Groupe de travail cohomologie des groupes finis

Antoine Touzé

20 janvier 2017

Soit G un groupe fini, $\Bbbk$ un corps, et $H^*(G, \Bbbk)$ l'algèbre de cohomologie du groupe G. Mis à part pour des groupes faciles (groupes abéliens, groupes de petit cardinal), on ne sait pas calculer l'algèbre de cohomologie de G.

On cherche donc des propriétés qualitatives de G. Donnons certaines des principales propriétés connues de $H^*(G, \Bbbk)$.

1. Une première avancée fut le théorème de Evens-Venkov (fin des années 50) : $H^*(G, \Bbbk)$ est une $\Bbbk$-algèbre de type fini.
2. En 1971, Quillen a déterminé la dimension de Krull de $H^*(G, \Bbbk)$. (C'est le début de la théorie des variétés support, encore active aujourd'hui).
3. En 2012, Symonds a montré que :
   $H^*(G, \Bbbk)$ est engendré en degré $\leq |G| - 1$ et ses relations en degré $\leq 2|G| - 2$.

Le but de ce groupe de travail est d'étudier le théorème de Symonds. On propose d'organiser le groupe de travail de la manière suivante.

Exp 0 : Introduction et répartition des exposés

Date : vendredi 20 janvier, « orateur » : A. Touzé.

1 Cohomologie des groupes

Références :

[Ben] Benson : representations and cohomology II

[Br] Brown : group cohomology

MC MacCleary : A user's guide to spectral sequences

[Q] Quillen : the spectrum of a cohomology ring I (Ann. Maths)

Exp 1 : rappels sur la cohomologie équivariante

Date : 3 février
Orateur : Ivo

A. Fibrés principaux et cohomologie equivariante

Référence : sections 2.3 et 2.4 de [Ben]

Définition de G fibré principal, de G-fibré principal universel, classification des fibrés, construction de Milnor. Caractérisation des fibrés universels avec le thm 2.4.8. Définition de la cohomologie equivariante ([Ben] p.121 ou [Q] p.550).

B. Exemples

Références : [Ben], [Q], [Br]

1) cohomologie équivariante d'un point, cohomologie équivariante avec une action triviale ([Q] 1.13 p. 553).

2) Modèle concret de $EU_n \to BU_n$ avec la variété de Stiefel et la Grassmanienne (cf [Ben] p.44). Enoncé du calcul de $H^*_U(\{\mathrm{pt}\})$ (cf. [Ben] p.51).

3) Si G est un groupe discret, alors $H^*_G(\{\mathrm{pt}\}) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\Bbbk G}(\Bbbk, \Bbbk)$ comme algèbres (cf. sec 4 chap I de [Br]. Pour les produits, interpréter l'approximation simpliciale de la diagonale en termes d'algèbre homologique). Enoncé du calcul de $H^*_G(\{\mathrm{pt}\})$ pour un groupe abélien élémentaire G.

Exp 2 : engendrement fini de la cohomologie

Date : 10 février
Orateur : Giulio

A. Suites spectrales

Référence : Chapitre 1 de [MC]

Objectif : Faire des brefs rappels généraux sur ce qu'est une suite spectrale (on ne s'intéresse qu'aux suites spectrales cohomologiques premier quadrant) de façon à ce que l'auditoire novice puisse suivre la démonstration de l'engendrement fini.

B. Engendrement fini de la cohomologie

Références : section 3.10 de [Ben], ou section 2 de [Q]

preuve du Thm de Venkov : G un groupe de Lie compact. Alors H^*_G est de type fini. De plus, si G agit sur X de dimension homologique finie, alors $H^*_G(X)$ est un module de type fini sur H^*_G.

2 Régularité de Castelnuovo-Mumford

Références :

[LC] Brodmann Sharp : local cohomology

[MC] Bruns Herzog : Cohen Macauley rings

[24H] Iyengar and al. : 24 hours of local cohomology

[S1] Symonds : on the Castelnuovo-Mumford regularity of rings of polynomial invariants (Ann. Maths)

[S2] Symonds : on the Castelnuovo-Mumford regularity of the cohomology ring of a group (Am. J. Maths)

Exp 3 : cohomologie locale I : définition et théorème d'indépendance

Date : 17 février
Oratrice : Hana

A. Définition et premiers exemples

Référence : sections 1 et 2 du chapitre 7 de [24H]

Définition de la cohomologie locale d'un anneau commutatif noethérien.
Exemple : $R = \mathbb{Z}$.
Définition équivalente avec des (limites directes d') Ext).

B. Le théorème d'indépendance

Référence : section 4.2 de [LC]

Enoncé du théorème d'indépendance et démonstration.

C. Interprétation géométrique

Référence : Chapitre 12 de [24H]

Objectif : expliquer sans tous les détails l'interprétation géométrique de la cohomologie locale, qui explique le nom 'cohomologie locale'. L'interprétation géométrique ne sera pas utilisée dans la suite.

Soit X une varieté algébrique affine et R son anneau (commutatif noethérien) des coordonnées. Tout R-module peut s'interpréter comme un faisceau sur X muni de sa topologie de Zariski (def 12.24). Les faisceaux de ce type sont appelés quasi-cohérents.

La cohomologie de Cech d'un faisceau $\mathcal{F}$ (section 2 du chapitre 2 de [24H]) sur X est nulle si le faisceau et quasi-cohérent et la variété affine (théorème de Serre, prop 12.38). Mais les ouverts de X ne sont pas des variétés affines et peuvent avoir de la cohomologie pour un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$. Cette cohomologie est de la cohomologie locale (thm 12.41).

Ceci se voit car le complexe de Cech qui calcule la cohomologie du faisceau est isomorphe au complexe de Cech qui calcule la cohomologie locale de M (Section 4 du chapitre 7).

Exp 4 : cohomologie locale II : Dualité locale

Date : 3 Mars
Orateur : James

Objectif : exposer le théorème de dualité locale pour les anneaux Gorenstein. Le théorème de dualité locale est valable pour une classe plus grande d'anneaux (Cohen Macauley), mais les résultats de Symonds n'utilisent que le cas des anneaux de polynômes (qui sont Gorentein). On évitera d'introduire inutilement trop de notions d'algèbre commutative, et on se limitera aux notions de dimension injective, profondeur, anneau Gorenstein.

A. Rappels sur la dimension injective d'un module

Référence : [CM]

Définition de la dimension injective d'un module, caracterisation avec les Ext (cor 3.1.12, et le cas des anneaux locaux prop 3.1.14).

B. Rappels sur la profondeur d'un module

Référence : [24H]

Définition d'une suite régulière pour un R-module M et profondeur (def. 6.14 et 6.17). Caractérisation avec des Ext (thm 8.4, et le cas des anneaux locaux : cor 8.5).

C. Anneaux Gorenstein

Référence : [24H]

Définition d'un anneau Gorenstein (def 11.1).

Traiter en détail l'exemple des anneaux de polynômes. (Soit $\Bbbk$ corps, $R = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ et $\mathfrak{m}$ un ideal maximal tel que $R/\mathfrak{m} \simeq \Bbbk$ (si $\Bbbk$ est algébriquement clos, tous les idéaux maximaux sont ainsi, par théorème de Hilbert). Le complexe de Koszul fournit une résolution libre finie du R-module $\Bbbk$. En localisant à un ideal maximal $\mathfrak{m}$ on obtient une résolution libre finie du $R_\mathfrak{m}$-module $\Bbbk$. Donc l'anneau local $R_\mathfrak{m}$ est Gorenstein).

Caractérisation des anneaux Gorenstein locaux (thm 11.26). Faire le calcul de l'homologie locale d'un anneau local Gorenstein, c'est à dire la moitié de la démonstration qui servira pour la partie C : il faut prouver que si $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ est Gorenstein, alors $E(\Bbbk)$ n'apparait qu'en degré d dans la résolution minimale de R. Cela revient à montrer $\mathrm{Ext}^i_R(\Bbbk, R) \neq 0 \Leftrightarrow i = d$, ce qui découle de la proposition 11.9. (On admettra éventuellement l'inégalité depth$(R) \leq \dim R \leq$ injdim(R)). Le calcul de la multiplicité de $E(\Bbbk)$ se fait à l'aide du théorème 11.15 ou de la proposition 8.2.

D. Le théorème de dualité locale

Référence : [CM]

Enoncé du théorème de dualité locale (thm 3.5.8 pour $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ local Gorenstein, et $\omega_R = R$, seul le deuxième isomorphisme sera utile), avec la démonstration (Dans le cas d'un anneau Gorenstein, la dernière étape de la démonstration - après avoir établi l'isomorphisme (6) - se simplifie : il suffit de prendre $d = i$ et $M = R$).

Exp 5 : Régularité de Castelnuovo-Mumford

Date : 17 Mars
Orateur : Hongyi

A. Cohomologie locale dans le cas gradué

Références : Chapitres 12 et 13 de [LC], section 1.5 et 3.6 de [CM], section 1 du chapitre 13 de [24H].

Définition de la catégorie des R-modules gradués, de *Hom et *Ext*. Comparaison avec les Ext dans la catégorie non graduée. Modules *-injectifs.

Donner un exemple de module *-injectif qui n'est pas injectif dans le sens non gradué : $R = \Bbbk[x]$ avec x de degré 1 et $M = \Bbbk$. (On pourra montrer que $\mathrm{Ext}^1(\Bbbk, \Bbbk) \neq 0$ dans les R-modules, mais que $\mathrm{Hom}(-, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(-_0, M)$ dans les modules gradués).

Définition de la cohomologie locale d'un idéal homogène I comme foncteur dérivé de Γ_I dans la catégorie des R-modules gradués, comparaison avec la cohomologie locale dans le sens non gradué (cor 12.3.3 de [LC]).

Enoncé du théorème d'indépendance, version graduée (thm 13.1.6 [LC]).

Enoncé du théorème de dualité locale, version graduée (thm 13.5 [24H]). Pour simplifier on donnera le théorème lorsque R est Gorenstein dans le sens non gradué, et en remplaçant le module canonique par une version décalée de R (le décalage étant déterminé par les valeurs de $^*\mathrm{Ext}^*(\Bbbk, R)$).

B. Régularité de Castelnuovo-Mumford

Référence : section 1 de [S1].

Définition de la régularité de Castelnuovo-Mumford d'un R-module M (notée $\mathrm{Reg}(R, M)$. En utilisant le théorème de normalisation de Noether gradué (thm 1.5.17 de [CM]) on peut toujours se ramener à un anneau de polynômes.

Définition de $\mathrm{PReg}(R, M)$ pour R un anneau de polynômes.

Démonstration de la proposition 1.2 de [S1].

Exp 6 : Régularité, application aux générateurs et relations

Date : 24 Mars
Orateur : Antoine

Références : section 1 de [S2], et section 2 de [S1]

A. Propriétés élémentaires de la régularité

Démonstration du lemme 1.4 de [S2].
Exemple : lemme 1.5 de [S2]

B Générateurs et relations d'un anneau

Démonstration de la proposition 1.3 de [S2], cf. section 2 de [S1].

C. Application à la cohomologie des groupes finis

Preuve de la proposition 0.3 de [S2], en admettant le corollaire 0.2. (Cf proposition 10.2 de [S2]).

3 Démonstration du théorème de Symonds

Références :

[T] Totaro :

[D] Duflot : Smooth toral actions (Topology)

[HLS] Henn, Lannes, Schwartz : Localization of unstable A-modules and equivariant mod p cohomology.

[Q] Quillen : the spectrum of a cohomology ring I (Ann. Maths)

[S2] Symonds : on the Castelnuovo-Mumford regularity of the cohomology ring of a group (Am. J. Maths)

Exp 7 : Réduction au cas des groupes abéliens élémentaires

Date : 31 Mars
Orateur : Jacques

Références : section 2 et 3 de [S2], et [Q].

On présenter la section 2 de [S2], en donnant les démonstrations des résultats utilisés de [Q]. Pour présenter les résultats de [Q], on adoptera une des solutions proposées dans la section 3 de [S2] (par exemple utiliser le théorème de Gleason) afin d'éviter de parler de cohomologie des faisceaux et d'utiliser l'homologie singulière.

Exp 8 : Le cas des groupes abéliens élémentaires

Date : 7 avril
Orateur : Najib

Références : section 4 de [S2], et [D], [HLS], et [T].

4 Une suite possible...

Le groupe de travail a étudié l'inégalité de Symonds $\mathrm{Reg} H_G^*(M) \leq 0$. Il est possible de rajouter deux ou trois exposés pour démontrer l'inégalité de Benson (l'autre sens). (La démonstration de l'inégalité de Benson est un peu plus algébrique).