2018/19 - Master 1 - M414

TD5 : Groupe fondamental (2)

Un peu de théorie des groupes

Exercice 1. Exemples de sommes amalgammées. ☕ Soient $f_1 : H \to G_1$ et $f_2 : H \to G_2$ deux morphismes de groupes. Donnez une description plus simple de $G_1 *_H G_2$ dans les cas suivants.

1. Lorsque $G_1 = \{1_G\}$.
2. Lorsque f_1 est un isomorphisme de groupes.
3. Lorsque f_1 est un morphisme de groupes trivial.

Exercice 2. Un exemple de présentations de groupes. Montrez que les groupes $G = \langle s, t \mid s^{-1}tst \rangle$ et $H = \langle a, b \mid a^2b^2 \rangle$ sont isomorphes.

Exercice 3. Abélianisé d'un produit libre. Soient G et H des groupes. Montrez l'isomorphisme de groupes $G_{ab} \times H_{ab} \simeq (G * H)_{ab}$.

Exercice 4. Abélianisé de quelques groupes fondamentaux. ☕

a. On rappelle que le groupe fondamental de la surface orientable de genre $n \geq 1$ est isomorphe au groupe à $2n$ générateurs et une relation $G = \langle a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \mid a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1} \rangle$. Déterminez l'abélianisé de G.

b. On rappelle que le groupe fondamental de la bouteille de Klein est isomorphe au groupe $G = \langle s, t \mid stst^{-1} \rangle$. Déterminez l'abélianisé de G.

Exercice 5. Abélianisation de $GL_n(K)$. ✪ Soit K un corps, $G = GL_n(K)$. On note $[u, v] := u^{-1}v^{-1}uv$.

a. Montrez que $[G, G] \subset SL_n(K)$. [*Indication* : utilisez le déterminant].

b. Notons E_{ij} les matrices carrées élémentaires. Si $n \geq 3$, vérifiez que $I_n + E_{12} = [I_n + E_{13}, I_n + E_{32}]$, et déduisez-en que $[G, G] = SL_n(K)$. [*Indication* : on rappelle que les transvections sont conjuguées et que $SL_n(K)$ est engendré par les transvections.]

c. Montrez que si $\mathrm{Card}K \geq 4$ et $a \in K \setminus \{-1, 0, 1\}$ on a

$$I_n + E_{12} = \left[I_n + \frac{a^2}{1 - a^2} E_{12} \, , \, \mathrm{Diag}(a, a^{-1}, 1, \dots, 1) \right] .$$

Déduisez-en que $[G, G] = SL_n(K)$.

d. Montrez que pour $n = 2$ et K le corps à deux éléments, on a $[G, G] \neq SL_n(K)$

Exercice 6. Le groupe symétrique par générateurs et relations. ✪ Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique d'un ensemble à n éléments, $n \geq 2$.

a. Montrez que les transpositions $\tau_i = (i, i + 1)$ pour $1 \leq i < n$, engendrent $\mathfrak{S}_n$.

b. Montrez les relations suivantes :

$$(1) \quad \tau_i^2 = 1 \, , \qquad (2) \quad (\tau_i\tau_{i+1})^3 = 1 \text{ si } 1 < i < n - 1 \, , \qquad (3) \quad (\tau_i\tau_j)^2 = 1 \text{ si } 1 < i, j < n \text{ et } |i - j| \neq 1.$$

c. On se propose de montrer que $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe au groupe

$$G_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid s_i^2 \, , (s_is_{i+1})^3 \, , (s_is_j)^2 = 1, \quad |i - j| \neq 1 \rangle$$

i) Montrez que l'isomorphisme a lieu pour $n = 2$.

On suppose dans la suite que l'isomorphisme a lieu pour n et on veut montrer qu'il a lieu pour $n + 1$.

ii) Notons H le sous-groupe de G_{n+1} engendré par les s_i, $1 \leq i < n$. Montrez que $\mathrm{card}\, H \leq n!$.

iii) On considère l'action de H sur G_{n+1} par translations à gauche. On pose $H_{n+1} = H$, $H_n = s_n H$, $H_{n-1} = s_{n-1} s_n H, \ldots, H_1 = s_1 \ldots s_n H$. Montrez que pour $i < n$ et pour tout j, $s_i H_j \subset H_j$. En déduire que l'ensemble des orbites G_{n+1}/H a au plus $(n + 1)$ éléments.

iv) En déduire que $\mathrm{card}\, G_{n+1} \leq (n + 1)!$, puis que $\mathfrak{S}_{n+1}$ est isomorphe à G_{n+1}.

Exercice 7. Le lemme du « Ping-Pong ». ✪ Il est souvent difficile de démontrer qu'on n'a pas oublié de relations lorsqu'on décrit un groupe infini G par générateurs et relations. Cet exercice propose une technique bien connue pour le faire[1].

Soit G un groupe et G_1 et G_2 deux sous-groupes de G tels que le morphisme canonique $\phi : G_1 * G_2 \to G$ est surjectif. On suppose que G_1 possède au moins trois éléments. On suppose qu'il existe deux parties E_1 et E_2 non vides de E telles que

$$(1) \quad E_2 \not\subset E_1 \,, \qquad (2) \quad \forall g \in G_1 \setminus \{1\} \; gE_2 \subset E_1 \,, \qquad (3) \quad \forall g \in G_2 \setminus \{1\} \; gE_1 \subset E_2 \,.$$

(Les propriétés (2) et (3) disent que groupes G_1 et G_2 jouent au ping-pong sur la table $E_1 \cup E_2$). Montrez que ϕ est un isomorphisme. [*Indication* : pour montrer que l'image par ϕ d'un mot réduit n'est pas l'élément neutre de G, on montrera que cette image agit non trivialement sur E.]

Exercice 8. Groupes linéaires. ✪ Un groupe est dit *linéaire* s'il existe un morphisme injectif de groupes $G \to GL_n(K)$ pour un certain corps K et un certain entier n.

a. Montrez que les groupes finis sont linéaires.

b. Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ deux éléments de $SL_2(\mathbb{Z})$.

i) Montrez que les sous-groupes G_A et G_B de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendrés respectivement par A et B sont isomorphes à $(\mathbb{Z}, +)$.

ii) Montrez que le morphisme canonique $\phi : G_A * G_B \to SL_2(\mathbb{Z})$ est injectif. [*Indication* : utilisez le lemme du ping-pong. Pour cela considérez l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{R}^2$ et les ensembles $E_1 = \{(x, y) \mid |x| > |y|\}$ et $E_2 = \{(x, y) \mid |x| < |y|\}$.]

iii) Déduisez-en que F_2 est linéaire.

Autour du théorème de Van Kampen

Exercice 9. Suspension d'un espace. ☕ Soit X un espace topologique. La suspension de X est l'espace topologique $S(X)$ quotient du cylindre $X \times I$ par la relation d'équivalence qui identifie d'une part tous les points de $X \times \{0\}$ ensemble, et d'autre part tous les points de $X \times \{1\}$ ensemble.

a. Faites un dessin de $S(X)$.

b. Montrez que si $n \geq 0$, alors $S(S^n)$ est homéomorphe à S^{n+1}.

c. Montrez que si X est connexe par arcs, alors $S(X)$ est simplement connexe. Est-ce encore vrai si X n'est pas connexe par arcs ?

1. Exercice tiré de Michel Alessandri, Thèmes de Géométrie, Dunod, p. 103 – 104.

Exercice 10. Groupe fondamental de la bouteille de Klein. On rappelle que la bouteille de Klein K est un quotient du carré $[0,1] \times [-1,1]$ par la relation d'équivalence qui identifie d'une part les points $(0,x)$ et $(1,-x)$ et d'autre part les points $(y,1)$ et $(y,-1)$. A partir de cette description, montrez que le groupe fondamental de K est le groupe $G = \langle a, b \mid abab^{-1} \rangle$. (*Indication* : suivez la méthode utilisée pour les surfaces orientables).

Exercice 11. Groupe fondamental d'un ouvert du plan. ☕ Soient $x_1, \ldots, x_n$, n points de $\mathbb{R}^2$. Calculez le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Donnez des lacets explicites qui engendrent ce groupe fondamental.

Exercice 12. Groupe fondamental des variétés épointées. ☕ Soit V une variété topologique connexe de dimension $n \geq 3$, et soit x un point de V. Montrez que l'inclusion $V \setminus \{x\} \hookrightarrow V$ induit des isomorphismes au niveau des groupes fondamentaux. Est-ce encore vrai si $n \leq 2$?

Exercice 13. Groupe fondamental des espaces projectifs complexes. Montrez que $\mathbb{C}P^n$ est simplement connexe pour $n \geq 1$. (*Indication :* on peut montrer que si x est un point de $\mathbb{C}P^n$ alors $\mathbb{C}P^n \setminus \{x\}$ se rétracte par déformation sur un sous-espace homéomorphe à $\mathbb{C}P^{n-1}$ et utiliser l'exercice précédent.)

Exercice 14. Somme connexe de variétés. ✪ Soient V_1 et V_2 deux variétés topologiques connexes par arcs de dimension $n \geq 2$. Pour $k = 1, 2$, on se donne un ouvert $\mathcal{U}_k$ de V_k avec un homéomorphisme $\phi_k : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\simeq} \mathcal{U}_k$. On note B^n la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire $B^n = D^n \setminus S^{n-1}$. La *somme connexe* $V_1 \sharp V_2$ est la variété topologique [2] de dimension n obtenue comme le quotient :

$$V_1 \sharp V_2 = \Big(V_1 \setminus \phi_1(B) \bigsqcup V_2 \setminus \phi_2(B) \Big) \Big/ \sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence qui identifie chaque point $x \in \phi_1(S^{n-1})$ avec le point $\phi_2(\phi_1^{-1}(x)) \in \phi_2(S^{n-1})$.

a. Faites un dessin. A quoi ressemble la somme connexe de deux tores ?

b. On suppose $n \geq 3$, calculez le groupe fondamental de $V_1 \sharp V_2$ à l'aide du théorème de Van Kampen.

c. On fixe $n \geq 3$. Construisez [3] une variété de dimension n compacte dont le groupe fondamental est isomorphe à F_k.

d. On suppose $n = 2$. Calculez le groupe fondamental du tore à deux trous à l'aide du théorème de Van Kampen et de l'opération de somme connexe.

Exercice 15. Bouquets et bracelets. ☕ Soit X un espace topologique et $x \in X$. On considère le bouquet $X \vee S^1$ obtenu en identifiant $x \in X$ et $1 \in S^1$. Soit $n \geq 1$, ξ une racine primitive n-ème de l'unité. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des copies de X, et notons $x_i \in X_i$ la copie de l'élément $x \in X$. On fabrique le « bracelet » $B_n(X)$ comme l'espace topologique quotient

$$B_n(X) = \left(S^1 \sqcup \bigsqcup_{1 \leq i \leq n} X_i \right) \Big/ \sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence qui identifie chaque x_i à ξ_i.

2. Un petit exercice de topologie consiste à montrer que $V_1 \sharp V_2$ est bien une variété topologique de dimension n. On peut trouver l'opération de somme connexe dans le livre d'Alessandri, Thèmes de Géométrie, Dunod, p. 15.

3. L'opération de somme connexe est une opération de « chirurgie » sur les variétés. En général, les *opérations de chirurgie sur les variétés* sont des opérations de découpage et de suture qui permettent de créer de nombreux exemples de variétés. Avec un peu plus de travail chirurgical on peut montrer le résultat suivant. **Thm :** Soit $n \geq 4$. Pour tout groupe G de présentation finie, il existe une variété V compacte connexe de dimension n dont le groupe fondamental est isomorphe à G.

a. Faites un dessin de $B_n(X)$ (choisissez votre décoration X avec goût !).

b. Montrez que l'application $p : B_n(X) \to X \vee S^1$, telle que $p(z) = z$ si z est dans l'un des X_i, et $p(z) = z^n$ si $z \in S^1$ est un revêtement à n feuillets.

c. Que dire sur l'application induite par p au niveau des groupes fondamentaux ?

d. On prend maintenant $X = S^1$. Calculez le groupe fondamental de $B_n(S^1)$. En déduire que F_2 contient F_{n+1} comme sous-groupe. Donnez trois éléments explicites qui engendrent une un sous-groupe de F_2 isomorphe à F_3.

Exercice 16. Graphes. ☕ Un graphe abstrait (fini) est la donnée d'un ensemble fini S (les sommets), d'un ensemble fini A (les arêtes), et de deux applications $e_0 : A \to S$ et $e_1 : A \to S$ (qui indiquent quels sont les deux extrémités de chaque arête). A tout graphe abstrait (S, A, e_0, e_1) on peut associer sa réalisation topologique $G(S, A, e_0, e_1)$. Plus précisément, pour chaque $\alpha \in A$ on se donne une copie I_α de l'espace topologique I. Alors $G(S, A, e_0, e_1)$ est l'espace topologique quotient :

$$G = \left(\bigsqcup_{s \in S} \{s\} \sqcup \bigsqcup_{\alpha \in A} I_\alpha \right) \Big/ \sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence qui identifie chaque point $0 \in I_\alpha$ avec le point $e_0(\alpha) \in S$ et chaque point $1 \in I_\alpha$ avec le point $e_1(\alpha) \in S$.

a. Déterminez à homéomorphisme près la réalisation des graphes topologiques suivants.

i) Le graphe avec une arête α, deux sommets s_0 et s_1, et $e_0(\alpha) = s_0$, $e_1(\alpha) = s_1$.

ii) Le graphe avec deux arêtes α, β, deux sommets s_0 et s_1, et $e_0(\alpha) = e_0(\beta) = s_0$, $e_1(\alpha) = e_1(\beta) = s_1$.

iii) Le graphe avec n arêtes, et 1 seul sommet s (et e_0 et e_1 sont constantes égales à s).

b. Montrez que tout graphe topologique est homéomorphe à un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ pour n assez grand [4].

c. Soit G un graphe topologique. Dans cette question, on démontre que si on contracte une arête de G qui a deux extrémités distinctes, on ne change pas le type d'homotopie de G.

Notation : soient $f, g : X \to Y$ et $A \subset X$. On note « $f \sim g \operatorname{rel} A$ », si f et g sont homotopes par une homotopie H qui fixe A : $\forall (a,t) \in A \times I \quad H(a,t) = a$ (En particulier, $f(a) = g(a)$ pour tout $a \in A$).

i) Montrez que $\mathrm{Id}_{[0,1]} \sim f \operatorname{rel} \{0,1\}$ où $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \text{ et } 1 \text{ sinon.} \end{array}$

ii) Soit G un graphe topologique, I_α une arête de G d'extrémités distinctes $s_0 \neq s_1$. Soit B_0 l'ensemble des arêtes différentes de I_α dont une extrémité est s_0. On considère une étoile E_0 autour de s_0, plus précisément E_0 est le sous-espace (où $\frac{1}{4} I_\beta$ signifie « le quart de l'arête I_β qui touche s_0 ») :

$$E_0 := \bigcup_{\beta \in B_0} \tfrac{1}{4} I_\beta \cup \tfrac{1}{2} I_\alpha$$

Notons ∂E_0 le bord de E_0 (c'est un ensemble de $\operatorname{card}(B_0) + 1$ points). Soit $q : E_0 \to E_0' = E_0 / \frac{1}{2} I_\alpha$ l'application quotient et soit $\partial E_0' = q(\partial E_0)$.

Construisez une application $r : E_0' \to E_0$ telle que $r \circ q \sim \mathrm{Id} \operatorname{rel} \partial E_0$ et $q \circ r \sim \mathrm{Id} \operatorname{rel} \partial E_0'$.

iii) Montrez que l'application quotient $G \to G/I_\alpha$ est une équivalence d'homotopie.

d. Montrez que le groupe fondamental d'un graphe connexe possédant a arêtes et s sommets est un groupe libre à $a - s + 1$ générateurs.

4. En fait, $n = 3$ est toujours assez grand, c'est un exercice sur la connexité par arcs des ouverts de $\mathbb{R}^3$. Mais $n = 2$ n'est pas toujours possible. On appelle *graphe planaire* un graphe qui se plonge dans $\mathbb{R}^2$. On sait exactement quels sont les graphes qui se plongent dans $\mathbb{R}^2$, c'est le sujet d'un célèbre théorème de Kuratowski (1930).