Université de Lille — FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

2018/19 - Master 1 - M414

TD7 : Homologie singulière

Quelques calculs d'homologie singulière

Dans les exercices suivants, l'expression « calculez l'homologie »sans autre précision signifie : calculez l'homologie à coefficients dans un corps $\Bbbk$ ou l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Vous pouvez au choix calculer l'homologie ou l'homologie réduite.

Exercice 1. Homologie du graphe du faux sinus. Soit G l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de la fonction $x \mapsto \sin(\pi/x)$, pour $x \in [1, \infty[$. Calculez l'homologie singulière de G.

Exercice 2. Homologie du complémentaire d'un ensemble fini de $\mathbb{R}^n$. ☕ Soit $x_k = (k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Calculez l'homologie de $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$.

Exercice 3. Homologie d'un bouquet. ☕ Soient X et Y deux espace topologiques, $x \in X$ et $y \in Y$. On suppose qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}_x \subset X$, contenant x et qui se rétracte par déformation sur $\{x\}$. On suppose de même qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}_y \subset Y$, contenant y et qui se rétracte par déformation sur $\{y\}$. Calculez l'homologie de $X \vee Y$ en fonction de l'homologie de X et de l'homologie de Y.

Exercice 4. Homologie d'une suspension. ☕

a. On rappelle que la suspension de X est l'espace topologique $S(X)$ quotient du cylindre $X \times I$ par la relation d'équivalence qui identifie d'une part tous les points de $X \times \{0\}$ ensemble, et d'autre part tous les points de $X \times \{1\}$ ensemble. Calculez l'homologie de $S(X)$ en fonction de l'homologie de X.

b. Si $f : X \to Y$ est une application continue, l'application $f \times \mathrm{Id}_I$ passe au quotient en une application continue $S(f) : S(X) \to S(Y)$. Calculez $H_*(S(f))$ en fonction de $H_*(f)$.

Exercice 5. Homologie d'un Tore. ☕ Calculez l'homologie d'un cyclindre ouvert $S^1 \times]0, 1[$. Puis calculez l'homologie du tore $T^2 = S^1 \times S^1$.

Exercice 6. Homologie de la Bouteille de Klein. On rappelle que la bouteille de Klein K est le quotient de $I \times [-1, 1]$ par la relation d'équivalence qui identifie d'un part les points de la forme $(x, -1)$ et $(x, 1)$, et d'autre part ceux de la forme $(0, t)$ et $(1, -t)$. Montrez que K peut s'écrire comme la réunion de deux ouverts homéomorphes à $S^1 \times]0, 1[$, puis calculez l'homologie de K [Indication : la réponse dépend de l'anneau R, selon que $R = \mathbb{Z}$, R est un corps de caractéristique 2 ou R est un corps de caractéristique différente de 2.]

Exercice 7. Homologie de $\mathbb{C}P^n$.

a. On considère l'inclusion $\iota : \mathbb{C}P^{n-1} \to \mathbb{C}P^n$ donnée par $[z_0 : \dots : z_{n-1}] \mapsto [z_0 : \dots : z_{n-1} : 0]$. Soit $x = [0 : \dots : 0 : 1]$. Montrez que $\mathcal{U} = \mathbb{C}P^n \setminus \{x\}$ se rétracte par déformation sur $\iota(\mathbb{C}P^{n-1})$.

b. Calculez l'homologie de $\mathbb{C}P^n$ en fonction de celle de $\iota(\mathbb{C}P^{n-1})$. [Indication : appliquez Mayer-Vietoris avec $\mathcal{U}$ comme à la question précédente et V une petite boule ouverte autour de x.] Déduisez-en l'homologie de $\mathbb{C}P^n$.

Autour du théorème de Brouwer

Exercice 8. Montrez que toute application continue, homotopiquement triviale, admet un point fixe. [Indication : Une application homotopiquement triviale s'étend en une application $D^{n+1} \to S^n$.]

Exercice 9. Soit $f : D^n \to D^n$ continue. Montrez qu'il existe $x \in D^n$ tel que $f(x) = 2x$.

Exercice 10. Théorème de Perron-Frobenius. ☕ On se propose de montrer l'énoncé suivant.

Thm. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ une matrice carrée à coefficients réels positifs. On suppose A inversible. Alors il existe $\lambda > 0$ et un vecteur colonne v non nul à coefficients positifs tel que $Av = \lambda v$.

a. Montrez que toute application continue $\Delta^{n-1} \to \Delta^{n-1}$ admet un point fixe. (Ici $\Delta^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ est le simplexe standard).

b. Démontrez le théorème de Perron-Frobenius. [Indication : pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note $s(x) = x_1 + \cdots + x_n$. Considérez l'application $x \mapsto A(x)/s(A(x))$.]

Homologie singulière et groupe fondamental

Exercice 11. H_1 et π_1. ☕ Soit X un espace topologique et $x_0 \in X$. Considérons le 1-simplexe standard

$$\Delta^1 = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t_1 + t_2 = 1 \ , \ t_1 \geq 0 \ , \ t_2 \geq 0 \ \}$$

et l'homéomorphisme $\omega : \Delta^1 \to [0,1]$ tel que $\omega(t_1, t_2) = t_1$. A tout chemin $f : [0,1] \to X$ on associe un 1-simplexe singulier $h(f) := f \circ \omega$.

a. Montrez que si α est un lacet alors $h(\alpha)$ est un cycle. Montrez que si α et α' sont deux lacets homotopes alors $h(\alpha) - h(\alpha')$ est un bord.

b. Montrez que h induit un morphisme de groupes appelé *morphisme de Hurewicz*

$$\mathrm{Hur} : \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}} \to H_1(X; \mathbb{Z})$$

c. On souhaite démontrer le théorème de Hurewicz :

Thm. Si X est connexe par arcs, alors Hur est un isomorphisme.

i) Pour chaque $x \in X$ on choisit un chemin γ_x d'origine x_0 et d'extrémité x.A chaque 1-simplexe singulier $\sigma : \Delta_1 \to X$ on associe un lacet $\psi(\sigma)$ de X basé en x_0 et défini par :

$$\psi(\sigma) = \gamma_{\sigma \circ \omega^{-1}(0)} \cdot (\sigma \circ \omega^{-1}) \cdot \gamma_{\sigma \circ \omega^{-1}(1)} \ .$$

En étendant par linéarité l'application $\sigma \mapsto [\psi(\sigma)] \in \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}$, on obtient un morphisme de groupes abéliens $S_1(X; \mathbb{Z}) \to \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}$. Montrez que ce morphisme induit un morphisme de groupes abéliens

$$\Psi : H_1(X; \mathbb{Z}) \to \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}} \ .$$

ii) Montrez que Ψ est un inverse de Hur. [Indication : montrer que si σ est un 1-simplexe singulier de X alors la classe d'homologie de $\Psi(\sigma)$ est représentée par le cycle $\sigma + \gamma_{\sigma \circ \omega^{-1}(0)} - \gamma_{\sigma \circ \omega^{-1}(1)}$.]

Exercice 12. Homologie des surfaces. Soit S_g la surface compacte orientée de genre $g \geq 1$ et soit $x \in S_g$. On rappelle (cours) que S_g peut s'obtenir comme quotient d'un $4g$-gone régulier, et que $\mathcal{U} = S_g \backslash \{x\}$ se rétracte par déformation sur un bouquet de $2g$ cercles.

a. Calculez $H_0(S_g; \mathbb{Z})$ et $H_1(S_g; \mathbb{Z})$.

b. En prenant pour $\mathcal{V}$ une petite boule ouverte autour de x et en appliquant la suite de Mayer Vietoris, calculez $H_i(S_g;\mathbb{Z})$ pour tout $i \geq 2$.

Exercice 13. Construction d'applications de degré $n \in \mathbb{Z}$.

a. Soit $f : S^1 \to S^1$ une application continue telle que $f(1) = 1$. Montrez que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1,1) \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[d, "\mathrm{Hur}"] & \pi_1(S^1,1) \arrow[d, "\mathrm{Hur}"] \\ H_1(S^1,\mathbb{Z}) \arrow[r, "H_1(f)"] & H_1(S^1,\mathbb{Z}) \end{tikzcd} .$$

b. Montrez que l'application $f : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ est de degré n ($n \in \mathbb{Z}$).

c. Soit $k \geq 2$. Construisez pour tout $n \in \mathbb{Z}$ une application continue $g : S^k \to S^k$ de degré n. [Indication : utilisez la suspension d'un espace topologique.]

Formule d'Euler

Exercice 14. Formule d'Euler des polyèdres. Soit K un complexe simplicial géométrique fini de $\mathbb{R}^3$. On suppose que le polyèdre $|K|$ est homéomorphe à S^2. On note n_k le nombre de k-simplexes de K.

a. Montrez que $n_3 = 0$.

b. Montrez que $n_0 - n_1 + n_2 = 2$.

c. Montrez que pour un polyèdre régulier de $\mathbb{R}^3$ avec s sommets, a arêtes et f faces, on a $s - a + f = 2$

Homologie et revêtements

Exercice 15. Définition du transfert. Soit $p : E \to B$ un revêtement à s feuillets.

a. Soit $\sigma : \Delta^n \to B$ une application continue. Montrez qu'il existe une unique application continue $\sigma_a : \Delta^n \to E$ telle que $p \circ \sigma_a = \sigma$ et $\sigma(e_1) = a$ (on rappelle que Δ^n est définie comme l'enveloppe convexe $\Delta^n = < e_1, \ldots, e_{n+1} >$).

b. Soit $T_i : S_i(B;R) \to S_i(E;R)$ l'unique application R-linéaire qui envoie un simplexe singulier σ sur

$$T(\sigma) = \sum_{a \in p^{-1}\{e_1\}} \sigma_a \ .$$

Montrez que les T_i définissent un morphisme de complexes $T_* : S_*(B;R) \to S_*(E;R)$.

c. Montrez que $S_*(p) \circ T_*$ est égal à la multiplication par s. Déduisez que si s est inversible dans R alors T_* induit une injection en homologie, et p induit une surjection en homologie.

Exercice 16. Homologie de $\mathbb{R}P^n$. Soit $p : E \to B$ un revêtement à deux feuillets.

a. Montrez qu'on a un suite exacte courte de complexes

$$0 \to S_*(B;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{T_*} S_*(E;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{S_*(p)} S_*(B;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0 \ .$$

Ecrivez la suite exacte longue associée en homologie.

b. Calculez l'homologie $H_i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ à l'aide de la question précédente.