 dans $M^{\mathbb{C}}$ sur le produit d'un ouvert de $\mathcal{M}_{x_0}^{(1,0)}$ et d'un ouvert de $\mathcal{M}_{x_0}^{(0,1)}$. Puisque la projection pr_1 est un isomorphisme $J^{\mathbb{C}}$-linéaire, on en déduit l'existence d'un difféomorphisme local $J^{\mathbb{C}}$-équivariant de la variété réelle M sur un ouvert de la variété complexe $\mathcal{M}_{x_0}^{(1,0)}$.

4.3. **Fonctions analytiques et holomorphes sur un espace de Banach.**

Définition 55. Un polynôme homogène de degré q sur un espace de Banach E (réel ou complexe) à valeur dans un espace de Banach F est la restriction à la diagonale d'une fonction q-linéaire de E^q dans F.

Définition 56. Une fonction f d'un ouvert de E dans F est analytique si pour tout x de E, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de x et une série convergeante de la forme:

$$\sum_{q=0}^{+\infty} P_q,$$

où les P_q sont des polynômes homogènes de degré q de E dans F, avec rayon de convergence $R > 0$ tels que pour tout y dans l'intersection de $\mathcal{V}$ avec la boule de rayon R centrée en x, on a:

$$f(y) = \sum_{q=0}^{+\infty} P_q(y - x).$$

Dans ce cadre, la formule de Cauchy, le principe du maximum, le lemme de Schwarz et l'unicite du prolongement analytique sont valables. On trouvera dans le livre de T. Franzoni et E. Vesentini ([FV]) quelques détails sur cette théorie.

4.4. **La connexion de Chern.**

Définition 57. Soit (M, J) une variété banachique presque-complexe. L'opérateur J induit un opérateur de carré -1 sur les n-formes différentielles sur M, également noté J, et défini par :

$$\begin{aligned} &\forall \phi \in \Gamma(M, \Lambda^n T'M), \forall x \in M, \forall X_1, \dots, X_n \in T_xM, \\ &(J\phi)_x(X_1, \dots, X_n) \ := (-1)^n \phi(JX_1, \dots, JX_n), \end{aligned}$$

d'inverse :

$$(J^{-1}\phi)_x(X_1, \dots, X_n) = \phi(JX_1, \dots, JX_n),$$

ainsi qu'un opérateur différentiel d^c sur les formes différentielles sur M défini par :

$$d^c \ := J \circ d \circ J^{-1}.$$

Définition 58. Soit C l'opérateur agissant sur les formes différentielles par :

$$\begin{aligned} &\forall \phi \in \Lambda^n T'M, \forall X_1, \dots, X_n \in \Gamma(TM), \\ &C\phi(X_1, \dots, X_n) \ := \sum_{j=1}^{n} \phi(X_1, \dots, JX_j, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Une forme différentielle ϕ de degré n est dite de type (p, q) si $C\phi = (p - q)i\phi$. On note $\Lambda^{p,q}M$ l'ensemble des formes de type (p, q). On a :

$$\Lambda^n T'M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \sum_{\substack{p+q=n \\ p \geq 0, q \geq 0}} \Lambda^{p,q} M.$$

En particulier, le fibré $T'M \otimes \mathbb{C}$ se décompose en :

$$T'M \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{(1,0)}M \oplus \Lambda^{(0,1)}M,$$

où $\Lambda^{(1,0)}M$ (resp. $\Lambda^{(0,1)}M$) est le sous-fibré de $T'M \otimes \mathbb{C}$ constitué des sous-espaces propres de J pour la valeur propre $-i$ (resp. $+i$).

Définition 59. Soit M un ouvert d'un espace de Banach réel B muni d'un opérateur J de carré -1, $M^{\mathbb{C}}$ l'ouvert de l'espace de Banach $B^{\mathbb{C}}$ obtenu à partir de B en étendant le corps des scalaires à $\mathbb{C}$, $J^{\mathbb{C}}$ l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de J, et $x \in M$. En notant pr_1 (resp. pr_2) la projection de $T_xM^{\mathbb{C}}$ sur $T_x^{(1,0)}M$ (resp. $T_x^{(0,1)}M$) associant à un vecteur tangent X le vecteur $\frac{1}{2}(X - iJ^{\mathbb{C}}X)$ (resp. $\frac{1}{2}(X + iJ^{\mathbb{C}}X)$, on définit deux opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ agissant sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M à valeurs complexes par :

$$\begin{aligned} \partial f &= d^{\mathbb{C}}f \circ \mathrm{pr}_1, \\ \bar{\partial} f &= d^{\mathbb{C}}f \circ \mathrm{pr}_2, \end{aligned}$$

où $d^{\mathbb{C}}f$ est l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de df. En particulier, on a :

$$\begin{aligned} &d = \partial + \bar{\partial}, \\ &\partial\bar{\partial} = \tfrac{1}{2i} dd^c, \\ &\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0, \\ &\partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial = 0. \end{aligned}$$

Définition 60. Une structure pré-holomorphe sur un fibré vectoriel complexe E au-dessus d'une variété complexe M est la donnée d'un opérateur différentiel $\bar{\partial}$ d'ordre 1 agissant sur les sections de E et à valeurs dans les sections de $\Lambda^{(1,0)}M \otimes_{\mathbb{C}} E$, i.e. tel que : $\forall \sigma \in \Gamma(E), \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M, C)$,

$$\bar{\partial}(f.\sigma) = f.\bar{\partial}\sigma + \bar{\partial}f.\sigma,$$

On note $d^{\bar{\partial}}$ l'opérateur différentiel induit par $\bar{\partial}$ sur les formes différentielles :

$$d^{\bar{\partial}} \ : \ \Lambda^{p,q}M \ \to \ \Lambda^{p,q+1}M$$

Définition 61. Une structure pré-holomorphe $\bar{\partial}$ est dite formellement intégrable si

$$d^{\bar{\partial}} \circ d^{\bar{\partial}} = 0.$$

Définition 62. Un fibré vectoriel complexe sur une variété complexe M est dit holomorphe s'il existe un ensemble complet de trivialisations holomorphes.

Le théorème de Newlander-Nirenberg dans le cas analytique a pour conséquence le théorème suivant:

Théorème 11 (Koszul-Malgrange)**.** *Un fibré vectoriel complexe E sur une variété complexe M, muni d'une structure pré-holomorphe $\bar{\partial}$ et possédant un ensemble complet de trivialisations analytiques réelles, est un fibré holomorphe si et seulement si :*

$$d^{\bar{\partial}} \circ d^{\bar{\partial}} = 0.$$

Théorème 12. *Soit E un fibré vectoriel complexe sur une variété complexe M muni d'un produit scalaire hermitien h réalisant pour tout $x \in M$ un isomorphisme $\mathbb{C}$-antilinéaire entre l'espace vectoriel complexe E_x et son dual E'_x, et $\bar{\partial}$ une structure pré-holomorphe sur E. Alors il existe une unique connexion ∇ sur le fibré E, appelée* ***connexion de Chern****, telle que :*

(1) $\nabla \ : \Gamma(E) \to \Gamma(T'M \otimes_{\mathbb{C}} E)$ *est $\mathbb{C}$-linéaire,*
(2) ∇ *préserve h,*
(3) $\forall \sigma \in \Gamma(E)$, $\forall X \in TM$, $\nabla_X^{0,1}\sigma \ := \frac{1}{2}(\nabla_X\sigma + i\nabla_{JX}\sigma) = \bar{\partial}_X\sigma.$

■ **Preuve du théorème** 12 :
Soit $\tau\ : E \to E'$ l'isomorphisme $\mathbb{C}$-antilinéaire induit par h, et $\bar{\partial}^{E'}$ la structure pré-holomorphe sur E' induite par $\bar{\partial}$:

$$\forall s \in \Gamma(E'), \forall x \in \Gamma(E),$$

$$\bar{\partial}^{E'}(s)(x) = \bar{\partial}(s(x)) - s(\bar{\partial}x).$$

Alors la connexion définie par :

$$\nabla = \bar{\partial} + \tau^{-1} \circ \bar{\partial}^{E'} \circ \tau$$

convient. ■

Proposition 30. *Si E est un fibré complexe de rang 1, muni d'une structure pré-holomorphe formellement intégrable $\bar{\partial}$ sur une variété complexe M et σ une section locale sans zéro vérifiant $\bar{\partial}\sigma = 0$, l'expression de la connexion de Chern est :*

$$\nabla_X \sigma = (\partial_X \log h(\sigma, \sigma)) .\sigma,$$

pour tout X appartenant à TM, et pour toute section σ de E. La courbure de la connexion de Chern a pour expression :

$$R^{\nabla} = \partial\bar{\partial} \log h(\sigma, \sigma) = \frac{1}{2i} dd^c \log h(\sigma, \sigma).$$

□ **Preuve de la proposition** 30 :
. Soit σ une section locale de E dans le noyau de $\bar{\partial}$ et ne s'annulant pas. Soit s la section duale du fibré E' définie par : $s(\sigma) = 1$. On a :

$$\bar{\partial}^{E'} s = \bar{\partial}(s(\sigma)) - s(\bar{\partial}\sigma) = 0.$$

L'application $\tau\ : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ a pour expression :

$$\forall \sigma' \in \Gamma(E), \tau(\sigma') = h(\sigma', \sigma).s,$$

ainsi :

$$\bar{\partial}^{E'} \tau(\sigma) = \bar{\partial}^{E'} h(\sigma, \sigma).s = \bar{\partial} h(\sigma, \sigma).s,$$

et :

$$\nabla\sigma = \partial\sigma = \tau^{-1} \circ \bar{\partial}^{E'} \tau(\sigma) = \tfrac{1}{h(\sigma,\sigma)} \partial h(\sigma, \sigma).\sigma = \partial \log h(\sigma, \sigma).\sigma.$$

. On a :

$$\begin{aligned} R^{\nabla} = &\ -d^{\nabla} \circ d^{\nabla} \\ &= -d^{\partial} \circ d^{\partial} - d^{\bar{\partial}} \circ d^{\bar{\partial}} - d^{\partial} \circ d^{\bar{\partial}} - d^{\bar{\partial}} \circ d^{\partial}. \end{aligned}$$

La structure pré-holomorphe étant formellement intégrable, on a :

$$d^{\bar{\partial}} \circ d^{\bar{\partial}} = 0,$$

ce qui implique :

$$d^{\partial} \circ d^{\partial} = \tau^{-1} \circ d^{\bar{\partial}} \circ d^{\bar{\partial}} \circ \tau = 0.$$

Ainsi la courbure R^{∇} est de type $(1, 1)$, et pour toute section σ dans le noyau de $\bar{\partial}$ il vient :

$$\begin{aligned} R\sigma &= -d^{\partial} \circ d^{\bar{\partial}}\sigma - d^{\bar{\partial}} \circ d^{\partial}\sigma \\ &= -d^{\partial}(\bar{\partial}\sigma) - d^{\bar{\partial}}(\partial \log h(\sigma, \sigma).\sigma) \\ &= -\partial\bar{\partial} \log h(\sigma, \sigma).\sigma - \partial \log h(\sigma, \sigma).\bar{\partial}\sigma \\ &= -\bar{\partial}\partial \log h(\sigma, \sigma).\sigma \\ &= +\partial\bar{\partial} \log h(\sigma, \sigma).\sigma. \end{aligned}$$

□

5. Variétés banachiques kählériennes

5.1. Définitions et exemples.

Définition 63. Une variété banachique faiblement (resp. fortement) kählérienne M est une variété banachique réelle munie d'une métrique faiblement (resp. fortement) riemannienne g, d'une forme faiblement (resp. fortement) symplectique ω et d'une structure presque-complexe formellement intégrable J telles que : $\forall x \in M, \forall X, Y \in T_xM$,

$$\begin{aligned} \omega(X,Y) &= \mathrm{g}(JX,Y), \\ \mathrm{g}(JX,JY) &= \mathrm{g}(X,Y). \end{aligned}$$

Proposition 31. *Soit (M, g, ω, J) une variété fortement kählérienne. Alors $D^gJ = 0$ où D^g désigne la connexion de Levi-Civita.*

□ **Preuve de la proposition** 31 :
On a : $\forall x \in M, \forall X, Y, Z \in T_xM$,

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y,Z) &= \mathrm{g}(D_XJY,Z) + \mathrm{g}(JY,D_XZ) - \mathrm{g}(D_YJX,Z) \\ &\quad -\mathrm{g}(JX,D_YZ) + \mathrm{g}(D_ZJX,Y) + \mathrm{g}(JX,D_ZY) \\ &\quad -\mathrm{g}(J[X,Y],Z) + \mathrm{g}(J[X,Z],y) - \mathrm{g}(J[Y,Z],X) \\ &= \mathrm{g}((D_XJ)Y,Z) + \mathrm{g}(ID_XY,Z) + \mathrm{g}(JY,D_XZ) \\ &\quad -\mathrm{g}((D_YJ)X,Z) - \mathrm{g}(JD_YX,Z) - \mathrm{g}(JX,D_YZ) \\ &\quad +\mathrm{g}((D_ZJ)X,Y) + \mathrm{g}(JD_ZX,Y) + \mathrm{g}(JX,D_ZY) \\ &\quad -\mathrm{g}(J[X,Y],Z) + \mathrm{g}(J[X,Z],Y) - \mathrm{g}(J[Y,Z],X) \\ &= \mathrm{g}((D_XJ)Y,Z) - \mathrm{g}((D_YJ)X,Z) + \mathrm{g}((D_ZJ)X,Y). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} d\omega(X,JY,Z) &= \mathrm{g}((D_XJ)JY,Z) - \mathrm{g}((D_{JY}J)X,Z) + \mathrm{g}((D_ZJ)X,JY) \\ d\omega(JX,Y,Z) &= \mathrm{g}((D_{JX}J)Y,Z) - \mathrm{g}((D_YJ)JX,Z) + \mathrm{g}((D_ZJ)JX,Y). \end{aligned}$$

D'autrepart :

$$\begin{aligned} N(X,Y) &= [X,Y] + J[X,JY] + J[JX,Y] - [JX,JY] \\ &= D_XY - D_YX + JD_XJY - JD_{JY}X + JD_{JX}Y \\ &\quad -JD_YJX - D_{JX}JY + D_{JY}JX \\ &= -(D_XJ)(JY) + (D_YJ)(JX) + (D_{JY}J)(X) - (D_{JX}J)(Y), \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathrm{g}(N(X,Y),Z) = &\ -\mathrm{g}((D_XJ)(JY),Z) + \mathrm{g}((D_YJ)(JX),Z) \\ &+\mathrm{g}((D_{JY}J)X,Z) - \mathrm{g}((D_{JX}J)Y,Z). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &d\omega(X,JY,Z) + d\omega(JX,Y,Z) + \mathrm{g}(N(X,Y),Z) \\ &= \mathrm{g}((D_ZJ)X,JY) + \mathrm{g}((D_ZJ)(JX),Y) \\ &= \mathrm{g}(D_Z(JX),JY) - \mathrm{g}(JD_ZX,JY) - \mathrm{g}(D_ZX,Y) - \mathrm{g}(JD_Z(JX),Y) \\ &= 2\mathrm{g}(D_Z(JX),JY) - 2\mathrm{g}(JD_ZX,JY) \\ &= 2\mathrm{g}((D_ZJ)X,JY), \end{aligned}$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega = 0 \\ N \equiv 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow DJ \equiv 0.$$

□

Proposition 32. *Soit (M, g) une variété fortement riemannienne et J une section de $End(TM)$ telle que :*

- $g(JX, JY) = g(X, Y)$
- $J^2 = -1$
- $D^gJ \equiv 0.$

Alors la 2-forme ω définie par $\omega(.,.) := g(J.,.)$ est une forme fortement symplectique sur M et (M,g,ω,J) est une variété kählérienne.

□ **Preuve de la proposition** 32 :
En effet :

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y,Z) &= X.\mathrm{g}(JY,Z) - Y.\mathrm{g}(JX,Z) + Z.\mathrm{g}(JX,Y) \\ &-\mathrm{g}(J[X,Y],Z) + \mathrm{g}(J[X,Z],Y) - \mathrm{g}(J[Y,Z],X) \\ &= \mathrm{g}(D_X JY,Z) + \mathrm{g}(JY,D_X Z) - \mathrm{g}(D_Y JX,Z) \\ &-\mathrm{g}(JX,D_X Z) + \mathrm{g}(D_Z JX,Y) + \mathrm{g}(JX,D_Z Y) \\ &-\mathrm{g}(J[X,Y],Z) + \mathrm{g}(J[X,Z],Y) - \mathrm{g}(J[Y,Z],X) \\ &= \mathrm{g}(JY,D_X Z) - \mathrm{g}(JX,D_Y Z) + \mathrm{g}(D_X JZ,Y) \\ &+\mathrm{g}(JX,D_Z Y) - \mathrm{g}(D_Y JZ,X) + \mathrm{g}(D-ZJY,X) \\ &= \mathrm{g}(JY,D_X Z) - \mathrm{g}(JX,D_Y Z) + \mathrm{g}(JD_X Z,Y) \\ &\mathrm{g}(JX,D_Z Y) - \mathrm{g}(JD_Y Z,X) + \mathrm{g}(JD_Z Y,X) = 0, \end{aligned}$$

et :

$$N(X,Y) = -(D_X J)(JY) + (D_Y J)(JX) + (D_{JY} J)(X) - (D_{JX} J)(Y) = 0.$$

□

Exemple 16. (1) *Soit H un espace de Hilbert complexe, $\langle,\rangle$ le produit scalaire hermitien. H muni de $g := \Re\langle,\rangle$ et $\omega := -\Im\langle,\rangle$ et de la structure complexe i est une variété fortement kählérienne.*

(2) *Pour tout $1 \leq p < 2$, l'espace de Banach $l^p(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ muni des structures g,ω, et J définies par : $\forall (x_i)_{i\in\mathbb{N}},(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{Z},\mathbb{C})$,*

$$\begin{aligned} g((x_j)_{j\in\mathbb{N}},(y_j)_{j\in\mathbb{N}}) &:= \Re\textstyle\sum_{j\in\mathbb{N}} \bar{x}_j y_j \\ \omega((x_j)_{j\in\mathbb{N}},(y_j)_{j\in\mathbb{N}}) &:= -\Im\textstyle\sum_{j\in\mathbb{N}} \bar{x}_j y_j \\ J(x_j)_{j\in\mathbb{N}} &:= (ix_j)_{j\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

est une variété faiblement kählérienne, non fortement kählérienne.

(3) *Pour tout $2 < q \leq +\infty$ et tout espace muni d'une mesure de masse finie m, l'espace de Banach $\mathcal{L}^q(m)$ muni des structures g,ω, et J définies par : $\forall f,g \in \mathcal{L}^q(m)$,*

$$\begin{aligned} g(f,g) &:= \Re\textstyle\int \bar{f} g dm \\ \omega(f,g) &:= -\Im\textstyle\int \bar{f} g dm \\ Jf &= if \end{aligned}$$

est une variété faiblement kählérienne, non fortement kählérienne.

(4) *Pour tout $1 \leq p < 2$ l'espace de Banach $L^p(H)$ muni des structure g,ω, et J définies par : $\forall A,B \in L^p(H)$,*

$$\begin{aligned} g(A,B) &:= \Re\ Tr\ A^*B \\ \omega(A,B) &:= -\Im\ Tr\ A^*B \\ JA &:= iA \end{aligned}$$

est une variété faiblement kählérienne, non fortement kählérienne.

(5) *Pour $p < +\infty$, la grassmannienne $Gr^{(p)}$ des p-plans d'un espace de Hilbert H munie de : $\forall A,B \in T_P Gr^{(p)} = L(P,P^\perp)$,*

$$\begin{aligned} g(A,B) &:= \Re\ Tr\ A^*B \\ \omega(A,B) &:= -\Im\ Tr\ A^*B \\ JA &:= iA \end{aligned}$$

est une variété fortement kählérienne.

(6) *La grassmanienne restreinte $Gr_2(H)$ d'un espace de Hilbert polarisé :* $H = H_+ \oplus H_-$ *munie de :* $\forall A, B \in T_P Gr^{(p)} = L^2(P, P^\perp)$,

$$\begin{aligned} g(A,B) &:= \Re\ Tr\ A^*B \\ \omega(A,B) &:= -\Im\ Tr\ A^*B \\ JA &:= iA \end{aligned}$$

est une variété fortement kählérienne.

5.2. Potentiel kählérien.

Définition 64. Une fonction réelle ϕ sur une variété kählérienne $(M, \mathrm{g}, \omega, J)$ est un potentiel kählérien si $\omega = dd^c\phi$.

Exemple 17. *Soit H un espace de Hilbert vu comme une variété kählérienne, les définitions de g, ω, J étant celles du paragraphe précédent. Alors un quart de la norme induite par le produit scalaire hermitien est un potentiel kählérien sur H. En effet :* $\forall x \in H, \forall X, Y \in T_xH$,

$$d\langle x, x\rangle(X) = \langle X, x\rangle + \langle x, X\rangle,$$

$$d^c\langle x, x\rangle(X) = -2\Re\langle JX, x\rangle,$$

et :

$$\begin{aligned} dd^c\langle x, x\rangle(X, Y) &= -2\Re\langle JY, X\rangle + 2\Re\langle JX, Y\rangle \\ &= -4\Im\langle X, Y\rangle. \end{aligned}$$

Proposition 33. *Soit M une variété kählérienne muni d'un potentiel kählérien ρ globalement défini et G un groupe de Lie agissant sur M en préservant ρ et la structure complexe J. Alors l'action de G possède une application moment G-équivariante μ avec, pour tout x dans M, et tout $\mathfrak{a}$ dans Lie(G) $=: \mathfrak{g}$:*

$$\mu_x^{\mathfrak{a}} = -d_x^c\rho(X^{\mathfrak{a}}) = d_x\rho(JX^{\mathfrak{a}}),$$

où $X^{\mathfrak{a}}$ est le champs de vecteurs induit par l'action de l'élément $\mathfrak{a}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

□ **Preuve de la proposition** 33 :
Puisque G préserve J et ρ, pour tout $g \in G$, on a :

$$\begin{aligned} \mu_{g.x}^{\mathfrak{a}} &= d_{g.x}\rho(J_{g.x}X^{\mathfrak{a}}(g.x)) \\ &= d_{g.x}\rho(J_{g.x}g.X^{g^{-1}\mathfrak{a}g}(x)) \\ &= d_{g.x}\rho(g.J_xX^{g^{-1}\mathfrak{a}g}(x)) \\ &= d_x\rho(J_xX^{g^{-1}\mathfrak{a}g}) \\ &= \mu_x^{\mathrm{Ad}(g^{-1})(\mathfrak{a})}. \end{aligned}$$

Ainsi μ est G-équivariante. De plus :

$$\begin{aligned} d\mu_x^{\mathfrak{a}} &= -di_{X^{\mathfrak{a}}}d^c\rho \\ &= i_{X^{\mathfrak{a}}}dd^c\rho - \mathcal{L}_{X^{\mathfrak{a}}}d^c\rho \\ &= i_{X^{\mathfrak{a}}}\omega. \end{aligned}$$

□

6. Variétés banachiques hyperkählériennes

6.1. Définitions et exemples.

Définition 65. Une variété banachique faiblement (resp. fortement) hyperkählérienne M est une variété banachique munie d'une métrique faiblement (resp. fortement) riemannienne g et de deux structures complexes I_1 et I_2 telles que :

- $I_1 \circ I_2 = -I_2 \circ I_1$
- $\mathrm{g}(I_jX, I_jY) = \mathrm{g}(X, Y)$, $j = 1, 2$.

- $\omega_j := g(I_j.,.)$ est fermée.

On appelle formes de Kähler les formes symplectiques ω_i, $i \in \{1,2\}$.

Remarque 24. L'endomorphisme $I_3 := I_1 \circ I_2$ est aussi une structure complexe sur M et plus généralement pour tout $a \in S^2$, $a = (a_1, a_2, a_3)$ avec $\sum a_i^2 = 1$, l'endomorphisme $I_a := \sum a_i I_i$ est une structure complexe sur M compatible avec g. Ainsi une variété hyperkählérienne possède une famille de structures kählériennes paramétrée par S^2.

Remarque 25. L'espace tangent d'une variété hyperkählérienne M est muni d'une action des quaternions, et $\forall x \in M$, T_xM est un $\mathbb{H}$-espace vectoriel.

Proposition 34. *Une variété symplectique complexe (M, I_1, Ω) munie d'une métrique kählérienne g relativement à I_1 est hyperkählérienne de formes de Kähler $\omega_1(.,.) := g(I_1.,.)$, $\omega_2 := \Re\Omega$ et $\omega_3 := \Im\Omega$ ssi l'endomorphisme I_2 défini par :*

$$\omega_3(X,Y) := \Im\Omega(X,Y) = \omega_1(I_2X, Y)$$

vérifie $(I_2)^2 = -1$.

Lemme 4. *Soit M une variété réelle munie de deux structures symplectiques réelles, ω_1 et ω_3, et d'une structure presque-complexe I_2 telle que $\omega_3(X,Y) = \omega_1(I_2X,Y)$. Alors I_2 est intégrable.*

$\triangle$ **Preuve du lemme** 4 :
Il suffit de montrer que le crochet de deux vecteurs de types $(1,0)$ est de type $(1,0)$. Or :

$$\begin{aligned} I_2X = iX \quad &\Leftrightarrow \omega_3(X,Y) = \omega_1(iX,Y) = i\omega_1(X,Y) \forall Y \in TM \\ &\Leftrightarrow i_X\omega_3 = i.i_X\omega_1. \end{aligned}$$

Ainsi il suffit de montrer que pour tous vecteurs X et Y de type $(1,0)$, $i_{[X,Y]}\omega_3 = i.i_{[X,Y]}\omega_1$. Or :

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]}\omega_3 \quad &= i_{\mathcal{L}_XY}\omega_3 = \mathcal{L}_X(i_Y\omega_3) - i_Y\mathcal{L}_X\omega_3 \\ &= \mathcal{L}_X(i.i_Y\omega_1) - i_Y\mathcal{L}_X(\omega_3) \\ &= i.\mathcal{L}_X(i_Y\omega_1) - i_Y(i_X \circ d\omega_3 + di_X\omega_3) \\ &= i.\mathcal{L}_X(I_Y\omega_1) - i.i_Y(di_X\omega_1) \\ &= i.(\mathcal{L}_X(i_Y\omega_1) - i_Y\mathcal{L}_X\omega_1) \\ &= i.(i_{[X,Y]}\omega_1). \end{aligned}$$

$\triangle$

$\square$ **Preuve de la proposition** 34 :
D'après le lemme 4, I_2 est intégrable. La fermeture de Ω implique la fermeture de $\omega_2 := \Re\Omega$ et $\omega_3 := \Im\Omega$ et :

$$\begin{aligned} &\Omega(I_1X,Y) + \Omega(X,I_1Y) = 2i\Omega(X,Y) \\ &\Rightarrow g(I_2I_1X,Y) + g(I_2X,I_1Y) = -2g(I_1I_2X,Y) \\ &\Leftrightarrow g(I_2I_1X,Y) = -g(I_1I_2X,Y) \\ &\Rightarrow I_1I_2 = -I_2I_1. \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 18. (1) $\mathbb{H}$ *et tout* $\mathbb{H}$*-espace vectoriel de dimension finie est une variété hyperkählérienne.*
(2) *Si H est un espace de Hilbert, alors l'espace cotangent de H, $T'H$, muni de la structure complexe naturelle I_1 et de la forme symplectique de Liouville Ω est une variété hyperkählérienne. En notant $*$ la dualité entre H et H',*

on a : $\forall (X,\xi),(Y,\eta)\in T'H$,

$$
\begin{aligned}
&\Omega((X,\xi),(Y,\eta)) = \xi(Y)-\eta(X)\\
&g((X,\xi),(Y,\eta)) = \Re(\langle X,Y\rangle + \langle \xi,\eta\rangle)\\
\\
&\omega_1((X,\xi),(Y,\eta)) = -\Im(\langle X,Y\rangle + \langle \xi,\eta\rangle)\\
&\omega_2((X,\xi),(Y,\eta)) = \Re(\langle \xi^*,Y\rangle - \langle X^*,\eta\rangle)\\
&\omega_3((X,\xi),(Y,\eta)) = \Im(\langle \xi^*,Y\rangle - \langle X^*,\eta\rangle)\\
\\
&I_1(X,\xi) = (iX,i\xi)\\
&I_2(X,\xi) = (\xi^*,-X^*)\\
&I_3(X,\xi) = (i\xi^*,-iX^*)
\end{aligned}
$$

6.2. **Potentiel hyperkählérien.**

Définition 66. Un potentiel hyperkählérien sur une variété hyperkählérienne $(M,\mathrm{g},I_1,I_2,I_3)$ est une fonction réelle ϕ sur M qui est une potentiel kählérien pour chacune des structures complexes.

Exemple 19. *Sur un $\mathbb{H}$-espace vectoriel V de dimension finie, la fonction ϕ définie sur V par :*

$$\phi(x) \ := \frac{1}{4}\|x\|^2$$

où $\|.\|$ est la norme induite par le produit scalaire euclidien $\langle .,.\rangle$ de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ sous-jacent, est un potentiel hyperkählérien. En effet, $\forall x\in V$, $\forall X\in V$, $\forall i\in\{1,2,3\}$:

$$d_x\phi(X) = \frac{1}{2}\Re\langle x,X\rangle,$$

ainsi :

$$d_x^{c_i}\phi(X) = -\frac{1}{2}\Re\langle x,I_iX\rangle,$$

et :

$$
\begin{aligned}
(dd^{c_i}\phi)_x(X,Y) &= -\tfrac{1}{2}X.\Re\langle x,I_iY\rangle + \tfrac{1}{2}Y.\Re\langle x,I_iX\rangle\\
&= -\tfrac{1}{2}\Re\langle X,I_iY\rangle + \tfrac{1}{2}\Re\langle Y,I_iX\rangle\\
&= \Re\langle I_iX,Y\rangle = -\Im\langle X,Y\rangle.
\end{aligned}
$$

References

[Ada] Adams, J.F. *Lectures on Lie Groups*, Mathematics Lecture Note Series, (**1969**).

[Adl] Adler, M. *On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries type equations*, Inv. Math. **50**, n^o **3**, (**1979**), 219-248.

[AG] Alvarez-Gaume, L.; Gomez, C. *Loop groups, grassmanians and string theory*, Physics Letters B, Vol. **190**, n^o **1, 2**, 21 mai **1987**, 55-62.

[AK] Arnold, V.I.; Khesin, B.A. *Topological methods in hydrodynamics*, Springer, New York, (**1998**).

[AMR] Abraham, R.; Marsden, J.E.; Ratiu, T. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Second Edition, Applied Mathematical Sciences **75**, Springer-Verlag (**1983**)

[Bal] Balachandran, V.K. *Simple L^*-algebras of classical type*, Math. Ann. **180**, (**1969**), 205-219.

[Bea] Beals, R. ; Sattinger, D.H.; Szmigielski, J. *Acoustic Scattering and the extended Korteweg-de Vries Hierarchy*, Advances in Math. **140**, (**1998**), 190-206.

[Beau] Beauzamy, B. *Introduction to Banach spaces and their geometry*, North-Holland (**1983**).

[Bel] Beltiţă, D. *Integrability of almost complex structures on Banach manifolds*, arXiv:math.DG/0407395v1 23 Jul **2004**.

[Biq] Biquard, O. *Sur les équations de Nahm et la structure de Poisson des algèbres de Lie semi-simples complexes*, Math. Ann. **304**, n^o 2, (**1996**), 253-276.

[BG1] Biquard, O.; Gauduchon, P. *Hyperkähler metrics on cotangent bundles of Hermitian Symmetric spaces*, Geometry and Physics, *Lect. notes Pure Appl. Math.* Serie **184**, Marcel Dekker (**1996**), 287-298.

[BG2] Biquard, O.; Gauduchon, P. *La métrique hyperkählérienne des orbites coadjointes de type symétrique d'un groupe de Lie complexe semi-simple*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **323**, série **I** (**1996**), 1259-1264.

[BG3] Biquard, O.; Gauduchon, P. *Géométrie hyperkählérienne des espaces hermitiens symétriques complexifiés*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble, Vol **16** (**1998**), 127-173.

[Bis] Bismut, J-M. *From Quillen metrics to Reidemeister metrics : some aspects of the Ray-Singer analytic torsion*, Topological methods of Modern Mathematics, (Stony-Brooks, NY, **1991**), 273–324.

[Bou] Bourbaki, N. *Variétés différentielles et analytiques* , Éléments de Mathématiques, Fascicule de résultats, paragraphes **1-7**, Hermann, (**1967**).

[Bou2] Bourbaki, N. *Topologie Générale*, Éléments de Mathématiques, chap **1-4**, Masson, (**1990**).

[Bou3] Bourbaki, N. *Groupes et Algèbres de Lie*, Éléments de Mathématiques, chap **4-5-6**, Masson (**1981**).

[BR] Bowick, M.J.; Rajeev, S.G. *String theory as the Kähler Geometry of Loop Space*, Physical Rev. Letters **58**, (**1987**), n^o **6**, 535-53.

[Bre] Brezis, H. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Dunod, (**1999**).

[Bry] Brylinsky, J-L. *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*, Progress in Mathematics, **107**, Birkäuser (**1992**).

[Bur] Burns, D. *Some examples of the twistor construction*, Contributions to several complex variables : in honor of Wilhelm Stoll, Vieweg (**1986**), 51-67.

[Cal] Calabi, E. *Métriques kählériennes et fibrés holomorphes*, Ann. Ec. Norm. Sup. **12** (**1979**), 269-294.

[Car] Cartan, H. *Cours de Calcul Différentiel*, Hermann Paris, Collection Méthodes, (**1977**).

[CH] Camassa, R.; Holm, D.D. *An Integrable Shallow Water Equation with Peaked Solitons*, Physical Reviews Letters **71**, (**1993**), 1661-1664.

[Con1] Constantin, A. *The Hamiltonian Structure of the Camassa-Holm Equation*, Expo. Math **15**, (**1997**), 53-85.

[Con2] Constantin, A.; Kolev, B. *On the geometric approach to the motion of inertial mechanical systems*, J. Physics A :Math. Gen. **35**, (**2002**), R51-R79

[CMG] Cuenca Mira, J. A.; Garcia Martin, A.; Martin Gonzalez, C. *Structure theory of L^*-algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **107** (**1990**), 361-365.

[DG] Gelfand, I. M. and Dickii, L. A. *Fractional Powers of operators and Hamiltonian Systems*, Moscow State University. Translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, Vol. **10**, n^o **4**, 13-29, (**1976**).

[Die] Diestel, J. *Geometry of Banach spaces : selected topics*, Springer (**1975**).

[Din] Dineen, S. *Complex analysis on infinite dimensional spaces*, monograph, (**1999**) Springer.

[Dic] Dickey, L. A. *On Segal-Wilson's definition of the τ-function and the hierarchies AKNS-D and mcKP*, Babelon, Olivier (ed.) et al., Integrable systems: the Verdier memorial conference. Actes du colloque international de Luminy, France, July 1-5, **1991**.

[DN] Dorfmeister, J.; Nakajima, K. *The fundamental conjecture for homogeneous Kähler manifolds*, Acta Math. **161**, (**1988**), 23-70.

[Dru] Drucker, D. *Exceptional Lie algebras and the structure of Hermitian symmetric spaces*, Memoirs of the American Mathematical Society, Vol **16**, Issue 1, n^o **208**, (sept **1978**).

[Ebe] Eberlein, P. B. *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds*, Chicago Lectures in Mathematics (**1996**).

[EK] van Est, W. T.; Korthagen, Th.J. *Non-enlargible Lie algebras*, Proc. Kon. Ned. Acad. v. Wet. A **67** (**1964**), 15-31.

[Eke] Ekeland, I. *The Hopf-Rinow theorem in infinite dimension*, J. Differential Geometry, **13**, (**1978**), 287-301.

[Fei] Feix, B. *Hyperkähler Metrics on cotangent Bundles*, A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the University of Cambridge, (**1999**).

[Fok] Fokas, A. S. *On a class of physically important integrable equations*, Physica D **87** (**1995**), 145-150.

[FV] Franzoni, T.; Vesentini, E. *Holomorphic Maps and Invariant Distances*, North-Holland, Mathematics Studies **40** (**1980**).

[Gau] Gauduchon, P. *Connexions linéaires, classes de Chern, théorème de Riemann-Roch*, Birkhäuser, Ed. Lafontaine.

[GH] Griffiths, P. ; Harris, J. *Principles of algebraic geometry*, reprint of the **1978** original. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. xiv+813 pp. ISBN: 0-471-05059-8 14-01

[Gib] Gibbons, G.W.; Rychenkova, P. *Hyperkähler Quotient Construction of BPS Monopole Moduli Spaces*, Comm.Math.Phys. **186**, (**1997**), n^o **3**, 581-599.

[Ha] Harris, A. *some applications of variational calculus in Hermitian geometry*, Geometric analysis and applications to quantum field theory (Adelaide, 1998/1999), 95–117, Progr. Math., **205**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, **2002**.

[Har1] de la Harpe, P. *Classification of simple real L^*-algèbras*, Univ. of Warwick, July **1990**.

[Har2] de la Harpe, P. *Classification des L^*-algèbres semi-simples réelles séparables*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A **272** (**1971**), 1559-1561.

[Hel] Helgason, S., *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, (**1962**).

[HH] Helminck, G.; Helminck, A. *The structure of Hilbert flag varieties*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **30**, n^o **3**, (**1994**), 401-441.

[Hit] Hitchin, N.J. ; Karlhede, A. ; Lindström, U. and Roček,M. *Hyperkähler Metrics and Supersymmetry*, Commun. Math. phys. **108**, (**1987**), 535-589.

[Hj] Harris, J. *algebraic geometry. A first course.* Corrected reprint of the 1992 original. Graduate Texts in Mathematics, **133**. Springer-Verlag, New York, **1995**. xx+328 pp. ISBN: 0-387-97716-3 14-01

[HL] Hirsch, F.; Lacombe, G. *Éléments d'analyse fonctionnelle, cours et exercices avec réponses*, Dunod, (**1997**).

[HS] Hunter, J.K.; Saxton, R. *Dynamics of Director Fields*, SIAM J. Appl. Math. Vol. **51**, n^o **6**, **1991**, 1498-1521.

[Kac] Kac, V.G. *Infinite Dimensional Lie Algebras*, Progress in Mathmatics, Edited by J. Coates and S. Helgason, Birkhäuser, **1983**.

[Kal] Kaledin, D. *Hyperkähler structures on total spaces of holomorphic cotangent bundles*, Quaternionic structures in mathematics and physics (Rome, **1999**), 195-230.

[Kau1] Kaup, W. *Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds*, Math. Ann. **228**, (**1977**), 39-64.

[Kau2] Kaup, W. *Über die Klassifikation der symmetrischen hermiteschen Mannigfaltigkeiten unendlicher Dimension I, II*, Math. Ann. **257**, (**1981**), 463-486, **262**, (**1983**), 57-75.

[Kh1] Khesin, B. A. *A Poisson-Lie Framework for Rational Reductions of the KP Hierarchy*, Letters in Math. Phys. Vol. **58**, (**2001**), 101-107.

[Kh2] Khesin, B. A. *Informal complexification and Poisson structures on moduli spaces*, AMS Transl., Ser. **2**, vol,. **180**, (**1997**), 147-155.

[Kir1] Kirillov, A. A. *Infinite Dimensional Lie groups ; their orbits, invariants and Representations. The Geometry of Moments*, Lectures Notes in math. springer-Verlag **970**, (**1982**), 101-123.

[Kir2] Kirillov, A. A. *Orbits of the group of Diffeomorphisms of a circle and local Lie Superalgebra*, Funct. Anal. Appl. **15**, (**1981**), 135-136.

[Kirw] Kirwan, F. *Momentum maps and reduction in algebraic geometry*, J. Diff. Geom. Appl. **9**, n^o **1,2**, (**1998**), 135-171.

[Kirw2] Kirwan, F. *Cohomology of moduli spaces*, Li, Ta Tsien (ed.) et al., Proceedings of the international congress of mathematicians, ICM 2002, Beijing, China, August 20-28, 2002. Vol. I: Plenary lectures and ceremonies. Beijing: Higher Education Press; Singapore: World Scientific/distributor. 363-382 (**2002**).

[Kirw3] Kirwan, F. *Cohomology of quotients in symplectric and algebraic geometry*, Princeton University Press, 1984, 210p.

[KLS] Kajiwara, J.; Li, Z.; Shon, K.H. *finite or infinite dimensional complex analysis*, Lectures notes in pures and applied mathematics, Vol. **214**.

[KM] Khesin, B. A.; Misiolek, G. *Euler equations on homogeneous spaces and Virasoro orbits*, to appear in Adv. Math.

[Kov] Kovalev, A.G. *Nahm's equation and complex adjoint orbits*, Quart. J. Math., **47**, 41-58.

[KR] Khesin, B.; Rosly A. *Symplectic Geometry on moduli Spaces of Holomorphic Bundles over complex surfaces*, Proceedings of the Arnoldfest, Fields Institute Communications, v. **24**, (**1999**), 311-323.

[Kri1] Krichever, I.M. *Integration of nonlinear Equations by Methods of Algebraic Geometry*, Funct. Anal. Appl. **11** (1), (**1977**), 12-26.

[Kri2] Krichever, I.M. *Linear operators with consistent coefficients and rational reductions of KP hierarchy*, Physica D, **87** (**1995**), 14-19.

[Kro1] Kronheimer, P.B. *A Hyper-kählerian structure on coadjoint orbits of a semisimple complex group*, J. London Math. Soc. (2) **42**, (**1990**), 193-208.

[Kro2] Kronheimer, P.B. *Instantons and the geometry of the nilpotent variety*, J. Differential Geometry **32**, (**1990**), 473-490.

[Kro3] Kronheimer, P.B. *A hyperkähler structure on the cotangent bundle of a complex Lie group*, Archiv:math.DG/0409253 (june **1988**).

[KS] Kobak, P.Z.; Swann, A. *quaternionic geometry of a nilpotent variety*, Math. Ann. **297**, (**1993**), 747-764.

[Kui1] Kuiper, N.H., *Varietés hilbertiennes: aspects géométriques.* (French) Suivi de deux textes de Dan Burghelea. Séminaire de Mathématiques Supérieures, n^o **38** (Été, **1969**). Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Que., 1971, 153 pp.

[Kui2] Kuiper, N.H., *Differential geometry*, Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society (Twentieth Annual Summer Research Institute), held at Stanford University, Stanford, Calif., July 30–August 17, 1973. Edited by S. S. Chern and R. Osserman. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. XXVII, Part 1. American Mathematical Society, Providence, R.I., **1975**. x+451.

[Kui3] Kuiper, N.H., Colloque International sur l'Analyse et la Topologie Différentielle. (French) Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, No. 210, Strasbourg, du 20 au 29 juin 1972. Organisateurs: J. Cerf, G. Glaeser et C. Godbillon. 1972: Année du centenaire de la Société Mathématique de France. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 23 (1973), no. 2. Institut Fourier, Institut de Mathématiques Pures, Université de Grenoble I, Saint-Martin-d'Hères, 1973. xvi+235.

[Kum] Kumar, S. *Kac-Moody Groups, their Flag Varieties and Representation Theory*, Progress in Mathematics 204, Birkhäuser, (**2002**).

[KW] Kupershmidt, B.A.; Wilson, G. *Modifying Lax Equations and the Second Hamiltonian Structure*, Invent. math. **62**, (**1981**), 403-436

[KY] Kirillov, A.A.; Yur'ev, D.V. *Kähler Geometry of the Infinite-Dimensional Homogeneous Space $M = Diff_+(S^1)/Rot(S^1)$*, Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, Vol **21**, n^o **4**, 35-46.

[KZ] Khesin, B.A.; Zakharevich, I. *Poisson-Lie group of pseudodifferential symbols*, Commun. Math. Phys. **171**, n^o **3**, (**1995**), 475-530.

[Lan] Lang, S. *Differential manifolds*, Addison- Wesley Publishing Company, Inc. (**1972**).

[Lem] Lempert, L. *Loop spaces as complex manifolds*, Journal of Differential Geometry **38**, (**1993**), 519-543.

[Lie] Séminaire Sophus Lie, *Théorie des algèbres de Lie*, École normale supérieure, Paris, **1955**.

[Loo] Loomis, L.H. *An introduction to Abstract Harmonic Analysis*, The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Company, Inc. **1953**.

[Loos1] Loos, O. *Symmetric Spaces I: General Theory* Mathematics Lecture Note Series, (**1969**).

[Loos2] Loos, O. *Symmetric Spaces II: Compact Spaces and Classification* Mathematics Lecture Note Series, (**1969**).

[LT] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L. *On the complemented subspaces problem* Israel Journal Math. **9**, (**1971**), 263-269.

[Mic] Mickelsson, J. *Current algebras and groups*, New York: Plenum Press, **1989**.

[Mis] Misiolek, G. *Classical Solutions of the periodic Camassa-Holm equation*, GAFA, Geom. funct. anal. Vol. **12** (**2002**), 1080-1104.

[Miu] Miura, R.M. *The Korteweg-de Vries Equation : a survey of results*, SIAM Review, Vol. **18**, n^o **3**, (**1976**)

[Mos] Mostow, G.D. *Some new decomposition theorems for semi-simple groups*, Mem. Amer. Math. Soc. 1955 (**1955**), n^o **14**, 31-54.

[MR] Marsden, J.E.; Ratiu, T. *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, **1999**.

[Mul1] Mulase, M. *Solvability of the super KP equation and a generalization of the Birkhoff decomposition*, Inv.Math. **92** (**1988**), 1-46.

[Mul2] Mulase, M. *Complete Integrability of the Kadomtsev-Petviashvili Equation*, Adv. Math. **54**, (**1984**), 57-66.

[MW1] Marsden, J.E.; Weinstein, A. *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Rep. Math. Phys. **5** (**1974**), 121-130.

[MW2] Marsden, J.E.; Weinstein, A. *Comments on the history, theory, and applications of the symplectic reduction*, Progress. Math **198** (**2001**) Springer.

[MW3] Marsden, J.E.; Weinstein, A. *The Hamiltonian Structure of the Maxwell-Vlasov equations*, Physica **4D**, (**1982**), 394-406.

[Nee1] Neeb, K-H. *Infinite-dimensional groups and their representations*, Lie theory, 213-328, Progr. Math., **228**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, **2004**.

[Nee2] Neeb, K-H. *Highest weight representations and infinite-dimensional Kähler manifolds*, Recent advanceds in Lie theory (Vigo, 2000), 367-392, Res. Exp. Math., **25**, Heldermann, Lemgo, **2002**.

[Nee3] Neeb, K-H. *Nancy Lecture Notes on infinite-Dimensional Lie Groups*

[Nee4] Neeb, K-H. *Classical Hilbert-Lie groups, their extension and their homotopy groups*, Geometry and analysis on finite- and infinite-dimensional Lie groups, 87-151, Banach Center Publ., **5**5, Polish Acad. Sci., Warsaw, **2002**.

[Neh] Neher, E. *Generators and relations for 3-graded Lie algebras*, J. Algebra **155**, (**1993**), 1-35.

[NN] Newlander, A.; Nirenberg, L. *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Annals of Math. Vol. **65**, n^o **3**, (May **1957**).

[OdRa] Odzijewicz, A; Ratiu, T. S. *Banach-Lie Poisson spaces and reduction*, Comm. Math. Phys. **243** (**2003**), n^o **1**, 1-54.

[OrRa] Ortega, J-P; Ratiu, T. S. *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction*, Progress in Mathematics, Vol. **222**, Birkhäuser, **2004**.

[Ott] Ottesen, J. T. *Infinite Dimensional Groups and Algebras in Quantum Physics*, Lectures notes in Physics, Serie m **27**, Springer, **1995**.

[Pat] Patyi, I. *On the $\bar{\partial}$-equation in a Banach space*, Bull. Soc. math. France, **128**, (**2002**), 391-406.

[Pen] Penot, J-P. *Sur le théorème de Frobenius*, Bull. Soc. math. France, **98**, (**1970**), 47-80.

[Pre] Pressley, A. *Loop Groups, Grassmannians and KdV Equations*, Infinite dimensional groups with applications, Publ., Math. Sci. Res. Inst. **4**, 285-306 (**1985**).

[PS] Pressley, A.; Segal, G. *Loop Groups*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford (UK): Clarendon Press. viii, 318 p. (**1988**)

[PV] Penskoi, A.V.; Veselov, A.P. *Discrete Lagrangian systems on the Virasoro group*, Moscow Univ. math. Bull. **51** (**1996**) n^o **4**, 52-54.

[Rey] Reyes, E.G. *Geometric Integrability of the Camassa-Holm Equation*, Letters in Math. Phys. **51**, (**2002**), 117-131.

[Sat] Sato, M.; Sato,Y. *Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold*, Nonlinear partial differential equations in applied science, Proc. U.S. - Jap. Semin., Tokyo 1982, North-Holland Math. Stud. **81**, (**1983**), 259-271.

[Sch1] Schiff, J. *The Camassa-Holm equation : a loop group approach*, Physica **D 121**, (**1998**)

[Sch2] Schiff, J. *Symmetries of KdV and Loop groups*, arXiv solv-int/9606004

[Schu1] Schue, J.R. *Hilbert space methods in the theory of Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (**1960**), 69-80.

[Schu2] Schue, J.R. *Cartan decompositions for L^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc **98**, (**1961**), 334-349.

[Seg1] Segal, G. *The geometry of the KdV equation*, Int. J. Mod. Phys. **A 6**, n^o **16**, (**1991**), 2859-2869.

[Seg2] Segal, G. *Loop groups and harmonic maps*, Advances in homotopy theory, Proc. Conf. in Honour of I. M. James, Cortona/Italy 1988, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **139**, (**1989**), 153-164.

[Seg3] Segal, G. *Unitary Representations of some Infinite Dimensional Groups*, Comm. Math. Phys **80**, n^o **3**, (**1981**), 301-342.

[Ser] Serre, J-P. *Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts*, Séminaire Bourbaki (Mai **1954**) 100-01/100-07

[Sim] Simon, *Trace ideals and their applications*, Cambridge University Press, Cambridge **1979**.

[SpVa] Spera, M.; Valli, G. *Plücker embedding of the Hilbert space Grassmannian and the CAR algebra*, Russian J. Math. Phys. **2**, n^o **3**, (**1994**), 383-392.

[SpWu] Spera, M.; Wurzbacher, T. *Differential geometry of Grassmannian embeddings of based loop groops*, Differential Geometry and its Applications **13**, (**2000**), 43-75, North-Holland.

[Stu] Stumme, N. *The structure of locally finite split Lie algebras*, Ph.D. thesis, Darmstadt University of technology, (**1999**).

[SW] Segal, G.; Wilson, G. *Loop Groups and equations of KdV type*, Terng, Chuu Lian (ed.) et al., Surveys in differential geometry. Vol. IV. A supplement to the Journal of Differential Geometry. Integral systems (integrable systems). Lectures on geometry and topology. Cambridge, MA: International Press, (**1998**), 403-466.

[Uns1] Unsain, I. *Classification of the simple real separable L^*-algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **72**, (**1971**) 462-466.

[Uns2] Unsain, I. *Classification of the simple real separable L^*-algebras*, J. Diff. Geom. **7**, (**1972**), 423-451.

[Ver] Vergne, M. *Groupe symplectique et seconde quantification*, Comptes Rendus de l'academie des Sciences **285**, (**1977**), 191-194.

[Wil1] Wilson, G. *Habillage et τ-fonction* Comptes Rendus de l'Academie des sciences **299**, (**1984**), 587-590.

[Wil2] Wilson, G. *Commuting flows and the conservation laws for Lax equations*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (**1979**), n^o **86**, 131-143.

[Wit] Witten, E. *Coadjoint Orbits of the Virasoro Group*, Commun. Math. Phys. **114**, 1-53.

[Wol1] Wolf, J.A. *Fine structure of Hermitian Symmetric Spaces*, Symmetric Spaces, short Courses presented at Washington Univ., pure appl. Math. **8**, (**1972**), 271-357.

[Wol2] Wolf, J.A. *On the classification of Hermitian Symmetric Spaces*, J. Math. Mech., **13**, (**1964**), 489-496.

[Wol3] Wolf, J.A. *Spaces of Constant Curvature*, mc Graw-Hill Series in higher Mathematics (**1977**).

[Wur1] Wurzbacher, T. *Fermionic Second Quantization and the Geometry of the Restricted Grassmannian*, in Infinite Dimensional Kähler Manifolds, DMV Seminar, Band 31, Birkhäuser, 2001.

[Wur2] Wurzbacher, T. *La grassmannienne d'un espace de Hilbert comme réduction symplectique*, exposé au séminaire Sud-Rhodanien de géométrie intitulé "Autour de la réduction symplectique", CIRM, Luminy, (**1-5/12/97**).

[Yam] Yamada, H. *The Virasoro Algebra and the KP Hierarchy*, Infinite Dimensional Groups with applications, Edited by Kac, Springer-Verlag, (**1985**).

[Zak] Zakharevich, I. *The Second Gelfand-Dickey Bracket as a Bracket on a Poisson-Lie Grassmannian*, Commun. Math. Phys. **159**, n^o **1**, (**1994**), 93-119.