# 2018/19 - Master 1 - M414

# TD4 : Groupe fondamental (1)

## Généralités sur le groupe fondamental

**Exercice 1. Groupe fondamental et composante connexe.** Soit $X$ un espace topologique, $x_0 \in X$ et $C$ la composante connexe par arcs de $x_0$. Montrez que l'inclusion $C \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme $\pi_1(C, x_0) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(X, x_0)$.

**Exercice 2. Groupe fondamental pour les topologies triviales.** Soit $X$ un ensemble, et $x \in X$. Calculez $\pi_1(X, x)$ si $X$ est muni de la topologie discrète, ou s'il est muni de la topologie grossière.

**Exercice 3. Groupe fondamental d'un produit.** ☕ Soit $(X, x)$ et $(Y, y)$ des espaces topologiques pointés. Montrez que $\pi_1(X \times Y, (x, y)) = \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$. Calculez par cette méthode le groupe fondamental du tore $T^2$.

**Exercice 4. Caractérisation de la simple connexité.** On rappelle qu'un espace topologique $X$ est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs, et si $\pi_1(X, x) = \{1\}$. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes.

1. $X$ est simplement connexe.
2. Toute application $f : S^1 \to X$ est homotope à une application constante.
3. Toute application $f : S^1 \to X$ s'étend en une application $\overline{f} : D^2 \to X$.

**Exercice 5. Le petit théorème de Van Kampen.** Soit $X$ un espace topologique et $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de $X$ tels que $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ et tels que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ est connexe par arcs. Soit $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$

**a.** Soit $\gamma$ un lacet de $X$ basé en $x$. A l'aide du lemme de Lebesgue, montrez que $\gamma$ est homotope à la concaténation d'un nombre fini de lacets $\gamma_i$ basés en $x$, et qui sont tels que $\operatorname{Im} \gamma_i \subset \mathcal{U}$ ou $\operatorname{Im} \gamma_i \subset \mathcal{V}$.

**b.** En déduire que si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont simplement connexes, alors $X$ est simplement connexe.

**c.** Application : montrez que $S^n$ $(n \geq 2)$, et $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ $(n \geq 2)$ sont simplement connexes.

## Théorie du degré

**Exercice 6. Degré d'une application $f : S^1 \to S^1$.** ☕ Dans le cours, on a défini le degré d'un lacet $\gamma : I \to S^1$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$. Dans cet exercice, on étudie la notion plus générale de degré d'une application continue $f : S^1 \to S^1$ quelconque. En particulier, on ne suppose pas que $f(1) = 1$.

**a.** Soit $f : S^1 \to S^1$ continue. Soit $\widetilde{f} : I \to \mathbb{R}$ un relèvement de l'application $I \to S^1$, $t \mapsto f(e^{2i\pi t})$ au travers du revêtement exponentiel $p : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2i\pi t}$. Montrez que $\overline{f}(1) - \overline{f}(0)$ est un nombre entier, qui ne dépend pas du choix du relèvement $\widetilde{f}$. On note cet entier $\deg(f)$.

**b.** Calculez le degré de l'application $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ (Remarque : le degré d'applications polynômes plus générales est étudié dans l'exercice sur le principe de l'argument plus bas dans la feuille).

**c.** Montrez que si $f, g : S^1 \to S^1$ sont homotopes, alors $\deg(f) = \deg(g)$. Réciproquement, montrez que deux applications continues $f, g : S^1 \to S^1$ de même degré sont homotopes.

**d.** Montrez que $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$.

**e.** On note $(f \cdot g)(z) := f(z)g(z)$. Calculez $\deg(f \cdot g)$.

**f.** Montrez que le degré d'un homéomorphisme de $S^1$ vaut $\pm 1$. Donnez un homéomorphisme de degré $-1$. Montrez que les applications continues $f : S^1 \to S^1$ injectives sont de degré $\pm 1$. Montrez que les applications continues $f : S^1 \to S^1$ de degré non nul sont surjectives.

**Exercice 7. Le théorème de Borsuk-Ulam.** Le but de l'exercice est de montrer que pour toute application continue $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$, il existe $x \in S^2$ telle que $f(-x) = f(x)$.

**a.** Montrez que pour toute application continue $g : S^1 \to S^1$ qui s'étend au disque $D^2$, on a $\deg g = 0$.

**b.** Montrez que si $g : S^1 \to S^1$ est une application telle que $g(-x) = -g(x)$, alors le degré de $g$ est impair.

**c.** Montrez qu'il n'existe pas d'application $h : S^2 \to S^1$ telle que $h(-x) = -h(x)$.

**d.** Concluez.

## Quelques applications en analyse complexe

**Exercice 8. Le principe de l'argument.** ✪ Soit $D = D(a, r)$ un disque de $\mathbb{C}$ de centre $a$ et de rayon $r > 0$, soit $C$ le bord du disque.

**a.** Montrez que si $a_1 \in D \setminus C$ alors l'application $f : C \to S^1$ définie par $f(z) = (z - a_1)/|z - a_1|$ est homotope à l'application $g(z) = (z - a)/|z - a|$.

**b.** Montrez que si $a_1 \in \mathbb{C} \setminus D$ alors l'application $f(z) = (z - a_1)/|z - a_1|$ est homotope à l'application constante égale à 1.

**c.** Soit $P$ un polynôme qui ne s'annule pas sur $C$, et qui a $k$ racine dans $D \setminus C$, comptées avec multiplicités.

i) Montrez que $f_P : S^1 \to S^1$, $f_P(z) = P(a + rz)/|P(a + rz)|$ est homotope à l'application $z \mapsto z^k$.

ii) Soit $g \in \pi_1(S^1, 1) \simeq (\mathbb{Z}, +)$ Montrez que $f_{P\sharp}(g) = kg$.

**Commentaires sur l'exercice**

L'effet de $f_P$ sur le $\pi_1$ indique donc le nombre de racines de $P$ dans $D \setminus C$. Comme les éléments du $\pi_1(S^1, 1)$ ont une interprétation en termes de « nombre de tours », ce résultat est souvent appelé *principe de l'argument*. Il peut se reformuler sous la forme visuelle suivante.

**Thm :** Soit $P$ un polynôme. Soit $C$ un cercle de centre $a$ et de rayon $r$ qui ne contient pas de zéros de $C$. Soit $\mu : I \to C$, $\mu(t) = a + re^{2i\pi t}$. On suppose la courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = P(\gamma(t))$ fait $k$ tours dans le sens trigonométrique autour de 0. Alors $P$ possède $k$ racines dans le disque $D(a, r)$.

La démonstration du principe de l'argument donnée ici est purement topologique. Le principe de l'argument possède aussi une démonstration analytique (à l'aide d'intégrales) en analyse complexe - la raison est que si $\gamma$ est un lacet $\mathcal{C}^1$, le degré de $\gamma$ peut se définir par une formule analytique, voir l'exercice 6 ci-dessous.

Le principe de l'argument possède des applications concrètes en ingénierie, par exemple il permet d'étudier la stabilité de certains systèmes automatiques, via le critère de Nyquist.

**Exercice 9. Le théorème de Rouché.** ✪ Soit $D = D(a, r)$ un disque de $\mathbb{C}$ de bord $C$, et soient $f, g : D \to \mathbb{C}$ des applications telles que $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ pour tout $z \in C$.

**a.** Montrez que les applications de $C \to S^1$, qui envoient $z$ sur $f(z)/|f(z)|$ et sur $g(z)/|g(z)|$ respectivement, sont bien définies et sont homotopes.

**b.** En déduire que si $f$ et $g$ sont deux polynômes, alors ils ont le même nombre de zéros dans $D$ (on pourra utiliser l'exercice précédent).

**c.** Un exemple : soit $P(z) = z^{19} + 9z^7 - 3z^2 + 2z + 1$. Montrez que toutes les racines de $P$ sont de module inférieur ou égal à 2. Montrez que $P$ a exactement 7 racines (comptées avec multiplicités) de module inférieur ou égal à 1.

**d.** Une application : continuité des racines d'un polynôme de degré $n$. Soit $n$ un entier fixé et $||\ ||$ une norme sur $\mathbb{C}_n[z]$. Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ et $z_0$ une racine de $P$, de multiplicité $k_0$. Montrez que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $||Q - P|| < \eta$, alors $Q$ possède exactement $k$ racines, comptées avec multiplicités, dans la boule ouverte $B(z_0, \epsilon)$.

**Commentaires sur l'exercice**

Le théorème de Rouché et son application à la continuité des racines des polynômes est utile dans beaucoup de situations théoriques. Via le polynôme caractéristique, la continuité des racines permet de montrer la continuité des valeurs propres d'une matrice : deux matrices complexes proches (pour une norme quelconque sur les matrices) ont des valeurs propres proches.

**Exercice 10. Une expression analytique du degré.** ✪ On note $p : \mathbb{R} \to S^1$ l'application $p(t) = e^{2i\pi t}$.

**a.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Montrez que $f$ est une application $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $p \circ f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est $\mathcal{C}^1$.

**b.** On suppose que $f$ est $\mathcal{C}^1$ et on pose $\gamma = p \circ f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Montrez que

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{t=a}^{b} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \ .$$

**c.** Déduisez que si $\gamma : I \to S^1$ est un lacet $\mathcal{C}^1$, son degré (défini purement topologiquement dans le cours) se calcule à l'aide de l'intégrale :

$$\deg(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{t=a}^{b} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \ .$$

## Autour du théorème de Brouwer

**Exercice 11. Le théorème de Brouwer et le lemme de non rétraction.** ☕ Soit $n \geq 1$. Le théorème de Brouwer affirme que « toute application continue $D^n \to D^n$ admet un point fixe ». Le lemme de non rétraction affirme qu' « il n'existe pas d'application continue $r : D^n \to S^{n-1}$ telle que $r(x) = x$ pour tout $x \in S^{n-1}$ » Montrez que le théorème de Brouwer et le lemme de non rétraction sont deux énoncés équivalents.

**Exercice 12. Deux chemins doivent se croiser !** Soient $\gamma, \mu : [-1,1] \to [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ deux chemins continus tels que d'une part $\gamma(-1)$ a pour abscisse $a$ et $\gamma(1)$ a pour abscisse $b$, et d'autre part $\mu(-1)$ a pour ordonnée $c$ et $\mu(1)$ a pour ordonnée $d$. Le but de l'exercice est de montrer que $\gamma$ et $\mu$ se croisent.

**a.** Faites un dessin.

**b.** On suppose que $\mathrm{Im}\gamma \cap \mathrm{Im}\mu = \emptyset$. On note $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ et $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t))$. Soit $F : [-1,1]^2 \to [-1,1]^2$ définie par

$$F(s,t) = \left( \frac{\mu_1(t) - \gamma_1(s)}{||\gamma(s) - \mu(t)||_\infty}, \frac{\gamma_2(s) - \mu_2(t)}{||\gamma(s) - \mu(t)||_\infty} \right) \ .$$

Montrez que $F$ est continue et que son image est contenue dans le bord du carré.

**c.** Montrez que $F$ admet un point fixe.

**d.** Déduisez que $\mathrm{Im}\gamma \cap \mathrm{Im}\mu \neq \emptyset$. [*Indication :* on remarquera que le point fixe $(s_0, t_0)$ est nécessairement sur le bord du carré, donc que $s_0 = \pm 1$ ou $t_0 = \pm 1$, et dans chaque cas on montrera que c'est impossible.]

## Groupe fondamental et revêtements

**Exercice 13. Effet d'un revêtement sur le $\pi_1$.** Soit $p : E \to B$ un revêtement et soit $e \in E$. Montrez que le morphisme de groupes $p_\sharp : \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b)$ est injectif.

**Exercice 14. Revêtements de base simplement connexe.** Soit $p : E \to B$ un revêtement. On suppose que $E$ est connexe par arcs, et que $B$ est simplement connexe. Montrez que $p : E \to B$ est un homéomorphisme [*Indication :* utilisez la propriété de relèvement des homotopies pour montrer l'injectivité de $p$]. Déduisez que pour $n \geq 2$, la sphère $S^n$ n'admet pas de revêtement non trivial.

**Exercice 15. Calcul du groupe fondamental d'un quotient.** Soit $G$ un groupe agissant proprement et librement par homéomorphismes sur une variété topologique $V$. Le but de cet exercice est calculer [1] (sous des hypothèses favorables) le groupe fondamental de $V/G$.

On fixe $v \in V$, et on note $\pi(v)$ l'image de $v$ dans $V/G$ par l'application quotient $\pi : V \to V/G$.

**a.** Soit $\gamma$ un lacet de $V/G$ basé en $\pi(v)$. Rappelez pourquoi il existe un unique chemin $\overline{\gamma}$ de $V$ tel que $\overline{\gamma}(0) = v$ et $\gamma = \pi \circ \overline{\gamma}$. On note alors $\Phi(\gamma) \in G$ l'unique élément de $G$ tel que $\Phi(\gamma) \cdot \overline{\gamma}(1) = v$.

**b.** Montrez que l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \pi_1(V/G, \pi(v)) & \to & G \\ [\gamma] & \mapsto & \Phi(\gamma) \end{array}$ est bien définie, et que c'est un morphisme de groupes.

**c.** On suppose $V$ connexe par arcs. Montrez que $\Phi$ est surjectif.

**d.** On suppose $V$ simplement connexe. Montrez que $\Phi$ est un isomorphisme.

**e.** Construisez une variété topologique compacte de dimension 3 et de groupe fondamental $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

**Exercice 16. Applications vers le Tore.** Soit $n \geq 2$ et $f : S^n \to T^2$ une application continue. Montrez que $f$ peut s'étendre en une application continue $D^n \to T^2$ [*Indication :* on commencera par montrer que $f$ est homotope à une application constante, en utilisant le théorème de relèvement des applications].

**Exercice 17. A propos de la connexité par arcs locale.** Soit $X$ un espace topologique *localement connexe par arcs*, c'est-à-dire que tout ouvert de $X$ peut s'écrire comme une réunion d'ouverts connexes par arcs. Montrez que $X$ est connexe si et seulement si $X$ est connexe par arcs.

1. Toute ressemblance avec le calcul du groupe fondamental du cercle n'est pas purement fortuite…