Université de Lille — Faculté des Sciences et Technologies

2018/19 - Master 1 - M414

TD6 : Algèbre Homologique

Exercice 1. Propriétés universelles pour les complexes. Soit C_* un complexe, D_* un sous-complexe. Énoncez et démontrez une propriété universelle pour le quotient C_*/D_*. De même, énoncez et démontrez une propriété universelle pour la somme directe de complexes.

Exercice 2. Exemple élémentaire de complexes de $\Bbbk$-espaces vectoriels. ☕ Calculez l'homologie du complexe de $\Bbbk$-espaces vectoriels $C_3 \xrightarrow{d_3} C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0$ où tous les C_i sont égaux à $\Bbbk^3$ et la matrice de chaque d_i dans la base canonique vaut

$$[d_i]_{Bcan} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3. Exemples élémentaires de complexes de groupes abéliens. ☕

a. Soient $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de groupes abéliens de type fini. Construisez l'exemple le plus simple possible d'un complexe de groupe abéliens C_*, tel que $H_n(C_*) = A_n$. Même question en imposant en plus que les C_i sont des groupes abéliens libres.

b. Construisez un complexe de groupes abéliens C_* tel que les C_i ne sont pas des groupes abéliens de type fini, mais dont tous les groupes d'homologie $H_k(C)$ sont des groupes abéliens de type fini.

Exercice 4. Complexe associé aux parties d'un ensemble. ☕ Soit $E = \{1, \dots, n\}$, et $\mathcal{P}_{k+1}(E)$ l'ensemble des parties à $k+1$ éléments de E_n. Une partie à $k+1$ éléments de E est notée $\{i_0 < \cdots < i_k\}$, c.-à-d. on range toujours les éléments de la partie par ordre croissant. On note $\{i_0 < \cdots < \cancel{i_\ell} < \cdots < i_k\}$ la partie à k éléments obtenue en retirant l'élément i_ℓ . On note :

- $C(E)_k$ le R-module libre engendré par l'ensemble $\mathcal{P}_{k+1}(E_n)$, pour $0 \leq k < n$,
- $d : C(E)_k \to C(E)_{k-1}$ le morphisme R-linéaire tel que :

$$d(\{i_0 < \cdots < i_k\}) = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell \{i_0 < \cdots < \cancel{i_\ell} < \cdots < i_k\}$$

a. Montrez que $C(E)_*$ est un complexe (c'est à dire vérifiez que $d \circ d = 0$).

b. Calculez l'homologie des complexes $C(E)_*$ pour $n = 1, 2, 3$.

c. Montrez que $H_0(C(E)_*) = R$.

d. Dans cette question on calcule l'homologie des complexes $C(E)$ pour tout n. Si $\sigma \in C(E)_{k-1}$ est une combinaison linéaire d'ensembles ne contenant pas l'élément 1, on note $\{1\} \cup \sigma$ l'élément de $C(E)_k$ obtenu en rajoutant l'élément 1 à tous les ensembles. Par exemple si $\sigma = \{2 < 3\} + 4\{2 < 4\}$ alors $\{1\} \cup \sigma = \{1 < 2 < 3\} + 4\{1 < 2 < 4\}$.

i) Montrez que tout élément $\sigma \in C(E)_k$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sigma = \{1\} \cup \sigma_1 + \sigma_2$ où σ_2 est une combinaison linéaire d'ensembles ne contenant pas 1. Calculez $d(\sigma)$.

ii) Montrez que si $d(\sigma) = 0$ alors $\sigma = d(\ \{1\} \cup \sigma_2\ )$, et déduisez-en l'homologie de $C(E)$.

Exercice 5. Caractéristique d'Euler d'un complexe. ☕

a. Soit $\Bbbk$ un corps, et soit C_* un complexe de $\Bbbk$-espaces vectoriels tel que : (i) C_k est de dimension finie pour tout k, et (ii) $C_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices i. On appelle caractéristique d'Euler de C_* le nombre

$$\chi(C) = \sum (-1)^k \dim_{\Bbbk} H_k(C)\ .$$

Montrez que $\chi(C) = \sum (-1)^k \dim_{\Bbbk} C_k$.

b. Soit C_k un espace vectoriel de dimension k. Montrez qu'il n'existe pas de suite exacte longue de la forme
$$0 \to C_{200} \to C_{360} \to C_{359} \to C_{358} \to \cdots \to C_2 \to C_1 \to 0\ .$$

Exercice 6. Le lemme des neuf. On considère le diagramme de R-modules suivants, dont les lignes sont exactes et dont toutes les colonnes sauf une sont également exactes. Montrez que la dernière colonne est exacte.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_2 \arrow[r] \arrow[d] & N_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Exercice 7. Homologie d'un sous-complexe. ☕ Soit C_* un sous-complexe de D_*.

a. Montrez que l'inclusion $\iota_* : C_* \to D_*$ induit des morphismes $H_n(\iota)$ injectifs (resp. surjectifs) pour tout n si et seulement si l'application quotient $q_* : D_* \to (D/C)_*$ induit des morphismes $H_n(q)$ surjectifs (resp. nuls) pour pour tout n.

b. Montrez que l'inclusion $\iota_* : C_* \to D_*$ induit des isomorphismes $H_n(\iota)$ pour tout n si et seulement si $H_n(D/C) = 0$ pour tout n.

Exercice 8. Un petit théorème de coefficients universels. ✪ Si A est un groupe abélien et n un entier, on note ${}_nA$ sa partie de n-torsion, c'est à dire ${}_nA = \{a \in A \mid na = 0\}$ et A/n sa réduction modulo n (c'est à dire le groupe quotient de A par le sous-groupe nA).

a. Soit C_* un complexe de groupes abéliens libres. Montrez que pour tout i, l'homologie de C_* et l'homologie de C_*/n sont reliées par une suite exacte courte
$$0 \to H_i(C)/n \to H_i(C/n) \to {}_nH_{i-1}(C) \to 0\ .$$

b. Soit $f_* : C_* \to D_*$ un morphisme entre complexes de groupes abéliens libres, et soit $f_*/n : C_*/n \to D_*/n$ le morphisme induit sur les réductions modulo n des complexes. Montrez que si $H_i(f)$ est un isomorphisme pour tout i alors $H_i(f/n)$ est un isomorphisme pour tout i. Montrez que la réciproque est fausse.

Exercice 9. Torsion d'un groupe abélien.✪ Soit A un groupe abélien, et $\pi : L \twoheadrightarrow A$ un morphisme surjectif avec L libre. On note $\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \ker \pi / n \cdot \ker \pi$.

a. Montrez que $\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est isomorphe au groupe ${}_nA = \{a \in A \mid na = 0\}$.

b. Montrez que si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte courte de groupes abéliens alors on a une suite exacte longue :
$$0 \to {}_nA \to {}_nB \to {}_nC \to A/nA \to B/nB \to C/nC \to 0\ .$$