Exposé 3 : Théorie des cogèbres de Koszul

Dans ce document, nous donnons un certain nombre de définitions équivalentes des cogèbres de Koszul (sur un anneau de base $\Bbbk$ commutatif quelconque). Sauf indication contraire, tous les objets sont des $\Bbbk$-modules et tous les produits tensoriels sont pris sur $\Bbbk$, et $M^{\otimes 0} = \Bbbk$. Toutes les cogèbres sont associatives, avec une counité.

Table des matières

1 Cogèbres à poids et algèbre homologique

1.1 Comodules, cotenseurs et cotor

1.1.1 Catégorie des comodules sur une cogèbre

Soit C une cogèbre sur un anneau commutatif $\Bbbk$. On note Δ_C la comultiplication de C et ϵ la counité. Si M est un comodule à droite ou à gauche, on note Δ_M l'application qui donne sa structure de comodule. On note C-comod la catégorie des C-comodules à gauche et comod-C la catégories des C-comodules à droite. Le lemme suivant est facile à vérifier.

Lemme 1.1. *Si la cogèbre C est un $\Bbbk$-module plat, alors les catégories C-comod et comod-C sont abéliennes.*

L'hypothèse de platitude de C sur $\Bbbk$ est absolument nécessaire pour que la catégorie soit abélienne, voir le contre-exemple donné en section 1.1.4. Si N est $\Bbbk$-module, on peut former le comodule induit à droite $N \otimes C$ (avec la structure de comodule donnée par $\Delta_{N\otimes C} = N \otimes \Delta_C$).

Lemme 1.2. *Soit C une $\Bbbk$-cogèbre. On a un isomorphisme naturel en $M \in$ comod-C et $N \in \Bbbk$-mod :*

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{comod-}C}(M, N \otimes C)\ .$$

En particulier, si N est un $\Bbbk$-module injectif, alors $N \otimes C$ est un C-comodule injectif.

Démonstration. L'isomorphisme est donné de gauche à droite par l'application $\phi \mapsto (\phi \otimes C) \circ \Delta_M$ et de droite à gauche par l'application $\psi \mapsto (N \otimes \epsilon) \circ \psi$. On vérifie facilement que ces deux applications sont bien définies et inverses l'une de l'autre. □

Le lemme 1.2 possède bien sûr un analogue pour les comodules à gauche. On s'en sert pour démontrer que les catégories de comodules ont assez d'injectifs.

Lemme 1.3. *Soit C une cogèbre, plate comme $\mathbb{k}$-module. Alors les catégories C-comod et comod-C ont assez d'injectifs.*

Démonstration. Soit M un C-comodule à droite. Alors $\Delta_M : M \xrightarrow{\Delta_M} M \otimes C$ est un application de comodules (le comodule à l'arrivée est le comodule induit). Elle est injective ($M \otimes \epsilon$ en est un rétract). Puis on peut plonger le $\mathbb{k}$-module M dans un $\mathbb{k}$-module injectif N. Comme C est $\mathbb{k}$-plate, on peut tensoriser par C pour obtenir une injection de comodules $M \otimes C \hookrightarrow N \otimes C$. En composant les deux injections, on obtient un plongement de M dans un C-comodule à droite qui est injectif d'après le lemme 1.2. □

1.1.2 Cotenseur et cotor

Rappelons que si A est une $\mathbb{k}$-algèbre, le produit tensoriel d'un A-module à droite M et d'un A-module à gauche N est défini comme le conoyau du morphisme :

$$\begin{array}{ccc} M \otimes A \otimes N & \to & M \otimes N \\ m \otimes a \otimes n & \mapsto & ma \otimes n - m \otimes an \end{array} .$$

On définit le produit cotensoriel de comodules sur une cogèbre de manière similaire.

Définition 1.4. Le *cotenseur* de $M \in$ Comod-C et $N \in C$-Comod est le $\mathbb{k}$-module $M \square_C N$ défini comme le noyau de l'application

$$\Delta_M \otimes N - M \otimes \Delta_N : M \otimes N \to M \otimes C \otimes N.$$

Le cotenseur est fonctoriel en M,N et additif relativement à chaque variable. On dispose également d'un analogue de la formule $M \otimes_A (A \otimes N) \simeq M \otimes N$ pour les produits cotensoriels.

Lemme 1.5. *On a un isomorphisme, naturel en $M \in \mathbb{k}$-mod et $N \in C$-comod :*

$$(M \otimes C) \square_C N \simeq M \otimes N \ .$$

Démonstration. Par définition $(M \otimes C) \square_C N$ est le noyau du morphisme

$$M \otimes \Delta_C \otimes N - M \otimes C \otimes \Delta_N : M \otimes C \otimes N \to M \otimes C \otimes C \otimes N \ .$$

Le morphisme $M \otimes \Delta_N : M \otimes N \to M \otimes C \otimes N$ est à valeurs dans $(M \otimes C) \square_C N$. Il nous faut donc montrer que le morphisme $M \otimes N \to (M \otimes C) \square_C N$ obtenu est un isomorphisme, ou de manière équivalente que le complexe $C^0 \to C^1 \to C^2$ suivant est exact en C^0 et en C^1 :

$$M \otimes N \xrightarrow{M \otimes \Delta_N} (M \otimes C) \otimes N \xrightarrow{M \otimes \Delta_C \otimes N - (M \otimes C) \otimes \Delta_N} (M \otimes C) \otimes C \otimes N \ .$$

On définit un morphisme $h^* : C^* \to C^{*-1}$ par $h^1 = M \otimes \epsilon \otimes N$ et $h^2 = M \otimes \epsilon \otimes C \otimes N$. C'est une homotopie en bas degrés :

$$h^1 \circ d^0 = \mathrm{Id}_{M \otimes N} \ , \qquad h^2 \circ d^1 + d^0 \circ h^1 = \mathrm{Id}_{M \otimes C \otimes N} \ .$$

Le complexe $C^0 \to C^1 \to C^2$ est donc exact en C^0 et C^1, d'où le résultat. □

Pour obtenir l'exactitude à gauche du cotenseur, on doit imposer des conditions supplémentaires de $\mathbb{k}$-projectivité.

Lemme 1.6. *Supposons que C est une cogèbre à poids $\mathbb{k}$-plate. Si $N \in C$-Comod (resp. $M \in$ Comod-C) est $\mathbb{k}$-plat , alors le foncteur $\square_C N$: Comod-$C \to \mathbb{k}$-mod (resp. $M \square_C$: C-Comod $\to \mathbb{k}$-mod) est exact à gauche.*

Si N est un C-comodule à gauche $\mathbb{k}$-plat[1], on définit pour tout $M \in$ comod-C le cotor comme les foncteurs dérivés à droite du produit cotensoriel par N :

$$\mathrm{Cotor}^i_C(M, N) := R^i(\square_C N)(M) \ .$$

[1]On peut en réalité définir les foncteurs $\mathrm{Cotor}^i_C(-, N)$ dans le cadre le plus général, sans aucune hypothèse sur N, en utilisant l'algèbre homologique relative (cf. [ML, Chap IX]). Le cas important pour nous est le cas $N = \mathbb{k}$, donc nous nous contenterons de cette version plus restrictive de la définition

1.1.3 Cas des cogèbres à poids

Si C est une cogèbre à poids, on note C-comod et comod-C les catégories de C-comodules à poids. Les objets sont les $\Bbbk$-modules à poids $M = \oplus_{i\geq 0} M^i$, muni d'une structure de C-comodule Δ_M qui préserve les poids[2]. Les morphismes préservent les poids. On vérifie facilement que tout ce qui a été énoncé aux deux sections précédentes s'adapte au cas des cogèbres à poids. En particulier on a les énoncés suivants.

Lemme 1.7. *Soit C une cogèbre à poids $\Bbbk$-plate.*

1. *Les catégories C-comod et comod-C sont abéliennes, avec assez d'injectifs.*
2. *Le produit cotensoriel de $M \in$ comod-C et de $N \in C$-comod est un sous $\Bbbk$-module à poids de $M \otimes N$.*

Notons o le foncteur d'oubli des poids. Soit $M \in$ comod-C et soit $N \in C$-comod, N $\Bbbk$-plat. Soit $J^\bullet$ une résolution injective de M dans la catégorie comod-C. Alors on a :

$$\mathrm{Cotor}^i_C(M,N) = H^i(J^\bullet \Box_C N) = H^i((oJ^\bullet)\Box_C(oN)) = \mathrm{Cotor}^i_{oC}(oM,oN)\,.$$

Comme le produit tensoriel de deux C-comodules à poids est un $\Bbbk$-module à poids, le complexe $J^\bullet \Box_C N$ est un complexe de $\Bbbk$-modules à poids et les différentielles préservent les poids. Son homologie est donc munie de poids. On a donc une décomposition selon les poids en chaque degré i :

$$\mathrm{Cotor}^i_C(M,N) = \bigoplus_{j\geq 0} \mathrm{Cotor}^{i,j}_C(M,N)\ .$$

(On vérifie aisément que cette décomposition ne dépend pas de la résolution injective choisie).

1.1.4 Contre-exemples

Dans ce paragraphe, nous montrons par des contre-exemples que les hypothèses de platitude sur $\Bbbk$ utilisées dans les sections précédentes sont bien nécessaires. Nous montrons tout d'abord que la catégorie des comodules sur une cogèbre peut ne pas être abélienne si la cogèbre n'est pas plate sur $\Bbbk$.

Exemple 1.8 (La catégorie des comodules n'est pas toujours abélienne)**.** Soit $\Bbbk = \mathbb{Z}$. On considère la cogèbre graduée $C = C^0 \oplus C^1$ avec $C_0 = \mathbb{Z}$, $C_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, engendré par un élément x et $\Delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$. La catégorie C-comod n'est pas abélienne.

Démonstration. Les C-comodules s'identifient avec les $\mathbb{Z}$-modules gradués M^*, muni d'un morphisme $\mathbb{Z}$-linéaire $\delta_M : M^* \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes M^{*-1}$. Un morphisme de C-comodules est une application $\mathbb{Z}$-linéaire graduée $\phi^* : M^* \to N^*$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M^* \arrow[r, "\phi_*"] \arrow[d, "\delta_M"] & N^* \arrow[d, "\delta_N"] \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes M^{*-1} \arrow[r, "\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\phi^{*-1}"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes N^{*-1} \end{tikzcd}\quad .$$

Supposons que C-comod est une catégorie abélienne. Notons $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'unique surjection, $\iota : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'application identité. On considère les C-comodules :

$$M := (M^0 = \mathbb{Z}, M^1 = \mathbb{Z}, \pi)\,,\quad N := (N^0 = \mathbb{Z}, N^1 = \mathbb{Z}, 0)\quad Q := (Q^0 = \mathbb{Z}/2Z, Q^1 = \mathbb{Z}/2Z, \iota)\ .$$

Alors le conoyau dans C-comod de la multiplication par 2, $M \to M$ est égal à Q, tout comme le conoyau de la multiplication par 2, $N \to M$. On a donc des suites exactes courtes dans C-comod :

$$0 \to M \xrightarrow{2\times} M \twoheadrightarrow Q \to 0\ .\qquad 0 \to N \xrightarrow{2\times} M \twoheadrightarrow Q \to 0$$

Mais $M \not\simeq N$, donc $M \twoheadrightarrow Q$ admet deux noyaux non isomorphes (contradiction). $\square$

[2]Dans cet exposé, contrairement aux deux exposés précédents, les poids sont notés en exposant. On utilise cette notation en exposant pour des raisons esthétiques (afin que l'information apportée par les poids se trouve à coté des graduations cohomologiques, comme dans '$\mathrm{Cotor}^{i,j}_C(\Bbbk,\Bbbk)$'). Le lecteur chagrin peut sans dommage noter lui-même tous les poids en indice.

Le lemme suivant montre que l'hypothèse de $\Bbbk$-platitude sur N est nécessaire pour que le foncteur $\square_C N$: comod-$C \to \Bbbk$-mod soit exact à gauche.

Lemme 1.9. *Soit C une cogèbre $\Bbbk$-plate. Le foncteur $\square_C N$ est exact à gauche si et seulement si N est $\Bbbk$-plat.*

Démonstration. Le lemme 1.6 montre que si N est $\Bbbk$-plat le foncteur $\square_C N$ est exact à gauche. Réciproquement, si $\square_C N$ est exact à gauche, alors pour toute suite exacte de $\Bbbk$-modules $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, la suite des cogèbres induites $0 \to M' \otimes C \to M \otimes C \to M'' \otimes C \to 0$ est exacte, donc la suite

$$0 \to (M' \otimes C)\square_C N \to (M \otimes C)\square_C N \to (M'' \otimes C)\square_C N$$

est exacte. D'après le lemme 1.5, cette suite est isomorphe à la suite $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N$. On en déduit que le foncteur $\otimes N$: $\Bbbk$-mod $\to \Bbbk$-mod est exact à gauche, donc exact. Donc N est $\Bbbk$-plat. $\square$

1.2 Comment calculer les cotor ? (I)

1.2.1 Une résolution acyclique d'un comodule

Nous commençons par le cas classique, sans les poids. Soit C une $\Bbbk$-cogèbre coaugmentée, i.e. équipée d'un morphisme de $\Bbbk$-cogèbres $\eta : \Bbbk \to C$. On note $C = \overline{C} \oplus \Bbbk$, où $\overline{C} = \ker \epsilon = \operatorname{coker} \eta$. On note $\overline{\Delta} : C \to C \otimes C$ la 'diagonale réduite' $\overline{\Delta}(x) := \Delta_C(x) - x \otimes 1 - 1 \otimes x$. Soit M un C-comodule à droite, avec application de structure $\Delta_M : M \to M \otimes C$, et soit $\overline{\Delta}_M$ la composée $M \to M \otimes C \to M \otimes \overline{C}$.

Nous pouvons maintenant définir la *cobar construction (normalisée) à coefficients à gauche* $\Omega(M, C, C)$. C'est le complexe de C-comodules à droite défini de la manière suivante.

- En tant que C-comodule, la partie $\Omega(M, C, C)^i$ de degré i de $\Omega(M, C, C)$ est le comodule induit :

$$\Omega(M, C, C)^i = M \otimes (\overline{C})^{\otimes i} \otimes C\ .$$

- La différentielle $d : \Omega(M, C, C)^i \to \Omega(M, C, C)^{i+1}$ est le morphisme de C-comodules à droite donné par la formule :

$$\begin{aligned} d(m \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_i \otimes c) := & -\overline{\Delta}_M(m) \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_i \otimes c \\ & + \sum_{k=1}^{i} (-1)^{k-1} m \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes \overline{\Delta}(c_k) \otimes \cdots \otimes c_i \otimes c \\ & + (-1)^i m \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_i \otimes \overline{\Delta}_C(c). \end{aligned}$$

Si maintenant C est une $\Bbbk$-cogèbre à poids coaugmentée et si $M \in$ comod-C, alors chaque $\Omega(M, C, C)^i$ est un C-comodule à poids et la différentielle préserve les poids. Le complexe $\Omega(M, C, C)$ possède la propriété essentielle suivante.

Proposition 1.10. *Soit C une $\Bbbk$-cogèbre à poids coaugmentée, alors $\Omega(M, C, C)$ est une résolution de M dans la catégorie comod-C (i.e. son homologie est nulle en degré non nul, et vaut M en degré zéro).*

Si de plus C et M sont $\Bbbk$-plats alors pour tout $N \in C$-comod $\Bbbk$-plat, $\Omega(M, C, C)$ est une résolution de M par des modules $\square_C N$-acycliques[3].

Démonstration. La démonstration est similaire au cas des bar constructions des algèbres : l'image de $\Delta_M : M \to \Omega^0(M, C, C) = M \otimes C$ est à valeurs dans les cycles de $\Omega(M, C, C)$. Il suffit donc de montrer que l'application de complexes de C-comodules (où M est un complexe avec différentielle nulle concentré en degré zéro) $M \to \Omega(M, C, C)$ correspondante est un quasi-isomorphisme. Pour cela, il nous suffit de montrer que c'est une équivalence d'homotopie de complexes de $\Bbbk$-modules. L'inverse est le morphisme : $M \otimes \epsilon : M \otimes C \to M$. En effet, on a $(M \otimes \epsilon) \circ \Delta_M = \mathrm{Id}_M$ et $\Delta_M \circ (M \otimes \epsilon)$ est homotope à l'identité via l'homotopie $h^* : \Omega(M, C, C)^* \to \Omega(M, C, C)^{*-1}$ définie par $h^i = M \otimes \overline{C}^{\otimes i} \otimes \epsilon$[4].

[3] Rappelons que l'on a besoin que N soit $\Bbbk$-plat pour que $\square_C N$ soit exact à gauche et donc pour que les foncteurs dérivés $\mathrm{Cotor}^i_C(-, N)$ soient définis (et donc pour que cette $\square_C N$-acyclicité ait un sens).

[4] Comparez avec la démonstration du lemme 1.5.

Il nous reste à montrer que si N est $\mathbb{k}$-plat, les comodules induits $M \otimes \overline{C}^{\otimes i} \otimes C$ sont $\square_C N$-acycliques. Cela résulte de la formule du lemme 1.5. En effet, soit $J^\bullet$ une resolution de $M \otimes \overline{C}^{\otimes i}$ par des $\mathbb{k}$-modules injectifs. Alors $J^\bullet \otimes C$ est une résolution de $M \otimes \overline{C}^{\otimes i} \otimes C$ par des C-comodules injectifs. On a donc :

$$\mathrm{Cotor}^i(M\overline{C}^{\otimes i} \otimes C, N) = H^i((J^\bullet \otimes C)\square_C N) \simeq H^i(J^\bullet \square_C N) .$$

Comme N est $\mathbb{k}$-plat, cela vaut $M \otimes \overline{C}^{\otimes i} \otimes N$ si $i = 0$ et zéro sinon. $\square$

1.2.2 La cobar construction à coefficients des deux cotés

Soit C une $\mathbb{k}$ cogèbre à poids coaugmentée, $M \in$ comod-C et $N \in C$-comod des C-comodules $\mathbb{k}$-plats. La *cobar construction à coefficients des deux cotés* $\Omega(M, C, N)$ est le complexe de $\mathbb{k}$-modules à poids défini par $\Omega(M, C, N) := \Omega(M, C, C)\square_C N$.

D'après la proposition 1.10, ce complexe calcule les groupes de cotorsion entre M et N :

$$\mathrm{Cotor}_C^{i,j}(M, N) = H^{i,j}(\Omega(M, C, N))$$

où l'on note $H^{i,j}$ la partie de poids j et de degré i de de l'homologie d'un complexe de $\mathbb{k}$-modules à poids.

1.2.3 La cobar construction réduite et la structure d'algèbre de $\mathrm{Cotor}_C^{*,*}(\mathbb{k}, \mathbb{k})$

Nous nous intéressons maintenant au cas où C est une cogèbre à poids coaugmentée $\mathbb{k}$-projective et où $M = N = \mathbb{k}$. La *cobar construction (réduite)* $\Omega(C)$[5] est le complexe de $\mathbb{k}$-modules à poids $\Omega(C) = \Omega(\mathbb{k}, C, \mathbb{k})$. Plus précisément :

- La partie $\Omega(C)^i$ de degré i de $\Omega(M, C, C)$ est le $\mathbb{k}$-module gradué à poids : $\Omega(C)^i = (\overline{C})^{\otimes i}$.
- La différentielle $d : \Omega(C)^i \to \Omega(C)^{i+1}$ est le morphisme de $\mathbb{k}$-modules à poids donné par la formule :

$$d(c_1 \otimes \cdots \otimes c_i) := \sum_{k=1}^{i} (-1)^{k-1} c_1 \otimes \cdots \otimes \overline{\Delta}(c_k) \otimes \cdots \otimes c_i$$

Le complexe $\Omega(C)$ possède en fait une structure de $\mathbb{k}$-algèbre différentielle graduée à poids. la multiplication est simplement donnée par l'opération de concaténation des tenseurs.

- La multiplication $m : \Omega^i(C) \otimes \Omega^j(C) \to \Omega^{i+j}(C)$ est donnée par la formule :

$$(c_1 \otimes \cdots \otimes c_i) \cdot (c_{i+1} \otimes \cdots \otimes c_{i+j}) := c_1 \otimes \cdots \otimes c_{i+j} .$$

Comme $\Omega(C)$ est une algèbre différentielle graduée à poids, son homologie $\mathrm{Cotor}_C^{*,*}(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ est une algèbre graduée à poids.

Dans la suite, nous serons amenés à considérer des cogèbres à poids C connexes, c'est à dire $C_0 = \mathbb{k}$. Dans ce cas, on voit sur la définition de $\Omega(C)$ la relation suivante entre les degrés i et les poids j :

$$\Omega(C)^{i,j} = 0 \text{ si } i > j .$$

Par conséquent l'homologie diagonale $\mathrm{Cotor}_C^{i,i}(\mathbb{k}, \mathbb{k}) = H^{i,i}(\Omega(C))$ est le conoyau de différentielle $d : \Omega(C)^{i+1,i} \to \Omega(C)^{i,i}$. Nous récapitulons toutes ces propriétés dans la proposition suivante.

Proposition 1.11. *Soit C une $\mathbb{k}$-cogèbre à poids connexe et $\mathbb{k}$-plate.*

1. *La cobar construction $\Omega(C)$ est une algèbre différentielle graduée à poids. Ainsi les groupes de cotorsion $\mathrm{Cotor}_C^{*,*}(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ forment une algèbre graduée à poids.*
2. *Si $i > j$ alors $\Omega(C)^{i,j} = 0$ et on a un morphisme surjectif d'algèbres différentielles graduées à poids (où la différentielle est nulle sur $H^{i,i}(\Omega(C))$)*

$$\Omega(C) \to \bigoplus_{i \geq 0} H^{i,i}(\Omega(C)) .$$

[5]Pour plus de cohérence avec le cas des bar constructions, il faudrait noter la cobar construction réduite $\overline{\Omega}(C)$. Nous n'utilisons pas cette notation, car contrairement à la notation $\overline{B}(A)$ pour la bar construction réduite, elle ne semble pas avoir été utilisée dans la littérature.

1.3 Comment calculer les cotor ? (II)

La cobar construction réduite est souvent trop grosse pour permettre des calculs explicites de $\mathrm{Cotor}_C^{*,*}(\Bbbk, \Bbbk)$. Nous expliquons dans cette section comment on peut la remplacer (dans les cas de faveur) par un complexe plus petit.

1.3.1 Complexes de type Koszul

Soit C une cogèbre à poids $\Bbbk$-plate connexe, soit A une algèbre à poids connexe sur $\Bbbk$, et soit $\alpha : C^1 \to A^1$ un morphisme $\Bbbk$-linéaire. Alors on peut faire du C-module induit $A \otimes C$ un C-comodule gradué en imposant :

- Les éléments de degré i de $A \otimes C$ sont les éléments de $A^i \otimes C$.

On utilise ensuite α pour définir un morphisme de C-comodules à droite d_α, de degré 1. Plus précisément :

- d_α est la composée (ou par abus de notation, on note Δ pour la comultiplication de C suivie de la projection sur le facteur $C^1 \otimes C$) :

$$A^i \otimes C \xrightarrow{A^i \otimes \Delta} A^i \otimes C^1 \otimes C \xrightarrow{A^i \otimes \alpha \otimes C} A^i \otimes A^1 \otimes C \xrightarrow{m \otimes C} A^{i+1} \otimes C \;.$$

On fait la remarque suivante, qui sera utilisée plusieurs fois dans la suite.

Remarque 1.12. Si l'on oublie les graduations, le couple $(A \otimes C, d_\alpha)$ s'identifie au complexe de type Koszul défini pour la théorie des algèbres de Koszul (section 1.4.1 de l'exposé précédent).

Un morphisme α est dit tordant si $d_\alpha^2 = 0$, i.e. si $(A \otimes C, d_\alpha)$ est un complexe. C'est un morphisme de Koszul si ce complexe est acyclique. La remarque 1.12 montre que la notion coincide avec les définitions données à l'exposé précédent, section 1.4.1. En particulier, on obtient le lemme suivant.

Lemme 1.13. $\alpha : C^1 \to A^1$ *est un morphisme tordant si et seulement si la composée suivante est égale à zéro.*

$$C^2 \xrightarrow{\Delta} C^1 \otimes C^1 \xrightarrow{\alpha \otimes \alpha} A^1 \otimes A^1 \xrightarrow{m} A^2 \;.$$

1.3.2 Résolutions linéaires $\square_C\Bbbk$-acycliques

Définition 1.14. Soit C une $\Bbbk$-cogèbre à poids connexe et $\Bbbk$-plate. Une *résolution linéaire* $\square_C\Bbbk$*-acyclique* du C-module à droite $\Bbbk$ est une résolution :

$$\Bbbk \to J^0 \to J^1 \to \cdots \to J^i \to \dots$$

où les J^i sont des C-modules à droite $\square_C\Bbbk$-acycliques, et coengendrés en poids i, i.e. la composition suivante est injective ($J^{i,i}$ dénote les éléments de poids i de J^i)

$$\Delta_{J^i} : J^i \xrightarrow{\Delta_{J^i}} J^i \otimes C \twoheadrightarrow J^{i,i} \otimes C \;,$$

et où les morphismes sont des morphismes de C-comodules.

Lemme 1.15. *Si $M \in$ comod-C est coengendré en poids i, alors $M\square_C\Bbbk \simeq M^i$ est concentré en poids i.*

Démonstration. Premièrement, la condition d'être coengendrée en poids i implique que $M^k = 0$ pour $k < i$ (en effet $M^i \otimes C$ ne contient que des éléments de poids supérieur ou égal à i). Notons η le morphisme $\Bbbk \to C$. Le $\Bbbk$-module à poids $M\square_C\Bbbk$ est défini comme le noyau du morphisme

$$\Delta_M - M \otimes \eta : M \to M \otimes C \;.$$

En poids i ce morphisme est nul. Donc $(M\square_C\Bbbk)^i \simeq M^i$. En poids $k > i$, ce morphisme possède une composante du type $\Delta_M : M^k \to M^i \otimes C^{k-i}$, qui est injective. Donc $(M\square_C\Bbbk)^k \simeq 0$ pour $k > i$. $\square$

Ainsi, si $J^\bullet$ est une résolution linéaire $\square_C\mathbb{k}$-acyclique de $\mathbb{k}$, le complexe de $\mathbb{k}$-modules à poids $J^\bullet\square_C\mathbb{k}$ est concentré en poids i en degré i. Ses différentielles sont donc nulles puisqu'elles préservent les poids, et on obtient donc facilement le calcul des groupes de cotorsion :

$$\mathrm{Cotor}_C^{i,j}(\mathbb{k},\mathbb{k}) = H^{i,j}(J^\bullet\square_C\mathbb{k}) = \quad 0 \text{ si } i \neq j \ , \quad J^{i,i} \text{ si } i = j.$$

Tout le problème est donc de trouver de telles résolutions linéaires acycliques. Les complexes de type Koszul de la section précédente en fournissent.

Exemple 1.16. Si C est une $\mathbb{k}$-cogèbre à poids connexe et $\mathbb{k}$-plate, les complexes de type Koszul du paragraphe précédent sont un moyen de produire des résolutions linéaires $\square_C\mathbb{k}$-acycliques de $\mathbb{k}$. En effet, supposons que A est une algèbre à poids et que $\alpha : C^1 \to A^1$ est un morphisme de Koszul. Alors les C-comodules induits $A^i \otimes C$ sont $\square_C\mathbb{k}$-acycliques (voir la démonstration de la proposition 1.10), et coengendrés en poids i. Donc le complexe $(A \otimes C, d_\alpha)$ est un résolution linéaire $\square_C\mathbb{k}$-acyclique de $\mathbb{k}$.

2 Théorie des cogèbres de Koszul

Théorème-Définition 2.1. *Soit C une $\mathbb{k}$-cogèbre à poids, connexe et $\mathbb{k}$-plate. On note A l'algèbre à poids définie par $A^i := \mathrm{Cotor}_C^{i,i}(\mathbb{k},\mathbb{k})$. La cogèbre C est dite* de Koszul *si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes.*

(1) Pour tout $i, j \geq 0$, $\mathrm{Cotor}_C^{i,j}(\mathbb{k},\mathbb{k}) = 0$ si $i \neq j$.

(2) L'homologie du complexe cobar réduit $\Omega(C)$ est concentrée sur la diagonale.

(3) La surjection $\Omega(C) \twoheadrightarrow A$ est un quasi-isomorphisme.

(4) Le morphisme $\Omega(C)^{1,1} = C^1 \to A^1$ est un morphisme de Koszul.

(5) L'anneau $\mathbb{k}$ admet une résolution linéaire $\square_C\mathbb{k}$-acyclique.

Si C est une algèbre de Koszul, l'algèbre à poids A est notée $C^{¡}$ et est baptisée algèbre duale de A.

Démonstration.

- L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) découle des généralités d'algèbre homologique rappelées dans la section 1.2.
- L'implication (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1) découle des généralités d'algèbre homologique rappelées dans la section 1.3.
- L'implication (3) $\Rightarrow$ (4) se démontre comme dans le cas des algèbres de Koszul (voir la démontration rédigée dans le cas des algèbres pour l'exposé précédent).

□

De plus, nous avons vu à la remarque 1.12 que pour un morphisme $\alpha : C_1 \to A_1$, être de Koszul au sens de l'exposé précédent est équivalent à être de Koszul au sens développé dans cet exposé. On obtient donc en prime le résultat suivant.

Théorème 2.2 (Bidualité). *Soit A une $\mathbb{k}$-algèbre à poids connexe et $\mathbb{k}$-plate. Si A est de Koszul et si sa cogèbre duale $A^{¡}$ est $\mathbb{k}$-plate, alors sa cogèbre duale est une cogèbre de Koszul, et on a*

$$(A^{¡})^{¡} = A \ .$$

Soit C une $\mathbb{k}$-cogèbre à poids connexe et $\mathbb{k}$-plate. Si C est de Koszul et si son algèbre duale $C^{¡}$ est $\mathbb{k}$-plate, alors son algèbre duale est une algèbre de Koszul, et on a

$$(C^{¡})^{¡} = C \ .$$

Références

[Car] H. Cartan, Séminaire Henri Cartan de l'École Normale supérieure, 1954/1955. Algèbres d'Eilenberg Mac Lane et homotopie, Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris, 1955 (French). Available online on www.numdam.org

[ML] S. Mac Lane, Homology. Reprint of the 1975 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. x+422 pp. ISBN : 3-540-58662-8.

[PP] A. Polishchuk, L. Positselski, Quadratic algebras. University Lecture Series, 37. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. xii+159 pp. ISBN : 0-8218-3834-2.