Applications des catégories de foncteurs aux représentations des groupes algébriques

Antoine Touzé

Université Lille 1

Congrès SMF 2016
06/06/2016

$G \subset M_n(\Bbbk)$ groupe classique sur $\Bbbk$ ($\Bbbk$ corps algébriquement clos) :

$$SO_n(\Bbbk),\ Sp_n(\Bbbk),\ SL_n(\Bbbk),\ GL_n(\Bbbk)$$

$G \subset M_n(\mathbb{k})$ groupe classique sur $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k}$ corps algébriquement clos) :

$$SO_n(\mathbb{k}),\ Sp_n(\mathbb{k}),\ SL_n(\mathbb{k}),\ GL_n(\mathbb{k})$$

Représentations

$$V + \rho : G \to GL(V)$$

$G \subset M_n(\Bbbk)$ groupe classique sur $\Bbbk$ ($\Bbbk$ corps algébriquement clos) :

$$SO_n(\Bbbk),\ Sp_n(\Bbbk),\ SL_n(\Bbbk),\ GL_n(\Bbbk)$$

Représentations algébriques ("rationnelles")

$$V + \rho : G \to GL(V) \qquad \rho \text{ application régulière.}$$

$G \subset M_n(\mathbb{k})$ groupe classique sur $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k}$ corps algébriquement clos) :

$$SO_n(\mathbb{k}),\ Sp_n(\mathbb{k}),\ SL_n(\mathbb{k}),\ GL_n(\mathbb{k})$$

Représentations algébriques ("rationnelles")

$$V + \rho : G \to GL(V) \qquad \rho \text{ application régulière.}$$

Exemples :

- $\mathbb{k}^n$ action de G par multiplication des matrices.

$G \subset M_n(\mathbb{k})$ groupe classique sur $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k}$ corps algébriquement clos) :

$$SO_n(\mathbb{k}),\ Sp_n(\mathbb{k}),\ SL_n(\mathbb{k}),\ GL_n(\mathbb{k})$$

Représentations algébriques (”rationnelles”)

$$V + \rho : G \to GL(V) \qquad \rho \text{ application régulière.}$$

Exemples :

- $\mathbb{k}^n$ action de G par multiplication des matrices.
- $\Lambda^d(\mathbb{k}^n)$ action de G par
$$g.(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) = (g.v_1) \wedge \cdots \wedge (g.v_n)$$
- $S^d(\mathbb{k}^n)$ action de G par
$$g.(v_1 \dots v_d) = (g.v_1) \dots (g.v_n)$$

$G \subset M_n(\mathbb{k})$ groupe classique sur $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k}$ corps algébriquement clos) :

$$SO_n(\mathbb{k}),\ Sp_n(\mathbb{k}),\ SL_n(\mathbb{k}),\ GL_n(\mathbb{k})$$

Représentations algébriques (”rationnelles”)

$$V + \rho : G \to GL(V) \qquad \rho \text{ application régulière.}$$

Exemples :

- $\mathbb{k}^n$ action de G par multiplication des matrices.
- $\Lambda^d(\mathbb{k}^n)$ action de G par
$$g.(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) = (g.v_1) \wedge \cdots \wedge (g.v_n)$$
- $S^d(\mathbb{k}^n)$ action de G par
$$g.(v_1 \dots v_d) = (g.v_1) \dots (g.v_n)$$
- $M_n(\mathbb{k})$, action de G par conjugaison.

Pb1 : décrire représentations simples de G.

Pb2 : comprendre la structure des représentations "utiles".

Pb3 : comprendre la cohomologie de G.

Pb1 : décrire représentations simples de G.

Pb2 : comprendre la structure des représentations "utiles".

Pb3 : comprendre la cohomologie de G.

Car $\mathbb{k} = 0$:

- Construction explicite des simples (Schur $\simeq$1900 pour $GL_n(\mathbb{k})$)
- Toute représentation est somme directe de simples.
- Pas de cohomologie : $\mathrm{Ext}^i_{Rep(G)}(V, W) = 0$ pour $i > 0$

Pb1 : décrire représentations simples de G.

Pb2 : comprendre la structure des représentations "utiles".

Pb3 : comprendre la cohomologie de G.

<u>**Car $\mathbb{k} = 0$:**</u>

- Construction explicite des simples (Schur $\simeq$1900 pour $GL_n(\mathbb{k})$)
- Toute représentation est somme directe de simples.
- Pas de cohomologie : $\mathrm{Ext}^i_{Rep(G)}(V, W) = 0$ pour $i > 0$

<u>**Car $\mathbb{k} = p$:**</u>

- On a une liste des simples, mais pas de construction explicite.

Pb1 : décrire représentations simples de G.

Pb2 : comprendre la structure des représentations "utiles".

Pb3 : comprendre la cohomologie de G.

Car $\mathbb{k} = 0$:

- Construction explicite des simples (Schur $\simeq$1900 pour $GL_n(\mathbb{k})$)
- Toute représentation est somme directe de simples.
- Pas de cohomologie : $\mathrm{Ext}^i_{Rep(G)}(V, W) = 0$ pour $i > 0$

Car $\mathbb{k} = p$:

- On a une liste des simples, mais pas de construction explicite.
- Il y a plusieurs manières de recoller des représentations :

$$p = 2 \qquad S^2(\mathbb{k}^n) \oplus \Lambda^2(\mathbb{k}^n) \quad \neq \quad (\mathbb{k}^n)^{\otimes 2}$$

Pb1 : décrire représentations simples de G.

Pb2 : comprendre la structure des représentations "utiles".

Pb3 : comprendre la cohomologie de G.

Car $\Bbbk = 0$:

- Construction explicite des simples (Schur $\simeq$1900 pour $GL_n(\Bbbk)$)
- Toute représentation est somme directe de simples.
- Pas de cohomologie : $\mathrm{Ext}^i_{Rep(G)}(V, W) = 0$ pour $i > 0$

Car $\Bbbk = p$:

- On a une liste des simples, mais pas de construction explicite.
- Il y a plusieurs manières de recoller des représentations :

$$p = 2 \qquad S^2(\Bbbk^n) \oplus \Lambda^2(\Bbbk^n) \quad \neq \quad (\Bbbk^n)^{\otimes 2}$$

- Cohomologie non nulle

$$p = 2 \qquad \mathrm{Ext}^1_{Rep(GL_n(\Bbbk))}(S^2(\Bbbk^n), \Lambda^2(\Bbbk^n)) \simeq \Bbbk$$

Pb1 : décrire représentations simples de G.

Pb2 : comprendre la structure des représentations "utiles".

Pb3 : comprendre la cohomologie de G.

Car $\mathbb{k} = 0$:

- Construction explicite des simples (Schur $\simeq$1900 pour $GL_n(\mathbb{k})$)
- Toute représentation est somme directe de simples.
- Pas de cohomologie : $\mathrm{Ext}^i_{Rep(G)}(V, W) = 0$ pour $i > 0$

Car $\mathbb{k} = p$:

- On a une liste des simples, mais pas de construction explicite.
- Il y a plusieurs manières de recoller des représentations :

$$p = 2 \qquad S^2(\mathbb{k}^n) \oplus \Lambda^2(\mathbb{k}^n) \quad \neq \quad (\mathbb{k}^n)^{\otimes 2}$$

- Cohomologie non nulle, et difficile à calculer en général.

$$p = 2 \qquad \mathrm{Ext}^1_{Rep(GL_n(\mathbb{k}))}(S^2(\mathbb{k}^n), \Lambda^2(\mathbb{k}^n)) \simeq \mathbb{k}$$

Pb1 : décrire représentations simples de G.

Pb2 : comprendre la structure des représentations "utiles".

Pb3 : comprendre la cohomologie de G.

Pb1 : décrire représentations simples de G.

Pb2 : comprendre la structure des représentations ”utiles”.

Pb3 : comprendre la cohomologie de G.

Pb1 : décrire représentations simples de G.

Pb2 : comprendre la structure des représentations "utiles".

Pb3 : comprendre la cohomologie de G.

Paramètres :

- $n =$ taille de G $\qquad (G \subset M_n(\mathbb{k}))$,
- $p = Car(\mathbb{k})$

$\rightarrow$ Méthodes : intérêt principal pour $n \geq p$.

Pb1 : décrire représentations simples de G.

Pb2 : comprendre la structure des représentations "utiles".

Pb3 : comprendre la cohomologie de G.

Paramètres :

- $n =$ taille de G $\qquad (G \subset M_n(\mathbb{k}))$,
- $p = Car(\mathbb{k})$

$\rightarrow$ Méthodes : intérêt principal pour $n \geq p$.

Plan :

I. Representations polynomiales et foncteurs

II. Cup produits

I. **Représentations polynomiales** et foncteurs (1)

Représentation de $M_n(\mathbb{k})$

$$V + \rho : M_n(\mathbb{k}) \to \mathrm{End}(V)$$

I. **Représentations polynomiales** et foncteurs (1)

Représentation de $M_n(\mathbb{k})$ polynomiale

$$V + \rho : M_n(\mathbb{k}) \to \mathrm{End}(V)$$

$\rho([m_{ij}])$ polynome var. $m_{i,j}$

I. **Représentations polynomiales** et foncteurs (1)

Représentation de $M_n(\mathbb{k})$ polynomiale (homogène deg d**) :**

$$V + \rho : M_n(\mathbb{k}) \to \mathrm{End}(V)$$

$\rho([m_{ij}])$ polynome var. $m_{i,j}$ (homogène deg d)

I. **Représentations polynomiales** et foncteurs (1)

Représentation de $M_n(\mathbb{k})$ polynomiale (homogène deg d**) :**

$$V + \rho : M_n(\mathbb{k}) \to \mathrm{End}(V)$$

$\rho([m_{ij}])$ polynome var. $m_{i,j}$ (homogène deg d)

Représentation de $G \subset M_n(\mathbb{k})$ polynomiale (homogène deg d**)**

$(V, \rho : G \to GL(V))$ t.q. ρ s'étend en $\overline{\rho} : M_n(\mathbb{k}) \to \mathrm{End}(V)$.

$\overline{\rho}$ polynomiale (homogène deg d)

I. **Représentations polynomiales** et foncteurs (1)

Représentation de $M_n(\Bbbk)$ polynomiale (homogène deg d**) :**

$$V + \rho : M_n(\Bbbk) \to \mathrm{End}(V)$$
$$\rho([m_{ij}]) \text{ polynome var. } m_{i,j} \text{ (homogène deg } d\text{)}$$

Représentation de $G \subset M_n(\Bbbk)$ polynomiale (homogène deg d**)**

$(V, \rho : G \to GL(V))$ t.q. ρ s'étend en $\overline{\rho} : M_n(\Bbbk) \to \mathrm{End}(V)$.
$\overline{\rho}$ polynomiale (homogène deg d)

Exemples :

- $\Bbbk^n$ action de G par multiplication des matrices. $\to$ deg 1

I. **Représentations polynomiales** et foncteurs (1)

Représentation de $M_n(\mathbb{k})$ polynomiale (homogène deg d**) :**

$$V + \rho : M_n(\mathbb{k}) \to \mathrm{End}(V)$$
$\rho([m_{ij}])$ polynome var. $m_{i,j}$ (homogène deg d)

Représentation de $G \subset M_n(\mathbb{k})$ polynomiale (homogène deg d**)**

$(V, \rho : G \to GL(V))$ t.q. ρ s'étend en $\overline{\rho} : M_n(\mathbb{k}) \to \mathrm{End}(V)$.
$\overline{\rho}$ polynomiale (homogène deg d)

Exemples :

- $\mathbb{k}^n$ action de G par multiplication des matrices. $\to$ deg 1
- $\Lambda^d(\mathbb{k}^n) \to$ deg d
- $S^d(\mathbb{k}^n) \to$ deg d

I. Représentations polynomiales et foncteurs (1)

Représentation de $M_n(\Bbbk)$ polynomiale (homogène deg d) :

$$V \curvearrowleft \rho : M_n(\Bbbk) \to \mathrm{End}(V)$$

$\rho([m_{ij}])$ polynome var. $m_{i,j}$ (homogène deg d)

Représentation de $G \subset M_n(\Bbbk)$ polynomiale (homogène deg d)

$(V, \rho : G \to GL(V))$ t.q. ρ s'étend en $\overline{\rho} : M_n(\Bbbk) \to \mathrm{End}(V)$.

$\overline{\rho}$ polynomiale (homogène deg d)

Exemples :

- $\Bbbk^n$ action de G par multiplication des matrices. $\to$ deg 1
- $\Lambda^d(\Bbbk^n) \to$ deg d
- $S^d(\Bbbk^n) \to$ deg d
- $M_n(\Bbbk)$, action de $GL_n(\Bbbk)$ par conjugaison. $\to$ pas polynomiale

I. Représentations polynomiales et **foncteurs** (2)

"Foncteurs = constructeurs de représentations"

$$\text{Foncteur}\quad F:\quad \begin{array}{ccc} \{\Bbbk-\mathrm{ev}\ \mathit{dim}<\infty\} & \to & \{\Bbbk-\mathrm{ev}\ \mathit{dim}<\infty\} \\ V & \mapsto & F(V) \end{array}$$

I. Représentations polynomiales et **foncteurs** (2)

"Foncteurs = constructeurs de représentations"

$$\text{Foncteur} \quad F: \begin{array}{ccc} \{\Bbbk-\mathrm{ev}\ \mathit{dim}<\infty\} & \to & \{\Bbbk-\mathrm{ev}\ \mathit{dim}<\infty\} \\ V & \mapsto & F(V) \end{array}$$

$$\Downarrow$$

Représentation $(F(\Bbbk^n), \rho_F)$ de G

I. Représentations polynomiales et **foncteurs** (2)

"Foncteurs = constructeurs de représentations"

$$\text{Foncteur} \quad F : \begin{array}{ccc} \{\Bbbk-\mathrm{ev}\ \mathit{dim}<\infty\} & \to & \{\Bbbk-\mathrm{ev}\ \mathit{dim}<\infty\} \\ V & \mapsto & F(V) \end{array}$$

$$\Downarrow$$

Représentation $(F(\Bbbk^n), \rho_F)$ de G

$$\text{avec } \rho_F : G \subset \begin{array}{ccc} GL_n(\Bbbk) & \to & GL(F(\Bbbk^n)) \\ g & \mapsto & F(g) \end{array}$$

I. Représentations polynomiales et **foncteurs** (2)

"Foncteurs = constructeurs de représentations"

$$\text{Foncteur} \quad F : \begin{array}{ccc} \{\mathbb{k}-\mathrm{ev}\ \mathit{dim}<\infty\} & \to & \{\mathbb{k}-\mathrm{ev}\ \mathit{dim}<\infty\} \\ V & \mapsto & F(V) \end{array}$$

$$\Big\Downarrow$$

Représentation $(F(\mathbb{k}^n), \rho_F)$ de G

$$\text{avec } \rho_F : G \subset \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{k}) & \to & GL(F(\mathbb{k}^n)) \\ g & \mapsto & F(g) \end{array}$$

Foncteur (strictement) polynomial

F polynomial si toutes les $(F(\mathbb{k}^n), \rho_F)$ sont représ polyn.

I. Représentations polynomiales et **foncteurs** (2)

"Foncteurs = constructeurs de représentations"

$$\text{Foncteur} \quad F: \begin{array}{ccc} \{\Bbbk - \mathrm{ev}\ dim < \infty\} & \to & \{\Bbbk - \mathrm{ev}\ dim < \infty\} \\ V & \mapsto & F(V) \end{array}$$

$$\Downarrow$$

Représentation $(F(\Bbbk^n), \rho_F)$ de G

$$\text{avec } \rho_F : G \subset \begin{array}{ccc} GL_n(\Bbbk) & \to & GL(F(\Bbbk^n)) \\ g & \mapsto & F(g) \end{array}$$

Foncteur (strictement) polynomial (deg d**)**

F polynomial si toutes les $(F(\Bbbk^n), \rho_F)$ sont représ polyn. (deg d)

Exemples de foncteurs polynomiaux deg d :

- Λ^d : $V \mapsto \Lambda^d(V)$
- S^d : $V \mapsto S^d(V)$

I. Représentations polynomiales et **foncteurs** (2)

"Foncteurs = constructeurs de représentations"

$$\text{Foncteur} \quad F : \begin{array}{ccc} \{\mathbb{k} - \mathrm{ev}\ dim < \infty\} & \to & \{\mathbb{k} - \mathrm{ev}\ dim < \infty\} \\ V & \mapsto & F(V) \end{array}$$

Représentation $(F(\mathbb{k}^n), \rho_F)$ de G

$$\text{avec } \rho_F : G \subset \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{k}) & \to & GL(F(\mathbb{k}^n)) \\ g & \mapsto & F(g) \end{array}$$

Foncteur (strictement) polynomial (deg d**)**

F polynomial si toutes les $(F(\mathbb{k}^n), \rho_F)$ sont représ polyn. (deg d)

Exemples de foncteurs polynomiaux deg d :

- $\Lambda^d : \ V \mapsto \Lambda^d(V)$ ▸ $S^d : \ V \mapsto S^d(V)$
- Plus généralement les foncteurs de Schur $S_\lambda : V \mapsto S_\lambda(V)$, avec partition λ de d

I. Représentations polynomiales et **foncteurs** (2)

"Foncteurs = constructeurs de représentations"

$$\text{Foncteur} \quad F: \begin{array}{ccc} \{\Bbbk - \mathrm{ev}\ dim < \infty\} & \to & \{\Bbbk - \mathrm{ev}\ dim < \infty\} \\ V & \mapsto & F(V) \end{array}$$

$$\Downarrow$$

Représentation $(F(\Bbbk^n), \rho_F)$ de G

$$\text{avec } \rho_F : G \subset \begin{array}{ccc} GL_n(\Bbbk) & \to & GL(F(\Bbbk^n)) \\ g & \mapsto & F(g) \end{array}$$

Foncteur (strictement) polynomial (deg d**)**

F polynomial si toutes les $(F(\Bbbk^n), \rho_F)$ sont représ polyn. (deg d)

Exemples de foncteurs polynomiaux deg d :

- Λ^d : $V \mapsto \Lambda^d(V)$ ▸ S^d : $V \mapsto S^d(V)$
- Plus généralement les foncteurs de Schur $S_\lambda : V \mapsto S_\lambda(V)$, avec partition λ de d
- $\mathcal{L}^d$: $V \mapsto \mathcal{L}^d(V)$ (composante de l'alg. Lie libre)

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (3)

$$\text{Catégorie } \mathcal{P} : \begin{cases} \text{objets} = \text{foncteurs polynomiaux} \\ \text{morphismes} = \text{transformations naturelles} \end{cases}$$

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (3)

Catégorie $\mathcal{P}$: $\begin{cases} \text{objets} = \text{foncteurs polynomiaux} \\ \text{morphismes} = \text{transformations naturelles} \end{cases}$

Catégorie "gentille"

- abélienne,

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (3)

Catégorie $\mathcal{P}$: $\begin{cases} \text{objets} = \text{foncteurs polynomiaux} \\ \text{morphismes} = \text{transformations naturelles} \end{cases}$

Catégorie "gentille"

- abélienne,
- catégorie de modules sur algèbre Schur $\mathrm{End}_{\Sigma_d}(\mathbb{k}^{n\otimes d})$

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (3)

Catégorie $\mathcal{P}$: $\begin{cases} \text{objets} = \text{foncteurs polynomiaux} \\ \text{morphismes} = \text{transformations naturelles} \end{cases}$

Catégorie "gentille"

- abélienne,
- catégorie de modules sur algèbre Schur $\mathrm{End}_{\Sigma_d}(\mathbb{k}^{n\otimes d})$
- injectifs $S^{d_1} \otimes \cdots \otimes S^{d_k}$, projectifs $\Gamma^{d_1} \otimes \cdots \otimes \Gamma^{d_k}$.

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (3)

Catégorie $\mathcal{P}$: $\begin{cases} \text{objets} = \text{foncteurs polynomiaux} \\ \text{morphismes} = \text{transformations naturelles} \end{cases}$

Catégorie "gentille"

- abélienne,
- catégorie de modules sur algèbre Schur $\mathrm{End}_{\Sigma_d}(\Bbbk^{n \otimes d})$
- injectifs $S^{d_1} \otimes \cdots \otimes S^{d_k}$, projectifs $\Gamma^{d_1} \otimes \cdots \otimes \Gamma^{d_k}$.

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E, F) \qquad \mathrm{Ext}^*_{Rep(GL_n(\Bbbk))}(E(\Bbbk^n), F(\Bbbk^n))$$

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (3)

Catégorie $\mathcal{P}$: $\begin{cases} \text{objets} = \text{foncteurs polynomiaux} \\ \text{morphismes} = \text{transformations naturelles} \end{cases}$

Catégorie "gentille"

- abélienne,
- catégorie de modules sur algèbre Schur $\mathrm{End}_{\Sigma_d}(\Bbbk^{n \otimes d})$
- injectifs $S^{d_1} \otimes \cdots \otimes S^{d_k}$, projectifs $\Gamma^{d_1} \otimes \cdots \otimes \Gamma^{d_k}$.

Thm (Friedlander Suslin 97) :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E, F) \simeq \mathrm{Ext}^*_{Rep(GL_n(\Bbbk))}(E(\Bbbk^n), F(\Bbbk^n))$$

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (3)

Catégorie $\mathcal{P}$: $\begin{cases} \text{objets} = \text{foncteurs polynomiaux} \\ \text{morphismes} = \text{transformations naturelles} \end{cases}$

Catégorie "gentille"

- abélienne,
- catégorie de modules sur algèbre Schur $\mathrm{End}_{\Sigma_d}(\mathbb{k}^{n\otimes d})$
- injectifs $S^{d_1} \otimes \cdots \otimes S^{d_k}$, projectifs $\Gamma^{d_1} \otimes \cdots \otimes \Gamma^{d_k}$.

Thm (Friedlander Suslin 97) : Si $\deg E, \deg F \leq n$

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E, F) \simeq \mathrm{Ext}^*_{Rep(GL_n(\mathbb{k}))}(E(\mathbb{k}^n), F(\mathbb{k}^n))$$

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (3)

Catégorie $\mathcal{P}$: $\begin{cases} \text{objets} = \text{foncteurs polynomiaux} \\ \text{morphismes} = \text{transformations naturelles} \end{cases}$

Catégorie "gentille"

- abélienne,
- catégorie de modules sur algèbre Schur $\mathrm{End}_{\Sigma_d}(\Bbbk^{n \otimes d})$
- injectifs $S^{d_1} \otimes \cdots \otimes S^{d_k}$, projectifs $\Gamma^{d_1} \otimes \cdots \otimes \Gamma^{d_k}$.

Thm (Friedlander Suslin 97) : Si $\deg E, \deg F \leq n$

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E, F) \simeq \mathrm{Ext}^*_{Rep(GL_n(\Bbbk))}(E(\Bbbk^n), F(\Bbbk^n))$$

Autres groupes classiques (T09) :

Thm : Si $\deg F \leq n$

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\oplus_{d \geq 0} \Gamma^d \circ \Lambda^2, F) \simeq \mathrm{Ext}^*_{Rep(Sp_n(\Bbbk))}(\Bbbk, F(\Bbbk^n))$$

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (4)

Thm (Friedlander Suslin 97) :Si $\deg E, \deg F \leq n$

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E, F) \simeq \mathrm{Ext}^*_{Rep(GL_n(\mathbb{k}))}(E(\mathbb{k}^n), F(\mathbb{k}^n))$$

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (4)

Thm (Friedlander Suslin 97) :Si $\deg E, \deg F \leq n$

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E,F) \simeq \mathrm{Ext}^*_{Rep(GL_n(\mathbb{k}))}(E(\mathbb{k}^n), F(\mathbb{k}^n))$$

Qu'est-ce qu'on perd ?

1. Toutes les représentations ne sont pas polynomiales
2. Seuls calculs pour n grand concernés.

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (4)

Thm (Friedlander Suslin 97) :Si $\deg E, \deg F \leq n$

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E,F) \simeq \mathrm{Ext}^*_{Rep(GL_n(\Bbbk))}(E(\Bbbk^n), F(\Bbbk^n))$$

Qu'est-ce qu'on gagne ?

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (4)

Thm (Friedlander Suslin 97) :Si $\deg E, \deg F \leq n$

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E,F) \simeq \mathrm{Ext}^*_{Rep(GL_n(\mathbb{k}))}(E(\mathbb{k}^n), F(\mathbb{k}^n))$$

Qu'est-ce qu'on gagne ?

1. Le n a disparu à gauche : bon cadre pour calculs stables.

   Fonctorialité $\leftrightarrow$ induction/restriction $GL_n(\mathbb{k})$ - $GL_m(\mathbb{k})$

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (4)

Thm (Friedlander Suslin 97) :Si $\deg E, \deg F \leq n$

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E,F) \simeq \mathrm{Ext}^*_{Rep(GL_n(\Bbbk))}(E(\Bbbk^n), F(\Bbbk^n))$$

Qu'est-ce qu'on gagne ?

1. Le n a disparu à gauche : bon cadre pour calculs stables.

   Fonctorialité $\leftrightarrow$ induction/restriction $GL_n(\Bbbk)$ - $GL_m(\Bbbk)$

2. Techniques de calcul fonctoriel dans $\mathcal{P}$

   Composition des foncteurs $\leftrightarrow$? ?

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (4)

Thm (Friedlander Suslin 97) :Si $\deg E, \deg F \leq n$

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E,F) \simeq \mathrm{Ext}^*_{Rep(GL_n(\Bbbk))}(E(\Bbbk^n), F(\Bbbk^n))$$

Qu'est-ce qu'on gagne ?

1. Le n a disparu à gauche : bon cadre pour calculs stables.

   Fonctorialité $\leftrightarrow$ induction/restriction $GL_n(\Bbbk)$ - $GL_m(\Bbbk)$
2. Techniques de calcul fonctoriel dans $\mathcal{P}$

   Composition des foncteurs $\leftrightarrow$? ?

$\Rightarrow$ Découverte de "propriétés stables", invisibles à droite

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (4)

Thm (Friedlander Suslin 97) :Si $\deg E, \deg F \leq n$

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E,F) \simeq \mathrm{Ext}^*_{Rep(GL_n(\mathbb{k}))}(E(\mathbb{k}^n), F(\mathbb{k}^n))$$

Qu'est-ce qu'on gagne ?

1. Le n a disparu à gauche : bon cadre pour calculs stables.

   Fonctorialité $\leftrightarrow$ induction/restriction $GL_n(\mathbb{k})$ - $GL_m(\mathbb{k})$
2. Techniques de calcul fonctoriel dans $\mathcal{P}$

   Composition des foncteurs $\leftrightarrow$? ?

$\Rightarrow$ Découverte de "propriétés stables", invisibles à droite

$\Rightarrow$ Nombreux calculs possibles [FS97], [FFSS99], [C05]...

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (4)

Thm (Friedlander Suslin 97) :Si $\deg E, \deg F \leq n$

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E,F) \simeq \mathrm{Ext}^*_{Rep(GL_n(\Bbbk))}(E(\Bbbk^n), F(\Bbbk^n))$$

Qu'est-ce qu'on gagne ?

1. Le n a disparu à gauche : bon cadre pour calculs stables.

   Fonctorialité $\leftrightarrow$ induction/restriction $GL_n(\Bbbk)$ - $GL_m(\Bbbk)$
2. Techniques de calcul fonctoriel dans $\mathcal{P}$

   Composition des foncteurs $\leftrightarrow$? ?

   $\Rightarrow$ Découverte de "propriétés stables", invisibles à droite

   $\Rightarrow$ Nombreux calculs possibles [FS97], [FFSS99], [C05]...
3. Les foncteurs apparaissent dans d'autres contextes

   $\Rightarrow$ nouvelles interprétations de cohom groupes algébriques

I. Représentations polynomiales **et** foncteurs (4)

Thm (Friedlander Suslin 97) :Si $\deg E, \deg F \leq n$

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E, F) \simeq \mathrm{Ext}^*_{Rep(GL_n(\Bbbk))}(E(\Bbbk^n), F(\Bbbk^n))$$

Qu'est-ce qu'on gagne ?

1. Le n a disparu à gauche : bon cadre pour calculs stables.

   Fonctorialité $\leftrightarrow$ induction/restriction $GL_n(\Bbbk)$ - $GL_m(\Bbbk)$
2. Techniques de calcul fonctoriel dans $\mathcal{P}$

   Composition des foncteurs $\leftrightarrow$? ?

   $\Rightarrow$ Découverte de "propriétés stables", invisibles à droite

   $\Rightarrow$ Nombreux calculs possibles [FS97], [FFSS99], [C05]...
3. Les foncteurs apparaissent dans d'autres contextes

   $\Rightarrow$ nouvelles interprétations de cohom groupes algébriques

   Ex [T13] : $\bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(S^d, \Lambda^d) \simeq H_*^{sing}(K(\mathbb{Z}, 3), \Bbbk)$

II. Un exemple de propriété stable : Cup produits (1)

Pb : U, V deux représentations de G. Comprendre $U \otimes V$.

II. Un exemple de propriété stable : Cup produits (1)

Pb : U, V deux représentations de G. Comprendre $U \otimes V$.

Un outil : le cup produit.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^i_{Rep(G)}(V, W) \otimes \mathrm{Ext}^j_{Rep(G)}(X, Y) & \to & \mathrm{Ext}^{i+j}_{Rep(G)}(V \otimes X, W \otimes Y) \\ [c_1] \otimes [c_2] & \mapsto & [c_1 \otimes c_2] \end{array}$$

pratique !

II. Un exemple de propriété stable : Cup produits (1)

Pb : U, V deux représentations de G. Comprendre $U \otimes V$.

Un outil : le cup produit.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^i_{Rep(G)}(V,W) \otimes \mathrm{Ext}^j_{Rep(G)}(X,Y) & \to & \mathrm{Ext}^{i+j}_{Rep(G)}(V \otimes X, W \otimes Y) \\ [c_1] \otimes [c_2] & \mapsto & [c_1 \otimes c_2] \end{array}$$

pratique !

- mais aucune garantie que $[c_1 \otimes c_2] \neq 0$!

II. Un exemple de propriété stable : Cup produits (1)

Pb : U, V deux représentations de G. Comprendre $U \otimes V$.

Un outil : le cup produit.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^i_{Rep(G)}(V,W) \otimes \mathrm{Ext}^j_{Rep(G)}(X,Y) & \to & \mathrm{Ext}^{i+j}_{Rep(G)}(V \otimes X, W \otimes Y) \\ [c_1] \otimes [c_2] & \mapsto & [c_1 \otimes c_2] \end{array}$$

pratique !

- mais aucune garantie que $[c_1 \otimes c_2] \neq 0$!
- mais les classes ne sont pas toutes de la forme $[c_1 \otimes c_2]$!

Pb : U, V deux représentations de G. Comprendre $U \otimes V$.

Un outil : le cup produit.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^i_{Rep(G)}(V,W) \otimes \mathrm{Ext}^j_{Rep(G)}(X,Y) & \to & \mathrm{Ext}^{i+j}_{Rep(G)}(V\otimes X, W\otimes Y) \\ [c_1]\otimes[c_2] & \mapsto & [c_1 \otimes c_2] \end{array}$$

pratique !

- mais aucune garantie que $[c_1 \otimes c_2] \neq 0$!
- mais les classes ne sont pas toutes de la forme $[c_1 \otimes c_2]$!

Exemple : $G = GL_n(\Bbbk)$, $i = j = 0$

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_{Rep(G)}(\Bbbk^{n*},\Bbbk) \otimes \mathrm{Hom}_{Rep(G)}(\Bbbk^{n},\Bbbk)}_{0} \to \underbrace{\mathrm{Hom}_{Rep(G)}(M_n(\Bbbk),\Bbbk)}_{\neq 0}$$

II. Un exemple de propriété stable : Cup produits (1)

Pb : U, V deux représentations de G. Comprendre $U \otimes V$.

Un outil : le cup produit.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^i_{Rep(G)}(V, W) \otimes \mathrm{Ext}^j_{Rep(G)}(X, Y) & \to & \mathrm{Ext}^{i+j}_{Rep(G)}(V \otimes X, W \otimes Y) \\ [c_1] \otimes [c_2] & \mapsto & [c_1 \otimes c_2] \end{array}$$

Pas pratique !

- mais aucune garantie que $[c_1 \otimes c_2] \neq 0$!
- mais les classes ne sont pas toutes de la forme $[c_1 \otimes c_2]$!

  Exemple : $G = GL_n(\Bbbk)$, $i = j = 0$

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_{Rep(G)}(\Bbbk^{n*}, \Bbbk) \otimes \mathrm{Hom}_{Rep(G)}(\Bbbk^n, \Bbbk)}_{0} \to \underbrace{\mathrm{Hom}_{Rep(G)}(M_n(\Bbbk), \Bbbk)}_{\neq 0}$$

II. Un exemple de propriété stable : Cup produits (2)

Thm (T09) : Si E, F, H, K foncteurs polynomiaux,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E,F) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(H,K) & \to & \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E\otimes H, F\otimes K) \\ [c_1]\otimes[c_2] & \mapsto & [c_1\otimes c_2] \end{array}$$

II. Un exemple de propriété stable : Cup produits (2)

Thm (T09) : Si E, F, H, K foncteurs polynomiaux,
Injectivité ! du cup produit

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E,F)\otimes\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(H,K) & \to & \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E\otimes H, F\otimes K) \\ [c_1]\otimes[c_2] & \mapsto & [c_1\otimes c_2] \end{array}$$

II. Un exemple de propriété stable : Cup produits (2)

Thm (T09) : Si E, F, H, K foncteurs polynomiaux,
Injectivité ! du cup produit

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E,F)\otimes\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(H,K) & \to & \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E\otimes H, F\otimes K) \\ [c_1]\otimes[c_2] & \mapsto & [c_1\otimes c_2] \end{array}$$

Cor : $V = E(\Bbbk^n)$, $W = F(\Bbbk^n)$, $X = H(\Bbbk^n)$, $Y = K(\Bbbk^n)$,
$G = GL_n(\Bbbk)$. Avec n assez grand :
Injectivité ! du cup produit

$$\mathrm{Ext}^*_{Rep(G)}(V,W)\otimes\mathrm{Ext}^*_{Rep(G)}(X,Y) \to \mathrm{Ext}^*_{Rep(G)}(V\otimes X, W\otimes Y)$$

II. Un exemple de propriété stable : Cup produits (2)

Thm (T09) : Si E, F, H, K foncteurs polynomiaux,
Injectivité ! du cup produit

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E,F) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(H,K) & \to & \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E\otimes H, F\otimes K) \\ [c_1]\otimes[c_2] & \mapsto & [c_1\otimes c_2] \end{array}$$

Cor : $V = E(\mathbb{k}^n)$, $W = F(\mathbb{k}^n)$, $X = H(\mathbb{k}^n)$, $Y = K(\mathbb{k}^n)$,
$G = GL_n(\mathbb{k})$. Avec n assez grand :
Injectivité ! du cup produit

$$\mathrm{Ext}^*_{Rep(G)}(V,W) \otimes \mathrm{Ext}^*_{Rep(G)}(X,Y) \to \mathrm{Ext}^*_{Rep(G)}(V\otimes X, W\otimes Y)$$

Resultats injectivité analogues pour les autres groupes classiques.

Thm (T09) : Si E, F, H, K foncteurs polynomiaux,
Injectivité ! du cup produit

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E,F) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(H,K) & \to & \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(E \otimes H, F \otimes K) \\ [c_1] \otimes [c_2] & \mapsto & [c_1 \otimes c_2] \end{array}$$

Cor : $V = E(\mathbb{k}^n)$, $W = F(\mathbb{k}^n)$, $X = H(\mathbb{k}^n)$, $Y = K(\mathbb{k}^n)$,
$G = GL_n(\mathbb{k})$. Avec n assez grand :
Injectivité ! du cup produit

$$\mathrm{Ext}^*_{Rep(G)}(V,W) \otimes \mathrm{Ext}^*_{Rep(G)}(X,Y) \to \mathrm{Ext}^*_{Rep(G)}(V \otimes X, W \otimes Y)$$

Resultats injectivité analogues pour les autres groupes classiques.

Thm (T15) : Sous certaines conditions, le cup produit est un
isomorphisme ! dans les bas degrés cohomologiques.

II. Un exemple de propriété stable : Cup produits (3)

Un cas d'application de l'isomorphisme stable en bas degrés

A. Classification des simples de $\mathcal{P}$

Classes d'isos de simples $\leftrightarrow$ partitions d'entiers.

Un cas d'application de l'isomorphisme stable en bas degrés

A. Classification des simples de $\mathcal{P}$

Classes d'isos de simples $\leftrightarrow$ partitions d'entiers.

B. Torsion de Frobenius

$V = (V, \rho)$ représentation de G

$V^{(r)} := (V, \rho^{(r)})$ avec $\rho^{(r)} := \begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{Frob} & G & \xrightarrow{\rho} & GL(V) \\ [m_{ij}] & \mapsto & [m_{ij}^{p^r}] & & \end{array}$

Les $V^{(r)}$ et $U \otimes V^{(r)}$: rôle essentiel dans l'étude de $Rep(G)$

Un cas d'application de l'isomorphisme stable en bas degrés

A. Classification des simples de $\mathcal{P}$

Classes d'isos de simples $\leftrightarrow$ partitions d'entiers.

B. Torsion de Frobenius

$V = (V, \rho)$ représentation de G

$$V^{(r)} := (V, \rho^{(r)}) \text{ avec } \rho^{(r)} := \begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{Frob} & G & \xrightarrow{\rho} & GL(V) \\ [m_{ij}] & \mapsto & [m_{ij}^{p^r}] & & \end{array}$$

Les $V^{(r)}$ et $U \otimes V^{(r)}$: rôle essentiel dans l'étude de $Rep(G)$

Au niveau des foncteurs strictement polynomiaux :

$F^{(r)} := F \circ I^{(r)}$ avec $I^{(r)} : V \mapsto \left\langle v^{p^r}, v \in V \right\rangle \subset S^{p^r}(V)$

Un cas d'application de l'isomorphisme stable en bas degrés

Cor : Si E possède la propriété suivante :

Les quotients simples de E sont des simples associés à des partitions p^r-restreintes.

alors le cup produit en degré 0 est un isomorphisme :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{P}}(E,F)\otimes \mathrm{hom}_{\mathcal{P}}(H^{(r)},K^{(r)}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{hom}_{\mathcal{P}}(E\otimes H^{(r)},F\otimes K^{(r)})$$

II. Un exemple de propriété stable : Cup produits (4)

Un cas d'application de l'isomorphisme stable en bas degrés

Cor : Si E possède la propriété suivante :

Les quotients simples de E sont des simples associés à des partitions p^r-restreintes.

alors le cup produit en degré 0 est un isomorphisme :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{P}}(E,F)\otimes \mathrm{hom}_{\mathcal{P}}(H^{(r)},K^{(r)}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{hom}_{\mathcal{P}}(E\otimes H^{(r)},F\otimes K^{(r)})$$

Applications :

1. Nouvelle démonstration du théorème de Steinberg.
2. Un théorème de Steinberg pour les indécomposables.
3. Sous-modules des produits tensoriels.