Groupe de travail : On the Deligne conjecture for THH. (séances du 14 et 17 octobre 2014, A. Touzé)

Introduction aux spectres (séance 2).

Plan :

0 Rappels sur $\wedge$ et Σ
1 Définition de $\mathcal{SH}$
2 Vision concrète de $\mathcal{SH}$
3 Propriétés algébriques de $\mathcal{SH}$
4 Smash produits naifs
5 $\mathcal{D}$-spectres
6 Smash produits de $\mathcal{D}$-spectres

Références :

sections 1-4 : Adams, Stable homotopy and generalized homology.

sections 5-6 : MMSS, Model categories of diagram spectra, proc. LMS 2001.

Résumé des points principaux des sections 0-3 (séance 1)

Définitions de base.

Préspectre = famille d'espaces $(X_n)_{n\geq 0}$ munie d'applications $\sigma : X_n \wedge S^1 \to X_{n+1}$.

Morphisme de préspectres = famille d'applications $f_n : X_n \to Y_n$, $n \geq 0$ telle que $\sigma_Y \circ (f_n \wedge S^1) = f_{n+1} \circ \sigma_X$.

Pour $r \in \mathbb{Z}$ on définit $\pi_r(X) = \mathrm{colim}_n \pi_{n+r}(X_n)$.

Un morphisme $f : X \to Y$ induit $\pi_*(f) : \pi_*(X) \to \pi_*(Y)$. On note W la classe des π_*-isos.

$$\mathcal{SH} := \text{Préspectres}\left[W^{-1}\right] .$$

Exemples de base.

Spectres de suspension $\mathrm{Susp}(K)$, produits à partir d'un espace K.

Ω-spectres, produits à partir d'une théorie cohomologique réduite (représentabilité de Brown).

Contructions topologiques degré par degré. Par exemple, $X \vee Y = (X_n \vee Y_n)_{n\geq 0}$, resp. $X \times Y = (X_n \times Y_n)_{n\geq 0}$, est le coproduit, resp. produit catégorique dans la catégorie des préspectres.

Vision concrète des morphismes dans $\mathcal{SH}$.

Si K est un CW-complexe fini, et Y un spectre quelconque :

$$\mathcal{SH}(Susp(K), Y) \simeq \mathrm{colim}_n \left(\dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} [\Sigma^n K, Y_n] \xrightarrow{\alpha_n} [\Sigma^{n+1} K, Y_{n+1}] \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \dots \right) .$$

Par définition, les α_n du système s'insèrent dans des diagrammes commutatifs, où ϕ est l'adjoint de σ :

$$\begin{tikzcd} {[\Sigma^n K, Y_n]} \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\phi_*"] \arrow[dr, "\alpha_n"] & {[\Sigma^{n+1} K, \Sigma Y_n]} \arrow[d, "\sigma_*"] \\ {[\Sigma^n K, \Omega Y_{n+1}]} \arrow[r, "\simeq"] & {[\Sigma^{n+1} K, Y_{n+1}]} . \end{tikzcd}$$

<u>Applications :</u>

1. Soit $S = \mathrm{Susp}(S^0)$. Alors $\mathcal{SH}(\Sigma^r S, Y) \simeq \pi_r(Y)$.
2. Si E est un Ω-spectre représentant une théorie de cohomologie h on a $\mathcal{SH}(\Sigma^r \mathrm{Susp}(K), E) \simeq h^r(K)$.
3. Si L est un CW-complexe, $\mathcal{SH}(\mathrm{Susp}(K), \mathrm{Susp}(L)) \simeq [\Sigma^n K, \Sigma^n L]$ pour $n \geq \dim K + 1$.

Propriétés algébriques de $\mathcal{SH}$: moralement $\mathcal{SH}$= catégorie dérivée de Top_*.

$\mathcal{SH}$ est une catégorie triangulée. En particulier :

1. Le foncteur de suspension $\Sigma : \mathcal{SH} \to \mathcal{SH}$ admet un inverse (en particulier Σ est pleinement fidèle).
2. Pour tout couple X, Y, $\mathcal{SH}(X, Y)$ est un groupe abélien.
3. Le morphisme canonique $X \vee Y \to X \times Y$ est un isomorphisme dans $\mathcal{SH}$.
4. Les suites cofibres $X \xrightarrow{f} Y \to \mathrm{Cone}(f)$ (pour X et Y des CW-spectres) fournissent les triangles exacts.

4 Smash produit naifs

Théorème 4.1. *Il existe un smash produit $\wedge : \mathcal{SH} \times \mathcal{SH} \to \mathcal{SH}$ tel que :*

1. *$(\mathcal{SH}, \wedge, S)$ est une catégorie symétrique monoidale fermée.*
2. *$- \wedge X$ et $X \wedge -$ préservent les triangles exacts (=suites cofibres).*
3. *On a des isomorphismes $\Sigma(X \wedge Y) \simeq (\Sigma X) \wedge Y \simeq X \wedge \Sigma Y$ (et les deux chemins pour aller de $(\Sigma X) \wedge (\Sigma Y)$ à $\Sigma^2(X \times Y)$ diffèrent d'un signe).*
4. *Le foncteur de suspension $(\mathcal{T}, \wedge, S^0) \to (\mathcal{SH}, \wedge, S)$ est un foncteur monoidal strict.*

En d'autres termes $\mathcal{SH}$ est une catégorie tensorielle triangulée.

Le produit smash est construit au niveau de la catégorie des préspectres, mais il n'est associatif, commutatif et unitaire qu'à homotopie près à ce niveau.

5 $\mathcal{D}$-spectres

$\mathcal{T}$ la catégorie des espaces compactement engendrés pointés.
$(\mathcal{T}, \wedge, S^0)$ est une catégorie monoidale symétrique fermée.
Soit $(\mathcal{D}, \Box, u)$ une catégorie symétrique monoidale, enrichie en espaces compactement engendrés, essentiellement petite.

$$\mathcal{DT} = \text{catégorie des foncteurs continus de } \mathcal{D} \text{ dans } \mathcal{T}.$$

On fixe $(R, \mu, \eta) : \mathcal{D} \to \mathcal{T}$ un foncteur lax monoidal continu.

Définition 5.1. Un $\mathcal{D}$-spectre sur R est un objet X de $\mathcal{DT}$, muni de $\sigma : X(d) \wedge R(e) \to X(d\Box e)$ tels que

(i) La composée suivante est égale à l'identité : $X(d) \simeq X(d) \wedge S^0 \xrightarrow{X(d)\eta} X(d) \wedge R(u) \xrightarrow{\sigma} X(d\Box u) \simeq X(d)$.

(ii) On a un diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd} X(d) \wedge R(e) \wedge R(f) \arrow[r, "X(d)\wedge\mu"] \arrow[d, "\sigma\wedge R(f)"] & X(d) \wedge R(e\Box f) \arrow[d, "\sigma"] \\ X(d\Box e) \wedge R(f) \arrow[r, "\sigma"] & X(d\Box e\Box f) \end{tikzcd}.$$

Un morphisme de $\mathcal{D}$-spectres sur R est un morphisme f dans $\mathcal{DT}$ tel que $\sigma \circ (f \wedge R(e)) = f \circ \sigma$.

$$\mathcal{D}\mathrm{Sp}_R = \text{catégorie des } \mathcal{D}\text{-spectres sur } R.$$

Exemple 5.2.

1. $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, 0)$. Foncteur monoidal $S : \mathcal{N} \to \mathcal{T}$, $n \mapsto S^n$. On a $\mathcal{N}\mathrm{Sp}_S =$ préspectres .
2. $(\Sigma, \sqcup, \emptyset)$. Foncteur monoidal $S : \Sigma \to \mathcal{T}$, $\underline{n} \mapsto S^n = (\mathbb{R}^n)^+$. On appelle $\Sigma\mathrm{Sp}_S =$: 'spectres symétriques' .
3. $(\mathcal{J}, \oplus, 0)$. Foncteur monoidal $S : \mathcal{J} \to \mathcal{T}$, $V \mapsto S^V := V^+$. On appelle $\mathcal{J}\mathrm{Sp}_S =$: 'spectres orthogonaux' .

Les inclusions $\mathcal{N} \subset \Sigma \subset \mathcal{J}$ induisent des foncteurs d'oubli : $\mathcal{J}\mathrm{Sp}_S \xrightarrow{U} \Sigma\mathrm{Sp}_S \xrightarrow{U}$ préspectres . On définit des équivalences faibles $W_{\mathcal{D}}$ sur $\mathcal{D}\mathrm{Sp}_S$ telles que par passage aux localisations on a des équivalences :

$$\mathcal{J}\mathrm{Sp}_S[W_{\mathcal{J}}^{-1}] \xrightarrow{\simeq} \Sigma\mathrm{Sp}_S[W_{\Sigma}^{-1}] \xrightarrow{\simeq} \mathcal{SH}$$

6 Smash produits de $\mathcal{D}$-spectres

Théorème 6.1. *Soit $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ ou Σ. Il existe un smash produit $\wedge_S : \mathcal{D}\mathrm{Sp}_S \times \mathcal{D}\mathrm{Sp}_S \to \mathcal{D}\mathrm{Sp}_S$ tel que :*

1. *$(\mathcal{D}\mathrm{Sp}_S, \wedge_S, S)$ est une catégorie symétrique monoidale fermée.*
2. *Le foncteur d'oubli $U : \mathcal{J}\mathrm{Sp}_S \to \Sigma\mathrm{Sp}_S$ est lax monoidal symétrique (avec un adjoint strictement monoidal)*
3. *Le préspectre $U(X \wedge_S Y)$ est isomorphe dans $\mathcal{SH}$ au smash produit naif de préspectres $(UX) \wedge (UY)$*