Invariants, cohomologie et représentations fonctorielles des groupes algébriques

Antoine Touzé

Université Paris 13

Cours Peccot- leçon 3
mardi 6 avril 2010

Introduction

Objectif : obtenir des informations sur $H^*(G, M)$

G schéma en groupes algébrique affine sur $\Bbbk$

M une représentation (rationnelle) de G

$H^*(G, M) = Ext^*_G(\Bbbk^{\mathrm{triv}}, M)$ cohomologie rationnelle

Introduction

Objectif : obtenir des informations sur $H^*(G, M)$

G schéma en groupes algébrique affine sur $\Bbbk$

M une représentation (rationnelle) de G

$H^*(G, M) = Ext^*_G(\Bbbk^{\mathrm{triv}}, M)$ cohomologie rationnelle

Q1 : méthodes pour obtenir des calculs explicites ?

Q2 : renseignements qualitatifs généraux ?

Introduction

Objectif : obtenir des informations sur $H^*(G, M)$

G schéma en groupes algébrique affine sur $\Bbbk$

M une représentation (rationnelle) de G

$H^*(G, M) = Ext^*_G(\Bbbk^{\mathrm{triv}}, M)$ cohomologie rationnelle

Q1 : méthodes pour obtenir des calculs explicites ?

Q2 : renseignements qualitatifs généraux ?

Leçon 2 : cas $G = GL_n$

Thm (FS) : evaluation $Ext^*_{\mathcal{P}}(F, G) \to Ext^*_{GL_n}(F(\Bbbk^n), G(\Bbbk^n))$
iso si $n \geq \deg F, \deg G$

$\Rightarrow$ Calculs explicites, $Ext^*_{\mathcal{P}}(F^{(r)}, G^{(r)})$.

Introduction

Leçon 3 : Interactions entre

- **théorie invariants**
- **cohomologie**
- **calculs dans $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$**

Introduction

Leçon 3 : Interactions entre

- **théorie invariants**
- **cohomologie**
- **calculs dans $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$**

Théorie classique des invariants :

Introduction

Leçon 3 : Interactions entre
- **théorie invariants**
- **cohomologie**
- **calculs dans $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$**

Théorie classique des invariants :

1. Résultats quantitatifs : Premiers théorèmes fondamentaux
(Weyl $\simeq$ 1940 en car 0, De Concini, Procesi 1976)

V rep. std de G, ($G = GL_n$, Sp_n, O_n, SO_n, SL_n)
1er Thm fond pour G donne générateurs de :

- $H^0(G, S^*(V^{\sharp \oplus d}))$ si $G \neq GL_n$
- $H^0(G, S^*(V^{\sharp \oplus d} \oplus V^{\oplus \ell}))$ si $G = GL_n$

Introduction

Leçon 3 : Interactions entre
- **théorie invariants**
- **cohomologie**
- **calculs dans $\mathcal{P}_{\Bbbk}$**

Théorie classique des invariants :

1. Résultats quantitatifs : Premiers théorèmes fondamentaux
(Weyl $\simeq$ 1940 en car 0, De Concini, Procesi 1976)

V rep. std de G, ($G = GL_n$, Sp_n, O_n, SO_n, SL_n)
1er Thm fond pour G donne générateurs de :

- $H^0(G, S^*(V^{\sharp \oplus d}))$ si $G \neq GL_n$
- $H^0(G, S^*(V^{\sharp \oplus d} \oplus V^{\oplus \ell}))$ si $G = GL_n$

Ex : $V \simeq \Bbbk^{2n}$ muni de ω. $Sp_n \subset GL_{2n}$ préserve ω.

$H^0(Sp_n, S^*(V^{\sharp \oplus d}))$ engendrée par $< i|j >, 1 \leq i < j \leq k$

où $< i|j >$: $\begin{array}{ccc} V^{\oplus d} & \to & \Bbbk \\ (v_1, \ldots, v_d) & \mapsto & \omega(v_i, v_j) \end{array}$ pol deg 2, invariant.

Introduction

2. Résultats qualitatifs : Engendrement fini des alg. invariants.

A. Réductivité

Groupes linéaires algébriques

$\Bbbk = \overline{\Bbbk}$. G Z-fermé de $M_n(\overline{\Bbbk})$ ($\Leftrightarrow$ G schéma en gps **lisse** sur $\overline{\Bbbk}$)

$G \subset M_n(\overline{\Bbbk})$ est réductif si $R_u(G) = \{e\}$.

($R_u(G) :=$ +gd sg normal connexe unipotent de G)

Introduction

2. Résultats qualitatifs : Engendrement fini des alg. invariants.

A. Réductivité

Groupes linéaires algébriques

$\Bbbk = \overline{\Bbbk}$. G Z-fermé de $M_n(\overline{\Bbbk})$ ($\Leftrightarrow$ G schéma en gps **lisse** sur $\overline{\Bbbk}$)

$G \subset M_n(\overline{\Bbbk})$ est réductif si $R_u(G) = \{e\}$.

($R_u(G) :=$ +gd sg normal connexe unipotent de G)

Ex : gpes finis, $GL_n(\overline{\Bbbk})$, $SL_n(\overline{\Bbbk})$, $O_n(\overline{\Bbbk})$, $SO_n(\overline{\Bbbk})$, $Sp_n(\overline{\Bbbk})$, etc.

Introduction

2. Résultats qualitatifs : Engendrement fini des alg. invariants.

A. Réductivité

Groupes linéaires algébriques

$\Bbbk = \overline{\Bbbk}$. G Z-fermé de $M_n(\overline{\Bbbk})$ ($\Leftrightarrow$ G schéma en gps **lisse** sur $\overline{\Bbbk}$)

$G \subset M_n(\overline{\Bbbk})$ est réductif si $R_u(G) = \{e\}$.

($R_u(G) :=$ +gd sg normal connexe unipotent de G)

Ex : gpes finis, $GL_n(\overline{\Bbbk})$, $SL_n(\overline{\Bbbk})$, $O_n(\overline{\Bbbk})$, $SO_n(\overline{\Bbbk})$, $Sp_n(\overline{\Bbbk})$, etc.

Schémas en groupes algébriques

$\Bbbk$ corps qcq. G schéma en gps aff. sur $\Bbbk$

(i.e. $G : \Bbbk\text{-alg} \to Gps$, $A \mapsto G(A)$, représ. par $\Bbbk[G]$.)

G réductif $\Leftrightarrow$ $G(\overline{\Bbbk})$ réductif.

Introduction

2. Résultats qualitatifs : Engendrement fini des alg. invariants.

A. Réductivité

Groupes linéaires algébriques

$\Bbbk = \overline{\Bbbk}$. G Z-fermé de $M_n(\overline{\Bbbk})$ ($\Leftrightarrow$ G schéma en gps **lisse** sur $\overline{\Bbbk}$)

$G \subset M_n(\overline{\Bbbk})$ est réductif si $R_u(G) = \{e\}$.

($R_u(G) :=$ +gd sg normal connexe unipotent de G)

Ex : gpes finis, $GL_n(\overline{\Bbbk})$, $SL_n(\overline{\Bbbk})$, $O_n(\overline{\Bbbk})$, $SO_n(\overline{\Bbbk})$, $Sp_n(\overline{\Bbbk})$, etc.

Schémas en groupes algébriques

$\Bbbk$ corps qcq. G schéma en gps aff. sur $\Bbbk$

(i.e. $G : \Bbbk\text{-alg} \to Gps$, $A \mapsto G(A)$, représ. par $\Bbbk[G]$.)

G réductif $\Leftrightarrow$ $G(\overline{\Bbbk})$ réductif.

Ex : Schémas en gpes finis ($\dim \Bbbk[G] < \infty$, ex : gps finis, $(GL_n)_r$).
GL_n, SL_n, O_n, SO_n, Sp_n, etc.

Introduction

2. Résultats qualitatifs : Engendrement fini des alg. invariants.

A. Réductivité

Groupes linéaires algébriques

$\Bbbk = \overline{\Bbbk}$. G Z-fermé de $M_n(\overline{\Bbbk})$ ($\Leftrightarrow$ G schéma en gps **lisse** sur $\overline{\Bbbk}$)

$G \subset M_n(\overline{\Bbbk})$ est réductif si $R_u(G) = \{e\}$.

($R_u(G) :=$ +gd sg normal connexe unipotent de G)

Ex : gpes finis, $GL_n(\overline{\Bbbk})$, $SL_n(\overline{\Bbbk})$, $O_n(\overline{\Bbbk})$, $SO_n(\overline{\Bbbk})$, $Sp_n(\overline{\Bbbk})$, etc.

Schémas en groupes algébriques

$\Bbbk$ corps qcq. G schéma en gps aff. sur $\Bbbk$

(i.e. $G : \Bbbk\text{-alg} \to Gps$, $A \mapsto G(A)$, représ. par $\Bbbk[G]$.)

G réductif $\Leftrightarrow$ $G(\overline{\Bbbk})$ réductif.

Ex : Schémas en gpes finis ($\dim \Bbbk[G] < \infty$, ex : gps finis, $(GL_n)_r$).
GL_n, SL_n, O_n, SO_n, Sp_n, etc.

Origine du nom

Si $\mathrm{car}(\Bbbk) = 0$, G réd $\Leftrightarrow$ G a des représ. semi-simples

Introduction

B. Engendrement fini des invariants (EF)

Déf : G possède prop. (EF) si :

$\forall A$ alg. com. t.f. + action G, $H^0(G, A)$ alg t.f.

Introduction

B. Engendrement fini des invariants (EF)

Déf : G possède prop. (EF) si :

$\forall A$ alg. com. t.f. + action G, $H^0(G, A)$ alg t.f.

Thm : G réductif $\Leftrightarrow$ G possède prop. (EF)

Introduction

B. Engendrement fini des invariants (EF)

Déf : G possède prop. (EF) si :

$\forall A$ alg. com. t.f. + action G, $H^0(G, A)$ alg t.f.

Thm : G réductif $\Leftrightarrow$ G possède prop. (EF)

Contributions :

G lisse (i.e. $\Bbbk[G] \otimes \overline{\Bbbk}$ réduite).

(Nagata 1964) G géom. réd. $\Leftrightarrow$ G prop. (EF)
(Haboush 1975) G réd $\Rightarrow$ G géom. réd. (Conj de Mumford)
(Popov 1979) G prop. (EF) $\Rightarrow$ G réd

G qcq.

(Borsari, Ferrer Santos 1990) G géom. réd. $\Leftrightarrow$ G prop. (EF).
(Waterhouse 1994) G géom. réd. $\Leftrightarrow$ $G(\overline{\Bbbk})$ réd.

Plan leçons 3 et 4

1. Extensions dans $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ calculent cohom de SL_n, GL_n, O_n, Sp_n

Ex : $G = Sp_n$, $V \simeq \Bbbk^{2n}$ rep. std.

Thm (2009,T) :

L'évaluation : $\bigoplus_{i \geq 0} Ext^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\Gamma^i(\Lambda^2), F) \to H^*(Sp_n, F(V^\sharp))$
iso si $2n \geq degF$

Principe :

$$\begin{array}{c}\text{Ext de fcteurs}\\ \text{str. polyn}\end{array} \xrightarrow[\substack{\text{En dérivant}\\ \text{1er Thm Fond}}]{\simeq} \begin{array}{c}\text{Cohom stable } GL_n,\ O_{n,n},\ Sp_n\\ \text{à coeff repres. fonctorielles}\end{array}$$

Plan leçons 3 et 4

1. Extensions dans $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ calculent cohom de SL_n, GL_n, O_n, Sp_n

Ex : $G = Sp_n$, $V \simeq \Bbbk^{2n}$ rep. std.

Thm (2009,T) :

L'évaluation : $\bigoplus_{i \geq 0} Ext^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\Gamma^i(\Lambda^2), F) \to H^*(Sp_n, F(V^\sharp))$
iso si $2n \geq degF$

Principe :

$$\begin{array}{c} \text{Ext de fcteurs} \\ \text{str. polyn} \end{array} \xrightarrow[\substack{\text{En dérivant} \\ \text{1er Thm Fond}}]{\simeq} \begin{array}{c} \text{Cohom stable } GL_n,\ O_{n,n},\ Sp_n \\ \text{à coeff repres. fonctorielles} \end{array}$$

2. Conjecture de van der Kallen

Thm (2008, T,vdK) :

G réductif agit sur A alg. comm. t.f., alors $H^*(G, A)$ est t.f.

Principe :
- se ramener à théorie des invariants, via suites spectrales.
- Pour arrêt s.s., calcul cohom explicite ($\to \mathcal{P}_{\Bbbk}$)

Plan leçons 3 et 4

0. Annulations cohomologiques : bonnes filtrations

1. Extensions dans $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ calculent cohom de SL_n, GL_n, O_n, Sp_n

Ex : $G = Sp_n$, $V \simeq \Bbbk^{2n}$ rep. std.

Thm (2009,T) :

L'évaluation : $\bigoplus_{i\geq 0} Ext^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\Gamma^i(\Lambda^2), F) \to H^*(Sp_n, F(V^\sharp))$
iso si $2n \geq degF$

Principe :

$$\begin{array}{c}\text{Ext de fcteurs}\\ \text{str. polyn}\end{array} \xrightarrow[\substack{\text{En dérivant}\\ \text{1er Thm Fond}}]{\simeq} \begin{array}{c}\text{Cohom stable } GL_n,\ O_{n,n},\ Sp_n\\ \text{à coeff repres. fonctorielles}\end{array}$$

2. Conjecture de van der Kallen

Thm (2008, T,vdK) :

G réductif agit sur A alg. comm. t.f., alors $H^*(G, A)$ est t.f.

Principe :
- se ramener à théorie des invariants, via suites spectrales.
- Pour arrêt s.s., calcul cohom explicite ($\to \mathcal{P}_{\Bbbk}$)

Annulations cohomologiques : Bonnes filtrations (1)

G schéma en gpes de Chevalley sur $\mathbb{k}$ (= réd, lisse, connexe, déployé)
Ex : $G = GL_n$, Sp_n, SO_n

On connait les G-mod simples :

Annulations cohomologiques : Bonnes filtrations (1)

G schéma en gpes de Chevalley sur $\Bbbk$ (= réd, lisse, connexe, déployé)
Ex : $G = GL_n$, Sp_n, SO_n

On connait les G-mod simples :

- **car** 0 **:**

  $L(\lambda)$, $\lambda \in X(T)_+$ poids dominants.

  On peut définir les $L(\lambda)$ via une formule :

$$L(\lambda) := ind_{B^-}^G \Bbbk_\lambda := (\Bbbk_\lambda \otimes \Bbbk[G])^{B^-}$$

Annulations cohomologiques : Bonnes filtrations (1)

G schéma en gpes de Chevalley sur $\mathbb{k}$ (= réd, lisse, connexe, déployé)
Ex : $G = GL_n$, Sp_n, SO_n

On connait les G-mod simples :

- **car** 0 **:**

  $L(\lambda)$, $\lambda \in X(T)_+$ poids dominants.

  On peut définir les $L(\lambda)$ via une formule :

$$L(\lambda) := ind_{B^-}^G \mathbb{k}_\lambda := (\mathbb{k}_\lambda \otimes \mathbb{k}[G])^{B^-}$$

- **car** $p > 0$ **:**

  $L(\lambda)$, $\lambda \in X(T)_+$ poids dominants.

  Mais la formule $ind_{B^-}^G \mathbb{k}_\lambda$ ne définit plus G-mod simple
  $\nabla_G(\lambda) := ind_{B^-}^G \mathbb{k}_\lambda$ = module costandard associé à λ.
  $L(\lambda) = Soc \nabla_G(\lambda)$.

Annulations cohomologiques : Bonnes filtrations (2)

Modules simples vs modules costandard

- Tout G-mod M admet une filtr M_α, t.q. $Gr(M) = \bigoplus L(\lambda)$
  Pb : comportement cohomologique des $L(\lambda)$ complexe

Annulations cohomologiques : Bonnes filtrations (2)

Modules simples vs modules costandard

- Tout G-mod M admet une filtr M_α, t.q. $Gr(M) = \bigoplus L(\lambda)$
  Pb : comportement cohomologique des $L(\lambda)$ complexe
- Bon comportement cohomologique des $\nabla_G(\lambda)$
  Prop : $H^*(G, \nabla_G(\lambda)) = 0 \ * > 0$
  (conséquence thm Kempf)

Annulations cohomologiques : Bonnes filtrations (2)

Modules simples vs modules costandard

- Tout G-mod M admet une filtr M_α, t.q. $Gr(M) = \bigoplus L(\lambda)$
  Pb : comportement cohomologique des $L(\lambda)$ complexe
- Bon comportement cohomologique des $\nabla_G(\lambda)$
  Prop : $H^*(G, \nabla_G(\lambda)) = 0 \ * > 0$
  (conséquence thm Kempf)

Déf : G-mod M admet une bonne filtration, si :
il existe filtration M_α t.q. $Gr(M) = \bigoplus \nabla_G(\lambda)$.

Rq : en particulier $H^*(G, M) = 0$, $* > 0$.

Annulations cohomologiques : Bonnes filtrations (2)

Modules simples vs modules costandard

- Tout G-mod M admet une filtr M_α, t.q. $Gr(M) = \bigoplus L(\lambda)$
  Pb : comportement cohomologique des $L(\lambda)$ complexe
- Bon comportement cohomologique des $\nabla_G(\lambda)$
  Prop : $H^*(G, \nabla_G(\lambda)) = 0 \ * > 0$
  (conséquence thm Kempf)

Déf : G-mod M admet une bonne filtration, si :
il existe filtration M_α t.q. $Gr(M) = \bigoplus \nabla_G(\lambda)$.

Rq : en particulier $H^*(G, M) = 0$, $* > 0$.

Q : description explicite des $\nabla_G(\lambda)$?

Annulations cohomologiques : Bonnes filtrations (2)

Modules simples vs modules costandard

- Tout G-mod M admet une filtr M_α, t.q. $Gr(M) = \bigoplus L(\lambda)$
  Pb : comportement cohomologique des $L(\lambda)$ complexe
- Bon comportement cohomologique des $\nabla_G(\lambda)$
  Prop : $H^*(G, \nabla_G(\lambda)) = 0 \ * > 0$
  (conséquence thm Kempf)

Déf : G-mod M admet une bonne filtration, si :
il existe filtration M_α t.q. $Gr(M) = \bigoplus \nabla_G(\lambda)$.

Rq : en particulier $H^*(G, M) = 0$, $* > 0$.

Q : description explicite des $\nabla_G(\lambda)$?

- $G = GL_n$: modules de Schur

Annulations cohomologiques : Bonnes filtrations (2)

Modules simples vs modules costandard

- Tout G-mod M admet une filtr M_α, t.q. $Gr(M) = \bigoplus L(\lambda)$
  Pb : comportement cohomologique des $L(\lambda)$ complexe
- Bon comportement cohomologique des $\nabla_G(\lambda)$
  Prop : $H^*(G, \nabla_G(\lambda)) = 0 \ * > 0$
  (conséquence thm Kempf)

Déf : G-mod M admet une bonne filtration, si :
il existe filtration M_α t.q. $Gr(M) = \bigoplus \nabla_G(\lambda)$.

Rq : en particulier $H^*(G, M) = 0$, $* > 0$.

Q : description explicite des $\nabla_G(\lambda)$?

- $G = GL_n$: modules de Schur
- $G = Sp_n$: $S^d(V^\sharp)$

Annulations cohomologiques : Bonnes filtrations (2)

Modules simples vs modules costandard

- Tout G-mod M admet une filtr M_α, t.q. $Gr(M) = \bigoplus L(\lambda)$
  Pb : comportement cohomologique des $L(\lambda)$ complexe
- Bon comportement cohomologique des $\nabla_G(\lambda)$
  Prop : $H^*(G, \nabla_G(\lambda)) = 0 \ * > 0$
  (conséquence thm Kempf)

Déf : G-mod M admet une bonne filtration, si :
il existe filtration M_α t.q. $Gr(M) = \bigoplus \nabla_G(\lambda)$.

Rq : en particulier $H^*(G, M) = 0$, $* > 0$.

Q : description explicite des $\nabla_G(\lambda)$?

- $G = GL_n$: modules de Schur
- $G = Sp_n$: $S^d(V^\sharp)$
- $G = SO_n$: $S^d(V^\sharp)/qS^{d-2}(V^\sharp)$

Annulations cohomologiques : Bonnes filtrations (2)

Modules simples vs modules costandard

- Tout G-mod M admet une filtr M_α, t.q. $Gr(M) = \bigoplus L(\lambda)$
  Pb : comportement cohomologique des $L(\lambda)$ complexe
- Bon comportement cohomologique des $\nabla_G(\lambda)$
  Prop : $H^*(G, \nabla_G(\lambda)) = 0 \ * > 0$
  (conséquence thm Kempf)

Déf : G-mod M admet une bonne filtration, si :
il existe filtration M_α t.q. $Gr(M) = \bigoplus \nabla_G(\lambda)$.

Rq : en particulier $H^*(G, M) = 0$, $* > 0$.

Q : description explicite des $\nabla_G(\lambda)$?

- $G = GL_n$: modules de Schur
- $G = Sp_n$: $S^d(V^\sharp)$
- $G = SO_n$: $S^d(V^\sharp)/qS^{d-2}(V^\sharp)$
- $G = GL_n, SO_n, Sp_n$: représ du 1er Thm Fond a bonne filtr.