2018/19 - Master 1 - M414

TD3 : Homotopie

Exercice 1. Deux propriétés topologiques des espaces compacts. ☕ Les deux propriétés élémentaires suivantes de topologie générale ont été utilisées dans le cours.

a. Soit X un espace compact séparé. Soit $x \in X$, et $\mathcal{U}$ un ouvert contenant x. Montrez qu'il existe un ouvert $\mathcal{V}$ contenant x tel que $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}$.

b. Soit X un espace compact. Montrez que pour tout espace topologique Y la projection canonique $\mathrm{pr}_Y : Y \times X \to Y$ envoie les fermés sur des fermés.

Exercice 2. Equivalences d'homotopie. ☕

a. Montrez que si $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie et si $g : Y \to Z$ est une équivalence d'homotopie alors $g \circ f$ est une équivalence d'homotopie.

b. On fixe une équivalence d'homotopie $f : X \to Y$, et $g : Y \to X$ une équivalence homotopique inverse de f. Soit $h : Y \to X$ une application continue. Montrez que h est une équivalence homotopique de f si et seulement si h est homotope à g.

Exercice 3. Produit et type d'homotopie. Montrez que si X_1 a le même type d'homotopie que X_2, et si Y_1 a le a le même type d'homotopie que Y_2, alors $X_1 \times Y_1$ a le même type d'homotopie que $X_2 \times Y_2$.

Exercice 4. Une caractérisation des espaces contractiles. Soit X un espace topologique. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'espace X est contractile.
2. Toute application continue $f : X \to Y$ est homotope à une application constante.
3. Toute application continue $f : Y \to X$ est homotope à une application constante.
4. Pour tout espace topologique Y, la projection canonique : $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ est une équivalence d'homotopie.

Exercice 5. Transitivité des rétractes par déformation. Soit X un espace topologique et $A \subset B \subset X$. Montrez que si X se rétracte par déformation sur B, et si B se rétracte par déformation sur A alors X se rétracte par déformation sur A.

Exercice 6. Exemples d'espaces ayant même type d'homotopie. ☕ Montrez que les espaces suivants ont même type d'homotopie.

a. La sphère S^{n-1} et $E_J = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \quad ||x||_2 \in J\}$, où J est un intervalle non vide de $\mathbb{R}_+^*$.

b. L'ouvert $\mathbb{C}\setminus\{\pm 1\}$ et le bouquet de deux cercles $S^1 \vee S^1$. (*Indication :* on pourra par exemple commencer par montrer que $\mathbb{C}\setminus\{\pm 1\}$ se rétracte par déformation sur le sous-espace $(\mathbb{R} \cup \overline{B}(-1,1) \cup \overline{B}(1,1)) \setminus \{\pm 1\}$. Faites un dessin !).

c. Le tore privé d'un point $T^2 \setminus \{x\}$ et le bouquet $S^1 \vee S^1$. (*Indication :* on pourra utiliser la description de T^2 comme d'un carré modulo des identifications sur le bord).

Exercice 7. Cônes et homotopies. ☕ Soit $f : X \to Y$ une application continue. On identifie X à la base du cône CX. Montrez que $f : X \to Y$ est homotope à une application constante si et seulement si f se prolonge en une application continue $CX \to Y$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application continue $f : S^{n-1} \to Y$ se prolonge au disque D^n tout entier. Quand peut-on prolonger f à $\mathbb{R}^n$ tout entier ?

Exercice 8. π_0 et type d'homotopie. ☕

a. Montrez que si $f : X \to Y$ est continue, elle induit une application $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$. Que vaut $\pi_0(\mathrm{Id}_X)$? Vérifiez que si on a de plus $g : Y \to Z$ continue, alors $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$.

b. Montrez que si $f, g : X \to Y$ sont homotopes, alors $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.

c. Montrez que si $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie, alors $\pi_0(f)$ est une bijection.

Exercice 9. Rétractions. Si $f : X \to Y$ est une application continue, une *rétraction de f* est une application $r : Y \to X$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_X$. Existe-t-il une rétraction de l'inclusion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$? et de l'inclusion $\{\pm 1\} \to \mathbb{R}$?

Exercice 10. Méthode de Gram-Schmidt. En utilisant la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, construisez une rétraction par déformation de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11. Décomposition polaire. ✪

a. Notons S_n l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$, et S_n^{++} le sous-ensemble des matrices symétriques définies positives. Montrez que l'application $S_n^{++} \to S_n^{++}$, $M \mapsto M^2$ est un homéomorphisme. (*Indication :* utilisez la diagonalisabilité des matrices symétriques. Pour montrer que l'inverse est continue, une méthode est d'utiliser que dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée avec une unique valeur d'adhérence converge ; une autre méthode est d'utiliser le théorème d'inversion locale.)

b. Montrez que la multiplication matricielle induit un homéomorphisme $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++} \to GL_n(\mathbb{R})$. Cet homéomorphisme s'appelle la *décomposition polaire* de $GL_n(\mathbb{R})$.

c. Déduisez-en que $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ ont même type d'homotopie.