Exposés 1 et 2 : Théorie des algèbres de Koszul

Dans cet exposé, nous donnons un certain nombre de définitions équivalentes des algèbres de Koszul (sur un anneau de base $\mathbb{k}$ commutatif quelconque). Sauf indication contraire, tous les objets sont des $\mathbb{k}$-modules et tous les produits tensoriels sont pris sur $\mathbb{k}$, et $M^{\otimes 0} = \mathbb{k}$.

Table des matières

1 Algèbres à poids et algèbre homologique

1.1 Pourquoi des algèbres *à poids* ?

La théorie des algèbres de Koszul utilise des bar constructions. La bar construction d'une algèbre non graduée A est un objet muni d'un degré homologique. Si en outre A est graduée, la graduation de A fait apparaître un deuxième degré sur la bar construction. Pour faire plus facilement la distinction entre degré homologique et degré provenant de la graduation de A, nous réservons le mot 'degré' pour le degré homologique, et nous appelons 'poids' la graduation d'une algèbre, et les graduations qui s'en déduisent[1].

1.2 Algèbres à poids, groupes de torsion et d'extensions

1.2.1 Algèbres à poids

Définition 1.1.

1. Un $\mathbb{k}$-module à poids est un $\mathbb{k}$-module M, muni d'une décomposition $M = \bigoplus_{i\geq 0} M_i$. Le produit tensoriel de $\mathbb{k}$-modules à poids est un $\mathbb{k}$-module à poids, avec $(M\otimes N)_i := \bigoplus_{k+\ell=i} M_k\otimes N_\ell$.
2. Une algèbre à poids est un $\mathbb{k}$-module à poids A, muni d'une multiplication $A\otimes A\to A$ qui envoie $A_i\otimes A_j$ dans A_{i+j}. Elle est *augmentée* si on dispose d'un morphisme d'algèbres $\epsilon : A\to \mathbb{k}$ qui préserve les poids ($\mathbb{k}$ concentré en poids zéro). Elle est dite *connexe* si $A_0=\mathbb{k}$.
3. Si A est une algèbre à poids, un A-module à gauche M est un $\mathbb{k}$-module à poids M, muni de morphismes $A_i\otimes M_j\to M_{i+j}$ vérifiant l'axiome usuel d'associativité :

$$(a\cdot(b\cdot m)) = (ab)\cdot m\,.$$

[1] Une autre solution, adoptée dans [PP], consiste à appeler 'degré interne' le second degré qui apparaît sur la bar construction

On définit de même les cogèbres à poids, les comodules sur les cogèbres à poids, etc.

Exemple 1.2. Soit M un $\Bbbk$-module projectif. On peut former les exemples suivants d'algèbres à poids sur $\Bbbk$.

1. **Algèbre tensorielle.** On note $T(M)$ l'algèbre à poids definie de la façon suivante. Comme $\Bbbk$-module, $T(M) = \bigoplus_{i\geq 0} M^{\otimes i}$. Le poids d'un tenseur élémentaire $v_1 \otimes \cdots \otimes v_i$ est égal à i. La multiplication est la concaténation
$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \cdot (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).$$
2. **Algèbre extérieure.** On note $\Lambda(M)$ le quotient de $T(M)$ par l'idéal (bilatère) engendré par les éléments du type $x \otimes x$, où $x \in M$.
3. **Algèbre symétrique.** On note $S(M)$ le quotient de $T(M)$ par l'idéal (bilatère) engendré par les éléments du type $x \otimes y - y \otimes x$, où $x, y \in M$.

Exemple 1.3. Soit M un $\Bbbk$-module projectif. On peut former les exemples suivants de cogèbres à poids sur $\Bbbk$.

1. **Cogèbre tensorielle.** On note $T^c(M)$ la cogèbre à poids definie de la façon suivante. Comme $\Bbbk$-module, $T^c(M) = \bigoplus_{i\geq 0} M^{\otimes i}$. Le poids d'un tenseur élémentaire $v_1 \otimes \cdots \otimes v_i$ est égal à i. La comultiplication est donnée par la
$$\Delta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sum_{i=0}^{n} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \cdot (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n).$$
2. **Cogèbre 'des puissances divisées'.** On note $\Gamma(M)$ la sous-cogèbre de $T^c(M)$ formée en chaque poids n des éléments de $M^{\otimes n}$ invariants sous l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ qui agit en permutant les facteurs du produit tensoriel (sans signe).
3. **Cogèbre extérieure.** On note $\Lambda^c(M)$ la sous-cogèbre de $T^c(M)$ formée en chaque poids n des éléments de $M^{\otimes n}$ qui sont dans l'intersection des noyaux des applications q_i, $1 \leq i \leq n-1$:
$$q_i : M^{\otimes i-1} \otimes M^{\otimes 2} \otimes M^{\otimes n-i-1} \twoheadrightarrow M^{\otimes i-1} \otimes S^2(M) \otimes M^{\otimes n-i-1} \ .$$
Si 2 est inversible dans $\Bbbk$, l'ensemble $(\Lambda^c)^n(M)$ des éléments de poids n est égal au invariants sous l'action de permutation signée des facteurs de $M^{\otimes n}$ par le groupe symétrique (i.e. σ agit sur $M^{\otimes n}$ en permutant les facteurs, avec un signe $\epsilon(\sigma)$)

1.2.2 Groupes de torsion sur une algèbre à poids

Soit A une $\Bbbk$-algèbre à poids. On note A-mod la categorie des A-modules à poids à gauche, et mod-A celle des A-modules à poids à droite. Dans ces deux catégories, les morphismes préservent les poids. Le lemme suivant est élémentaire.

Lemme 1.4. *Les catégories A-mod et mod-A sont abéliennes avec assez de projectifs.*

On définit le foncteur produit tensoriel sur A
$$- \otimes_A - : \text{mod-}A \times A\text{-mod} \to \Bbbk\text{-mod}$$
de la manière suivante : $M \otimes_A N := (oM) \otimes_{oA} (oN)$ où o désigne le foncteur d'oubli des poids (donc oA est juste une algèbre et oM et oN des oA-modules). Le foncteur $M \otimes_A -$ est additif et exact à droite, on peut donc le dériver (à gauche), on note $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$ ses foncteurs dérivés.

Nous expliquons maintenant comment définir des poids sur ces $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$. Soit $P_\bullet$ une résolution plate de N dans A-mod, on a
$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N) = H_i(M \otimes_A P_\bullet) = H_i((oM) \otimes_{oA} (oP_\bullet)) = \mathrm{Tor}_i^{oA}(oM, oN) \ .$$

On fait la remarque importante suivante :

Remarque : Il existe une unique structure de $\Bbbk$-module à poids sur $M \otimes_A N$ telle que l'application quotient $M \otimes N \twoheadrightarrow M \otimes_A N$ préserve les poids.

Ainsi chaque $M \otimes_A P_i$ est un $\Bbbk$-module à poids, et la différentielle préserve le poids. En d'autres termes, le complexe $M \otimes_A P_\bullet$ scinde comme une somme directe de sous-complexes homogène par rapport au poids. En conséquence, $\mathrm{Tor}_i(M,N)$ est un $\Bbbk$-module à poids (on vérifie facilement que les poids obtenus ne dépendent pas du choix de la résolution $P_\bullet$) :

$$\mathrm{Tor}_i^A(M,N) = \bigoplus_{j\geq 0} \mathrm{Tor}_{i,j}^A(M,N)\ .$$

1.2.3 Groupes d'extensions sur une algèbre à poids

Soit A une algèbre à poids sur $\Bbbk$. On peut définir un foncteur de suspension des poids $\Sigma : A\text{-mod} \to A\text{-mod}$ par $(\Sigma M)_i = M_{i-1}$. On définit les groupes d'extensions à poids :

$$\mathrm{Ext}_A^{i,j}(N,M) := \mathrm{Ext}^i_{A\text{-mod}}(N, \Sigma^j M)\ .$$

Nous expliquons maintenant comment relier ces groupes d'extension à poids aux groupes de torsion définis précédemment. Nous supposons que A est connexe, de façon à ce que le $\Bbbk$-module $\Bbbk$ (concentré en poids zéro) soit muni d'une unique structure de A-module à poids à gauche et à droite.

Lemme 1.5. *Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif tel que $\Bbbk$ soit injectif comme $\Bbbk$-module, et soit A une algèbre à poids sur $\Bbbk$, connexe. On a un isomorphisme, naturel en $N \in A$-mod :*

$$\mathrm{Ext}_A^{i,j}(N,\Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}_\Bbbk(\mathrm{Tor}_{i,j}^A(\Bbbk,N),\Bbbk)\ .$$

Démonstration. Par définition du produit tensoriel, la partie homogène de poids j de $\Bbbk \otimes_A N$ est égale au quotient de N_j par le sous-$\Bbbk$-module engendré par les produits $a_k \cdot n_{j-k}$ où $a_k \in A_k$, $k \geq 1$ et $n_{j-k} \in N_{j-k}$. On a donc un isomorphisme, naturel en N :

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(N, \Sigma^j \Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}_\Bbbk((\Bbbk \otimes_A N)_j, \Bbbk)\ .$$

En prenant une résolution projective $P_\bullet$ de N dans A-mod, on obtient un isomorphisme de complexes de $\Bbbk$-modules

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(P_\bullet, \Sigma^j \Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}_\Bbbk((\Bbbk \otimes_A P_\bullet)_j, \Bbbk)\ .$$

L'homologie du membre de gauche est égale à $\mathrm{Ext}_A^{*,j}(N,\Bbbk)$, et comme $\Bbbk$ est injectif sur $\Bbbk$, celle du membre de droite est égale à $\mathrm{Hom}_\Bbbk(\mathrm{Tor}^A_{*,j}(\Bbbk,N),\Bbbk)$. □

1.3 Comment calculer les groupes de torsion sur une algèbre ? (I)

Dans ce paragraphe, nous donnons un 'complexe standard' $B(M,A,N)$ qui calcule les groupes de torsion $\mathrm{Tor}_{i,j}^A(M,N)$ (lorsque l'algèbre A est plate en tant que $\Bbbk$-module, et augmentée).

1.3.1 Une résolution A-plate de N

Commençons par rappeler le cas classique, sans les poids[2]. Soit A une $\Bbbk$-algèbre augmentée, $A = \overline{A} \oplus \Bbbk$, et soit $N \in A$-mod. La *bar construction (normalisée) à coefficients à droite* est le complexe de A-modules $B(A,A,N)$ défini de la manière suivante.

- En tant que $\Bbbk$-module, la partie $B(A,A,N)_i$ de degré i de $B(A,A,N)$ est donnée par

$$B(A,A,N)_i = A \otimes (\overline{A})^{\otimes i} \otimes N\ .$$

  Un élément $a \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes n \in B(A,A,N)_i$ se note de façon compacte $a[a_1|\ldots|a_i]n$, et $a \otimes n \in B(A,A,N)_0$ se note $a[\,]n$.

[2]Un référence est [ML, X.2].

- La structure de A-module sur $B(A,A,N)_i$ est donnée par la formule :

$$b\cdot(a[a_1|\dots|a_i]n) := (ba)[a_1|\dots|a_i]n\ .$$

- La différentielle $d : B(A,A,N)_i \to B(A,A,N)_{i-1}$ A-linéaire est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} d(a[a_1|\dots|a_i]n) := \quad & aa_1[a_2|\dots|a_p]n \\ & + \sum_{k=2}^{i}(-1)^{k-1}a[a_1|\dots|a_{k-1}a_k|\dots|a_i]n \\ & + (-1)^i a[a_2|\dots|a_{i-1}]a_i n. \end{aligned}$$

Si maintenant A est une $\mathbb{k}$-algèbre à poids augmentée et si $N \in A$-mod, alors chaque $B(A,A,N)_i$ est un A-module à poids : le poids d'un élément $a[a_1|\dots|a_i]n$ est simplement la somme des poids de a, des a_i, et de n. Il est évident d'après les définitions que la différentielle préserve les poids. Le complexe $B(A,A,N)$ possède la propriété essentielle suivante.

Proposition 1.6. *Soit A une $\mathbb{k}$-algèbre à poids augmentée, alors $B(A,A,N)$ est une résolution de N (i.e. son homologie est nulle en degré non nul, et vaut N en degré zéro).*

Si de plus A et N sont $\mathbb{k}$-plats, alors $B(A,A,N)$ est une résolution A-plate de N.

Démonstration. On définit un morphisme de A-modules $f : B(A,A,N)_0 = A\otimes N \to N$ par $f(a[]n) = an$. On a $f\circ d = 0$, de sorte que si l'on considère N comme un complexe de A-modules à poids (concentré en degré zéro), $\epsilon\otimes N$ définit un morphisme de complexes de A-modules $B(A,A,N)\to N$.

Pour montrer la première partie de la proposition, nous devons montrer que le morphisme f est un quasi-isomorphisme. Pour cela, il suffit de montrer que c'est une equivalence d'homotopie de complexes de $\mathbb{k}$-modules. Définissons un morphisme de complexes de $\mathbb{k}$-modules : $\eta : N \to B(A,A,N)$, $n\mapsto 1\otimes n$. Alors $f\circ\eta$ est égal à l'identité de N et $\eta\circ f$ est homotope à l'identité de $B(A,A,N)$ via l'homotopie $h : a[a_1|\dots|a_i]n \mapsto [a-\epsilon(a)|a_1|\dots|a_i]n$.

Finalement, si A et N sont $\mathbb{k}$-plats, alors $(\overline{A})^{\otimes i}\otimes N$ est $\mathbb{k}$-plat et les A-modules $B(A,A,N)_i$ sont A-plats en vertu de l'isomorphisme, naturel en $M\in$ mod-A :

$$M\otimes_A (A\otimes(\overline{A})^{\otimes i}\otimes N) \simeq M\otimes(\overline{A})^{\otimes i}\otimes N\ .$$

Ainsi $B(A,A,N)$ est une résolution de N par des A-modules à poids A-plats. □

1.3.2 La bar construction à coefficients des deux cotés

Soit A une $\mathbb{k}$-algèbre à poids augmentée, soit $M\in$ mod-A et $N\in A$-mod. La *bar construction à coefficients des deux cotés* $B(M,A,N)$ est le complexe de $\mathbb{k}$-modules à poids défini par $B(M,A,N) := M\otimes_A B(A,A,N)$.

Comme corollaire de la proposition 1.6, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 1.7. *Soit A une $\mathbb{k}$-algèbre à poids augmentée, $M\in$ mod-A et $N\in A$-mod. Supposons que A et N soient des $\mathbb{k}$-modules plats. Alors*

$$\mathrm{Tor}^A_{i,j}(M,N) = H_{i,j}(B(M,A,N))\ ,$$

où $H_{i,j}$ dénote la partie de poids j du i-ème groupe d'homologie d'un complexe de $\mathbb{k}$-modules à poids.

1.3.3 Structure de $\mathrm{Tor}^A_{i,j}(\mathbb{k},\mathbb{k})$ et bar construction réduite

Soit A une $\mathbb{k}$-algèbre à poids augmentée, le complexe de $\mathbb{k}$-modules à poids $B(\mathbb{k},A,\mathbb{k})$ s'appelle la *bar construction réduite de A*. Nous la notons $\overline{B}(A)$ comme dans [Car] ou dans [ML, Chap X]. De manière explicite :

- La composante $\overline{B}(A)_i$ de degré i de $\overline{B}(A)$ est le $\mathbb{k}$-module à poids $\overline{A}^{\otimes i}$. Un élément $a_1\otimes\dots\otimes a_i\in\overline{A}^{\otimes i}$ est noté $[a_1|\dots|a_i]$, et $1\in\mathbb{k}=\overline{A}^{\otimes 0}$ est noté $[\,]$.

- La différentielle ($\Bbbk$-linéaire, qui préserve les poids) $d : \overline{B}(A)_i \to \overline{B}(A)_{i-1}$ est donnée par la formule :

$$d([a_1|\dots|a_i]) := \sum_{k=2}^{i} (-1)^{k-1}[a_1|\dots|a_{k-1}a_k|\dots|a_i]\ .$$

La bar construction réduite possède en fait une structure supplémentaire : c'est une $\Bbbk$-cogèbre différentielle graduée à poids.

- La comultiplication $\Delta : \overline{B}(A) \to \overline{B}(A) \otimes \overline{B}(A)$ est donnée par l'opération de déconcaténation :

$$\Delta([a_1|\dots|a_i]) = \sum_{k=0}^{i} [a_1|\dots|a_k] \otimes [a_{k+1}|\dots|a_i]\ .$$

En particulier, si $\Bbbk$ est un corps, l'homologie de $\overline{B}(A)$ (c'est à dire $\mathrm{Tor}^A_{i,j}(\Bbbk,\Bbbk)$) est une $\Bbbk$-cogèbre graduée à poids. Ce n'est pas vrai sur un anneau quelconque, car le théorème de Künneth tombe en défaut[3]. Néanmoins, sous l'hypothèse supplémentaire que A est connexe, on peut toujours munir l'homologie diagonale $H_{i,i}(\overline{B}(A))$ d'une structure de $\Bbbk$-cogèbre graduée à poids. En effet, $\overline{A}$ ne contient que des éléments de poids strictement positifs. En notant $\overline{B}(A)_{i,j}$ la partie de degré i et de poids j de $\overline{B}(A)$, on a donc

$$\overline{B}(A)_{i,j} = 0 \text{ pour } j < i, \text{ et } H_{i,i}\left(\overline{B}(A)\right) = \ker\left(\overline{B}(A)_{i,i} \xrightarrow{d} \overline{B}(A)_{i-1,i}\right)$$

Ainsi $\bigoplus_{i\ge 0} H_{i,i}(\overline{B}(A))$ est un sous $\Bbbk$-module gradué à poids de $\overline{B}(A)$. Comme $\overline{B}(A)$ est une $\Bbbk$-cogèbre différentielle graduée à poids, on récupère que $H_{i,i}(\overline{B}(A))$ est stable par la comultiplication de $\overline{B}(A)$.

En résumé on a la proposition suivante.

Proposition 1.8. *Soit A une $\Bbbk$-algèbre à poids connexe. Alors :*

1. *$\overline{B}(A)$ est une $\Bbbk$-cogèbre différentielle graduée à poids.*
2. *$\overline{B}(A)_{i,j} = 0$ pour $j < i$ et $\bigoplus_{i\ge 0} H_{i,i}(\overline{B}(A))$ est une sous-cogèbre graduée à poids de $\overline{B}(A)$, connexe.*

En particulier, si A est un $\Bbbk$-module plat, $\mathrm{Tor}^A_{i,j}(\Bbbk,\Bbbk) = 0$ pour $j > i$ et $\bigoplus_{i\ge 0} \mathrm{Tor}_{i,i}(\overline{B}(A))$ a une structure de $\Bbbk$-cogèbre différentielle graduée à poids, connexe.

1.4 Comment calculer les groupes de torsion sur une algèbre ? (II)

Le complexe $\overline{B}(A)$ de la section précédente est malheureusement la plupart du temps trop gros pour permettre de calculer explicitement $\mathrm{Tor}^A_{i,j}(\Bbbk,\Bbbk)$. Dans cette section, nous décrivons une situation dans laquelle on peut remplacer le complexe $\overline{B}(A)$ par un complexe plus petit et plus maniable.

1.4.1 Complexes de type Koszul

Soit A une $\Bbbk$-algèbre à poids connexe, C une $\Bbbk$-cogèbre à poids connexe, et soit $\alpha : C_1 \to A_1$ une application $\Bbbk$-lineaire. On munit $A \otimes C$ d'une structure de A-module à poids gradué de la façon suivante.

- La partie de degré i et de poids j de $A \otimes C$ est le $\Bbbk$-module $(A \otimes C)_{i,j} := A_{j-i} \otimes C_i$. On note

$$(A \otimes C)_{i,*} = \bigoplus_{j\ge 0} A_{j-i} \otimes C_i = A \otimes C_i\ .$$

- La structure de A-module à poids sur $(A \otimes C)_{i,*}$ est donnée par la formule $b \cdot (a \otimes c) = (ba) \otimes c$.

On utilise ensuite α pour définir un morphisme A-linéaire $d_\alpha : (A \otimes C)_{i,*} \to (A \otimes C)_{i-1,*}$.

- d_α est la composée :

$$A \otimes C_i \xrightarrow{A\otimes\Delta} A \otimes C_1 \otimes C_{i-1} \xrightarrow{A\otimes\alpha\otimes C_{i-1}} A \otimes A_1 \otimes C_{i-1} \xrightarrow{m\otimes C_{i-1}} A \otimes C_{i-1}\ .$$

Définition 1.9. Le morphisme α est un *morphisme tordant*[4] si $(A\otimes C, d_\alpha)$ est un complexe de A-modules

[3] De manière explicite, on a toujours un morphisme $H(\overline{B}(A))^{\otimes 2} \to H(\overline{B}(A)^{\otimes 2})$. Si $\Bbbk$ est un corps ce morphisme est un isomorphisme et possède un inverse κ. La structure de cogèbre de $H(\overline{B}(A))$ est alors donnée par la composée :

$$H(\overline{B}(A)) \xrightarrow{H(\Delta)} H(\overline{B}(A) \otimes \overline{B}(A)) \xrightarrow{\kappa} H(\overline{B}(A)) \otimes H(\overline{B}(A))\ .$$

[4] En anglais : 'twisting morphism'.

(i.e. si $d_\alpha^2 = 0$). Le morphisme α est dit *de Koszul* si : (i) α est un morphisme tordant, et (*ii*) le complexe $(A \otimes C, d_\alpha)$ est acyclique (i.e. son homologie est égale à zéro en degré non nul, et au A-module $\mathbb{k}$ en degré zéro).

On dispose d'un critère facile pour vérifier qu'un morphisme est un morphisme tordant.

Lemme 1.10. $\alpha : C_1 \to A_1$ *est un morphisme tordant si et seulement si la composée suivante est égale à zéro.*

$$C_2 \xrightarrow{\Delta} C_1 \otimes C_1 \xrightarrow{\alpha\otimes\alpha} A_1 \otimes A_1 \xrightarrow{m} A_2 \ .$$

Démonstration. Notons ϕ la composée de l'énoncé. En utilisant la coassociativité de Δ et l'associativité de m, on obtient que d_α^2 est égale à la composée

$$A \otimes C_i \xrightarrow{A\otimes\Delta} A \otimes C_2 \otimes C_{i-2} \xrightarrow{A\otimes\phi\otimes C_{i-2}} A \otimes A_2 \otimes C_{i-2} \xrightarrow{m\otimes C_{i-2}} A \otimes C_{i-2}$$

Donc $\phi = 0$ implique $d_\alpha^2 = 0$. Réciproquement si α est un morphisme tordant, la restriction de la composée ci-dessus à $\mathbb{k} \otimes C_{i-2}$ est égale à ϕ donc $\phi = 0$. $\square$

1.4.2 Résolutions linéaires acycliques de $\mathbb{k}$

Définition 1.11. Soit A une $\mathbb{k}$-algèbre à poids connexe. Une *résolution linéaire* $\mathbb{k}\otimes_A$*-acyclique*[5] du A-module $\mathbb{k}$ est une résolution :

$$\cdots \to P_i \to P_{i-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{k} \ ,$$

où les P_i sont des A-modules à poids, $\mathbb{k}\otimes_A$-acycliques, et engendrés en poids i : $P_i = A \cdot P_{i,i}$, et où les morphismes sont A-linéaires.

Rappelons qu'un A-module M est $\mathbb{k}\otimes_A$-acyclique si $\mathrm{Tor}^A_{i,j}(\mathbb{k}, M) = 0$ pour $i > 0$. Par exemple les A-modules plats sont acycliques, mais il y en a beaucoup d'autres, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 1.12. *Soit N un $\mathbb{k}$-module à poids* quelconque*, et A une algèbre à poids $\mathbb{k}$-plate. Le A-module à poids $A \otimes N$ (avec action de A donnée par $a \cdot (b \otimes n) = (ab) \otimes n$) est $\mathbb{k}\otimes_A$-acyclique.*

Démonstration. Soit $P_\bullet$ une résolution $\mathbb{k}$-plate de N. Alors $A \otimes P_\bullet$ est une résolution plate de $A \otimes N$ dans A-mod (elle est exacte car A est $\mathbb{k}$-plate, et les modules qui la constituent sont A-plats car les P_i sont $\mathbb{k}$-plats). Donc $\mathrm{Tor}^A_{i,j}(\mathbb{k}, A \otimes N)$ se calcule comme l'homologie du complexe $\mathbb{k} \otimes_A (A \otimes P_\bullet) = P_\bullet$. D'où $\mathrm{Tor}^A_{i,j}(\mathbb{k}, A \otimes N) = 0$ pour $i \neq 0$ et $\mathrm{Tor}^A_{0,j}(\mathbb{k}, A \otimes N) = N_j$. $\square$

Exemple 1.13. Si l'algèbre A est $\mathbb{k}$-plate, les complexes de type Koszul du paragraphe précédent sont un moyen de produire des résolutions linéaires $\mathbb{k}\otimes_A$-acyclique de $\mathbb{k}$. En effet, supposons que C est une cogèbre à poids et que $\alpha : C_1 \to A_1$ est un morphisme de Koszul. Alors les A-modules $A \otimes C_i$ sont $\mathbb{k}\otimes_A$-acycliques, et engendrés en poids i. Donc le complexe $(A \otimes C, d_\alpha)$ est un résolution linéaire $\mathbb{k}\otimes_A$-acyclique de $\mathbb{k}$.

L'intérêt des résolutions linéaires $\mathbb{k}\otimes_A$-acycliques réside dans la remarque suivante.

Remarque : Si $N \in A$-mod est un module engendré en poids i, le produit tensoriel $\mathbb{k} \otimes_A N$ est un $\mathbb{k}$-module à poids concentré en poids i, et $(\mathbb{k} \otimes_A N)_i = N_i$.

En conséquence, si $P_\bullet$ est une résolution linéaire $\mathbb{k}\otimes_A$-acyclique de $\mathbb{k}$ on a :

$$\mathrm{Tor}^A_{i,j}(\mathbb{k}, \mathbb{k}) = H_{i,j}(\mathbb{k} \otimes_A P_\bullet) = (\mathbb{k} \otimes_A P_i)_j = \quad 0 \text{ si } i \neq j \ , \quad P_{i,i} \text{ si } i = j.$$

[5]Cette terminologie est reprise de [PP, p. 22].

2 Théorie des algèbres de Koszul

2.1 Cinq définitions équivalentes

Théorème-Définition 2.0.1. *Soit A une $\mathbb{k}$-algèbre à poids, connexe et $\mathbb{k}$-plate. On note C la cogèbre à poids définie par $C_i := \mathrm{Tor}^A_{i,i}(\mathbb{k},\mathbb{k})$. L'algèbre A est dite* de Koszul *si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes.*

(1) Pour tout $i, j \geq 0$, $\mathrm{Tor}^A_{i,j}(\mathbb{k},\mathbb{k}) = 0$ si $i \neq j$ [6].

(2) L'homologie du complexe bar réduit $\overline{B}(A)$ est concentrée sur la diagonale.

(3) L'inclusion $C \hookrightarrow \overline{B}(A)$ est un quasi-isomorphisme.

(4) Le morphisme $C_1 \to \overline{B}(A)_{1,1} = A_1$ est un morphisme de Koszul.

(5) L'anneau $\mathbb{k}$ admet une résolution linéaire $\mathbb{k}\otimes_A$-acyclique.

Si A est une algèbre de Koszul, la $\mathbb{k}$-cogèbre à poids C est notée $A^{¡}$ et est baptisée cogèbre duale de A.

Démonstration.

- (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3).
  Nous avons vu dans la section 1.3 que sous les conditions du théorème (A connexe et $\mathbb{k}$-plate) $H_{i,j}(\overline{B}(A))$ calcule $\mathrm{Tor}^A_{i,j}(\mathbb{k},\mathbb{k})$ et que l'homologie diagonale de $\overline{B}(A)$ s'injecte dans $\overline{B}(A)$. L'équivalence en découle.
- (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1).
  Nous avons vu à la section 1.4 que sous les hypothèses du théorème (A connexe et $\mathbb{k}$-plate), si α est un morphisme de Koszul, le complexe de type Koszul $(A \otimes C, d_\alpha)$ est une résolution linéaire $\mathbb{k}\otimes_A$-acyclique, et que l'existence d'une résolution linéaire $\mathbb{k}\otimes_A$-acyclique implique que $\mathrm{Tor}^A_{i,j}(\mathbb{k},\mathbb{k})$ est concentré sur la diagonale. On a donc (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1).
- Pour finir la démonstration, il nous faut démontrer (3)$\Rightarrow$(4). Nous procédons en plusieurs étapes. Notons $\phi : C \hookrightarrow A$ l'inclusion de C dans les cycles de $\overline{B}(A)$ et $\phi_i : C_i \to \overline{B}(A)_{i,i}$ sa restriction aux poids i. Il faut montrer que ϕ_1 est un morphisme de Koszul. Nous procédons en plusieurs étapes.

Étape 1 : ϕ_1 est un morphisme tordant. Notons $\overline{\Delta}$ la diagonale réduite d'un cogèbre ($\overline{\Delta}(x) = \Delta(x) - x \otimes 1 - 1 \otimes x$). Comme ϕ est un morphisme de cogèbres, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
C_{2,2} \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, "\overline{\Delta}"] & \overline{B}(A)_{2,2} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\overline{\Delta}"] & A_1 \otimes A_1 \arrow[d, equal] \\
C_{1,1} \otimes C_{1,1} \arrow[r, "\phi_1\otimes\phi_1"] & \overline{B}(A)_{1,1} \otimes \overline{B}(A)_{1,1} \arrow[r, equal] & A_1 \otimes A_1
\end{tikzcd}$$

Comme ϕ_2 est à valeurs dans les cycles de $\overline{B}(A)$ et que la différentielle d'un élément de $A_1 \otimes A_1 = \overline{B}(A)_{2,2}$ est donnée par la multiplication, on a : $0 = d_{\overline{B}(A)} \circ \phi_2 = m \circ (\phi_1 \otimes \phi_1) \circ \Delta$. D'après le lemme 1.10, cela signifie que ϕ_1 est un morphisme tordant.

Étape 2 : $A \otimes \phi$ comme morphisme de complexes. On remarque que $B(A, A, \mathbb{k}) = A \otimes \overline{B}(A)$ comme $\mathbb{k}$-module gradué à poids, et que $d_{B(A,A,\mathbb{k})} = A \otimes d_{\overline{B}(A)} + \delta$ où δ est la composée (ou comme d'habitude on fait un abus de notation en notant Δ pour la comultiplication suivie de la projection sur un facteur direct de $\overline{B}(A) \otimes \overline{B}(A)$) :

$$A \otimes \overline{B}(A) \xrightarrow{A\otimes\Delta} A \otimes \overline{B}(A)_{1,1} \otimes \overline{B}(A) = A \otimes A_1 \otimes \overline{B}(A) \xrightarrow{m\otimes\overline{B}(A)} A \otimes \overline{B}(A).$$

Comme ϕ est un morphisme de cogèbres, et à valeurs dans les cycles de $\overline{B}(A)$, le morphisme

$$A \otimes \phi : A \otimes C \to \overline{B}(A, A, \mathbb{k})$$

est un morphisme de complexes de $\mathbb{k}$-modules à poids. On sait que $\overline{B}(A, A, \mathbb{k})$ est acyclique par la proposition 1.6. Pour montrer que ϕ est un morphisme de Koszul (i.e. que $(A \otimes C, d_{\phi_1})$ est acyclique), il nous suffit donc de montrer que $A \otimes \phi$ est un quasi-isomorphisme.

[6] Si $\mathbb{k}$ est un $\mathbb{k}$-module injectif, cette condition est équivalente à $\mathrm{Ext}^{i,j}_A(\mathbb{k},\mathbb{k}) = 0$ si $i \neq j$ d'après le lemme 1.5.

Étape 3 : $A\otimes\phi$ est un quasi-isomorphisme. On rappelle que $A\otimes C$ et $B(A, A, \Bbbk)$ sont des complexes à poids, ils scindent donc en une somme directe de complexes homogènes de poids i, notés $(A \otimes C)_{*,i}$ et $B(A, A, \Bbbk)_{*,i}$. Comme $A\otimes\phi$ préserve les poids, pour montrer que $A\otimes\phi$ est un quasi-isomorphisme, il suffit de trouver des filtrations $F_0 \subset F_1 \subset \dots$ des complexes homogènes $(A \otimes C)_{*,i}$ et $B(A, A, \Bbbk)_{*,i}$ telles que :

(a) $A \otimes \phi$ préserve les filtrations,

(b) $Gr(A \otimes \phi)$ est un quasi-isomorphisme,

(c) Les filtrations sont finies : $F_k((C \otimes A)_{*,i}) = (C \otimes A)_{*,i}$ et $F_k(B(A, A, k)_{*,i}) = B(A, A, \Bbbk)_{*,i}$ pour k assez grand.

► En effet, si on a de telles filtrations à disposition, alors $A \otimes \phi = F_k(A \otimes \phi)$ pour k assez grand d'après (c). Or, pour tout $n \geq 0$ le morphisme de complexes :

$$F_n(A \otimes \phi) : F_n((C \otimes A)_{*,i}) \to F_n(B(A, A, k)_{*,i})$$

est un quasi-isomorphisme. Cela se démontre facilement par récurrence. C'est vrai pour $n = 0$ à cause de (b), car $F_0(A \otimes \phi) = Gr_0(A \otimes \phi)$. Si c'est vrai pour n, alors on a un diagramme commutatif de suites exactes courtes de complexes :

$$\begin{tikzcd}
F_n((C \otimes A)_{*,i}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "F_n(A\otimes\phi)"] & F_{n+1}((C \otimes A)_{*,i}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "F_{n+1}(A\otimes\phi)"] & Gr_{n+1}((C \otimes A)_{*,i}) \arrow[d, "Gr_{n+1}(A\otimes\phi)"] \\
F_n(B(A, A, k)_{*,i}) \arrow[r, hook] & F_{n+1}(B(A, A, k)_{*,i}) \arrow[r, two heads] & Gr_{n+1}(B(A, A, k)_{*,i})
\end{tikzcd} .$$

Les suites exactes courtes de complexes induisent des suites exactes longues en homologie, et comme $F_n(A \otimes \phi)$ et $Gr_{n+1}(A \otimes \phi)$ sont des quasi-isomorphismes (par hypothèse de récurrence et par (b)), le lemme des 5 montre que $F_{n+1}(A \otimes \phi)$ est un quasi-isomorphisme.

► Pour finir la démonstration, il nous reste donc à exhiber les filtrations de $(A \otimes C)_{*,i}$ et $B(A, A, \Bbbk)_{*,i}$. Rappelons que comme $\Bbbk$-module gradué, $(A \otimes C)_{*,i}$ est égal à $\bigoplus_{k+\ell=i} A_k \otimes C_\ell$ avec $A_k \otimes C_\ell$ en degré ℓ, et que comme $\Bbbk$-module gradué, $B(A, A, k)_{*,i}$ est égal à $\bigoplus_{k+\ell=i,p\leq\ell} A_k \otimes \overline{B}(A)_{p,\ell}$ avec $A_k \otimes \overline{B}(A)_{p,\ell}$ en degré p. On définit :

$$F_n((A \otimes C)_{*,i}) := \bigoplus_{k+\ell=i,\ \ell\leq n} A_k \otimes C_\ell\ , \qquad F_n(B(A, A, k)_{*,i}) := \bigoplus_{k+\ell=i,\, p\leq\ell,\ \ell\leq n} A_k \otimes \overline{B}(A)_{p,\ell}\ .$$

Ces filtrations sont finies (stationnaires à partir de l'indice $n = i$), d'où (c). Comme ϕ préserve les poids, $A \otimes \phi$ préserve ces filtrations, d'où (a). Enfin, on vérifie que les morphismes d_{ϕ_1} et δ descendent dans la filtration (ils envoient F_n dans F_{n-1}), donc

$$Gr(A \otimes \phi) = A \otimes \phi : A \otimes C \to A \otimes \overline{B}(A)\ .$$

Comme A est $\Bbbk$-plat, et ϕ est un quasi-isomorphisme, $A \otimes \phi$ est un quasi-isomorphisme, d'où (b). □

2.2 Premiers exemples

Exemple 2.1. Soit M un $\Bbbk$-module projectif.

1. L'algèbre tensorielle $T(M)$ (avec $M^{\otimes n}$ en poids n) est de Koszul, et sa duale est la cogèbre qui a $\Bbbk$ en poids zéro, et M en poids 1, avec l'unique structure de cogèbre à poids possible ($\Delta(m) = m\otimes 1+1\otimes m$)
2. L'algèbre à poids avec $\Bbbk$ en poids zéro et M en poids 1, avec l'unique structure d'algèbre à poids possible ($m \cdot m' = 0$ si m et m' ont poids 1) est une algèbre de Koszul, et sa duale est la cogèbre tensorielle $T^c(M)$ (avec $M^{\otimes n}$ en poids n).
3. L'algèbre symétrique $S(M)$ (avec $S^n(M)$ en poids n) est de Koszul, et sa duale est la cogèbre extérieure $\Lambda^c(M)$ (avec $(\Lambda^c)^n(M)$ en poids n).
4. L'algèbre extérieure $\Lambda(M)$ (avec $\Lambda^n(M)$ en poids n) est de Koszul, et sa duale est la cogèbre des puissances divisées $\Gamma(M)$ (avec $\Gamma^n(M)$ en poids n).

Références

[Car] H. Cartan, Séminaire Henri Cartan de l'École Normale supérieure, 1954/1955. Algèbres d'Eilenberg Mac Lane et homotopie, Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris, 1955 (French). Available online on www.numdam.org

[ML] S. Mac Lane, Homology. Reprint of the 1975 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. x+422 pp. ISBN : 3-540-58662-8.

[PP] A. Polishchuk, L. Positselski, Quadratic algebras. University Lecture Series, 37. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. xii+159 pp. ISBN : 0-8218-3834-2.