Groupe de travail:
Deligne Lusztig theory and unstable modules

Antoine Touzé

15 octobre 2018

Soit $\mathcal{U}$ la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod, et soit $K(\mathcal{U}) = \bigcup_{n\geq 1} K_n(\mathcal{U})$, où $K_n(\mathcal{U})$ désigne le groupe abélien libre engendré par les facteurs indécomposables (dans $\mathcal{U}$) de $H^*(B(\mathbb{Z}/p^{\times n}))$. Le foncteur de Lannes $T : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ induit un morphisme de groupes $T : K(\mathcal{U}) \to K(\mathcal{U})$. Un résultat récent de Nguyen Dang Ho Hai [1] montre que le morphisme de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels

$$T \otimes \mathbb{Q} : K(\mathcal{U}) \otimes \mathbb{Q} \to K(\mathcal{U}) \otimes \mathbb{Q}$$

est diagonalisable, et donne une description des valeurs propres et des vecteurs propres. De manière spectaculaire, les vecteurs propres sont reliés aux caractères de Deligne-Lusztig. L'objectif de ce petit groupe de travail est de comprendre le contenu de ce résultat.

[1] Nguyen Dang Ho Hai, Deligne-Lusztig characters of the finite general linear groups and eigencvectors of Lanne's T-functor, preprint 2018.

Exp 0 : Introduction et répartition des exposés

Date : vendredi 5 octobre, « orateur » : Antoine.

Exp 1 : Rappels sur l'algèbre de Steenrod et les modules instables

Date : vendredi 19 octobre, orateur : Jun.

Réferences : [1], le livre de Lionel Schwartz : Unstable modules and the Sullivan conjecture, les exposés de L. Schwartz dans le panorama et synthèses 16.

Objectif : Présenter (sans démonstrations) la catégorie des modules instables, afin de pouvoir comprendre le contexte topologico-algébrique de [1]. (Pour être plus efficace, on pourra se concentrer sur le cas $p = 2$ lorsqu'on donnera des formules ou qu'on rentrera dans des détails spécifiques)

Programme :

— Définition abstraite de l'algèbre de Steenrod (opérations cohomologiques stables), et calcul concret (générateurs et relations).
— Définir les modules instables, le produit tensoriel de modules instables, les algèbres instables.
Exemple fondamental : décrire $H^*(B\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ comme algèbre et comme module sur l'algèbre de Steenrod.
— Définition du foncteur de Lannes, énoncé de ses principales propriétés (exactitude, monoidalité), et du calcul de T sur $H^*(BV)$.
— Enoncé du théorème de Lannes sur les algèbres instables (en particulier le thm 11.17 page 90 du panorama et synthèses).

Exp 2 : Théorie des caractères des groupes finis

Date : vendredi 9 novembre, orateur : Ivan.

Références : [1], Serre : représentations linéaires des groupes finis,
Objectif : Les démonstrations de [1] reposent sur l'emploi des caractères. L'objectif de cet exposé est de rappeler les bases de la théorie des caractères de groupes finis (hormis la théorie de Deligne Lusztig).
Programme :
— Rappels sur les caractères ordinaires. Classification des représentations simples par les classes de conjugaison de G. Deux représentations complexes d'un groupe fini sont isomorphes si et seulement si elles ont mêmes caractères.
— Définition des caractères modulaires. Classification des représentations simples par les classes de conjugaison d'éléments p-réguliers de G. Deux représentation projectives sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère de Brauer.

Exp 3 : Représentations modulaires de $GL_n(\mathbb{F}_p)$

Date : vendredi 23 novembre, orateur : Antoine.

Références : [1], l'exposé de Serre sur les travaux de Deligne et Lusztig (séminaire Bourbaki 1976), le livre de Carter : finite groups of Lie type.

Objectif : présenter des éléments de la théorie des représentations de $GL_n(\mathbb{F}_p)$, dont les grandes lignes de la théorie de Deligne-Lusztig. Plus précisément, il faut apporter des éclaircissements sur le contenu de la page 6 et du thm 3.7 page 7, dans le papier de Hai.

Exp 4 : Démonstration du théorème principal

Date : vendredi 30 novembre, orateur : Antoine.

Présenter les trois premières sections de [1], en particulier les démonstrations des thms 1.2, 1.3, 1.4.