2018/19 - Master 1 - M414

TD2 : Topologie quotient et variétés

Topologie quotient

Exercice 1. Séparation de X/A. ☕ Soit X un espace topologique séparé, et A un compact de X.

a. Montrez qu'on peut trouver deux ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ disjoints tels que $A \subset \mathcal{U}$ et $x \in \mathcal{V}$.

b. Montrez que X/A est séparé.

Exercice 2. Cône d'un espace. ☕ On définit le cone CX d'un espace X par $CX = X \times [0,1]/X \times \{1\}$. Faites un dessin de CX. Montrez que CS^{n-1} est homéomorphe à D^n.

Exercice 3. Fonctions périodiques. ✪

a. Soit G un groupe agissant sur un espace topologique X. Une application $f : X \to \mathbb{C}$ est dite G-périodique si pour tout $g \in G$ on a $f(gx) = f(x)$. Donnez une bijection explicite entre l'ensemble des fonctions $X \to \mathbb{C}$ continues G-périodiques et l'ensemble des fonctions continues $X/G \to \mathbb{C}$.

b. Soit T un réel non nul. Donnez une bijection explicite entre l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues T-périodiques et l'ensemble des fonctions continues $S^1 \to \mathbb{C}$.

Exercice 4. Une application des quotients de groupes topologiques. ✪ Soit G un groupe topologique, et H un sous-groupe de G, qu'on fait agir sur G par translations.

a. Propriété de connexité : montrez que si H connexe et G/H connexe alors G est connexe. (*Indication :* utilisez la caractérisation de la connexité en termes de fonctions constantes).

b. Montrez que $U_n(\mathbb{C})/U_{n-1}(\mathbb{C})$ est homéomorphe à S^{2n-1} pour $n \geq 2$. En déduire une nouvelle démonstration de la connexité de $U_n(\mathbb{C})$ (Une première démonstration, donnant la connexité par arcs, était proposée dans la feuille de TD1).

Exercice 5. Propriétés du quotient de groupes topologiques. Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G.

a. Montrez que l'espace des orbites G/H est séparé si et seulement si H est fermé dans G.

b. On suppose H distingué dans G. Montrez que le groupe G/H, muni de la topologie quotient, est un groupe topologique.

Exercice 6. Une autre description de T^2. ☕ Montrez que $T^2 = S^1 \times S^1$ est un quotient du carré $[0,1]^2$ par une relation d'équivalence qui identifie certains points du bord.

Exercice 7. Une autre description de $\mathbb{R}P^n$. ☕ Montrez que $\mathbb{R}P^n$ est homéomorphe à un quotient de D^n par une relation d'équivalence qui identifie certains points du bord. (*Indication :* utilisez que $\mathbb{R}P^n = S^n/\{\pm 1\}$ et regardez un domaine fondamental de l'action de $\{\pm 1\}$)

Exercice 8. Propriétés de $\mathbb{C}P^n$. ☕ Soit $n \geq 0$. On rappelle que $\mathbb{C}P^n$ est l'ensemble des droites vectorielles complexes de $\mathbb{C}^{n+1}$, muni de la topologie quotient associée à la surjection $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^n$ telle que $\pi(x) = \mathrm{vect}(x)$.

a. Montrez que $\mathbb{C}P^n$ est séparé.

b. On identifie S^{2n+1} et la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$. On fait agir $\mathbb{U}$ (les complexes de module 1) sur S^{2n+1} par $\mathbb{U} \times S^{2n+1} \to S^{2n+1}$, $(\lambda, z) \mapsto \lambda z$. Montrez que $S^{2n+1}/\mathbb{U}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}P^n$.

c. Montrez que $\mathbb{C}P^n$ est compact et connexe.

d. Montrez que $\mathbb{C}P^1 \setminus \{x\}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}$. Avec la compactification d'Alexandroff, déduisez-en que $\mathbb{C}P^1$ est homéomorphe à S^2.

Variétés, actions de groupes et revêtements

Exercice 9. Espaces projectifs complexes. Montrez que $\mathbb{C}P^n$ est une variété topologique de dimension $2n$.

Exercice 10. Contre-exemples d'actions propres.

a. On considère le groupe $G = \mathbb{Z}$ agissant sur $X = \mathbb{R}$ par $n \cdot x = 2^n x$. Montrez que cette action n'est pas une action propre.

b. On considère un groupe G agissant sur un espace compact X. Montrez que l'action est propre si et seulement si G est fini.

Exercice 11. La bouteille de Klein. On considère l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{U}\times\mathbb{R}$ définie par $n\cdot(\exp(i\theta), t) = (\exp(i(-1)^n\theta), t + n)$.

a. Montrez que l'espace des orbites $(\mathbb{U} \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$ est une variété topologique de dimension 2.

b. Montrez que $(\mathbb{U} \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$ est homéomorphe à la bouteille de Klein (définie dans le cours comme le quotient de $\mathbb{U} \times [0, 1]$ par la relation d'équivalence $\sim$ qui identifie $(\exp(i\theta), 0)$ avec $(\exp(-i\theta), 1)$).

Exercice 12. Le ruban de Moebius sans bord. Le *ruban de Moebius sans bord* M est l'espace topologique quotient de $]-1, 1[\times[0, 1]$ par la relation d'équivalence qui identifie chaque point $(x, 0)$ avec le point $(-x, 1)$. Montrez M est homéomorphe à un ouvert de la Bouteille de Klein K, et déduisez-en que c'est une variété topologique de dimension 2. Montrez que M est aussi homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}P^2$.

Exercice 13. Quelques revêtement classiques en analyse complexe. Montrez que l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est un revêtement. Montrez que $f(z) = z^n$ définit un revêtement de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Exercice 14. Restriction d'un revêtement. Vérifiez que si $p : E \to B$ est un revêtement, alors pour toute partie C de B la restriction $p : p^{-1}(C) \to C$ est un revêtement.

Exercice 15. Fibres d'un revêtement. Soit $p : E \to B$ un revêtement. On rappelle que les fibres de p sont les ensembles $p^{-1}(\{b\})$.

a. Montrez que les fibres de p sont des espaces topologiques discrets.

b. Montrez que : (E est compact) $\Leftrightarrow$ (B est compact et les fibres de p sont des ensembles finis).

c. On suppose B connexe, et qu'il existe une fibre $p^{-1}(\{b_0\})$ de cardinal fini. Montrez que toutes les fibres sont finies de même cardinal.

Exercice 16. Une définition équivalente des revêtements. Montrez que $p : E \to B$ est un revêtement si et seulement si pour tout $b \in B$ il existe un ouvert $\mathcal{U}$ contenant b, un espace discret F non vide et un homéomorphisme $h : p^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times F$ tel que $p : p^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ est égal à la composée $\mathrm{pr}_{\mathcal{U}} \circ h$, ou $\mathrm{pr}_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \times F \to \mathcal{U}$ est la projection canonique du produit sur son premier facteur.

Exercice 17. Homéomorphismes locaux versus revêtements. Un *homéomorphisme local* est une application continue $f : X \to Y$ telle que pour tout $x \in X$, il existe un ouvert $\mathcal{U}$ contenant X, tel que $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ est un homéomorphisme.

a. Montrez que les revêtements sont des homéomorphismes locaux.

b. Montrez que si $p : E \to B$ est un homéomorphisme local, et s'il existe un entier $n > 0$ tel que pour tout $b \in B$ $p^{-1}(b)$ est de cardinal n, alors p est un revêtement.

c. Montrez que la question précédente ne fonctionne plus si on remplace « de cardinal n » par « de cardinal infini » (*Indication* : considérez $\exp : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

Exercice 18. Bouteille de Klein comme quotient de $\mathbb{R}^2$. ☕ On rappelle qu'une *isométrie affine de* $\mathbb{R}^2$ est une application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui préserve la distance euclidienne.

a. Vérifiez que les isométries affines forment un groupe et que la translation $t(x, y) = (x + 1, y)$ et la symétrie-glissée $s(x, y) = (-x, y + 1)$ sont des isométries. On note G le sous-groupe des isométries engendré par t et s.

b. Montrez que le quotient $\mathbb{R}^2/G$ est une variété de dimension 2.

c. Montrez que $\mathbb{R}^2/G$ est homéomorphe à la bouteille de Klein K.

Exercice 19. Connexité et connexité par arcs des variétés. Montrez qu'une variété topologique est connexe par arcs si et seulement si elle est connexe.

Exercice 20. Connexité des variétés épointées. Soit X une variété topologique connexe par arcs, de dimension $n > 1$. Soit $x_0 \in X$. Montrez que $X \setminus \{x_0\}$ est une variété topologique connexe par arcs.

Exercice 21. Groupes de Lie. ✪ Montrez que $GL_n(\mathbb{K})$, $SL_n(\mathbb{K})$, $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$, $SU_n(\mathbb{C})$ sont des sous-variétés différentielles de $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dont on calculera la dimension.

Exercice 22. Le tore de révolution. On suppose a et b deux nombres réels avec $a > b$. Soit C le cercle de centre $(0, a, 0)$ et de rayon b dans le "plan yOz", c'est-à-dire dans le plan $\{0\} \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. On considère l'ensemble de révolution $X \subset \mathbb{R}^3$ obtenu en faisant tourner C autour de "l'axe Oz", c'est-à-dire de la droite $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$.

a. Faites un dessin. Montrez que l'on a un homéomorphisme $S^1 \times S^1 \to X$ et en déduire que X est une surface topologique, qu'on appelle *tore de révolution.*

b. Donnez une équation de X et en déduire que X est une sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^3$.

Exercices supplémentaires ....

Exercice 23. Une autre description du bouquet. Soient X et Y deux espaces topologiques et $x \in X$, $y \in Y$. Montrez que le bouquet $X \vee Y$ (obtenu en identifiant x et y) est homéomorphe au sous-espace $X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y$ de $X \times Y$.

Exercice 24. La bouteille de Klein est une variété : méthode directe. On a défini la *bouteille de Klein* K comme le quotient de $\mathbb{U} \times [0, 1]$ par la relation d'équivalence $\sim$ qui identifie $(\exp(i\theta), 0)$ avec $(\exp(-i\theta), 1)$.

a. Montrez que pour tout $\epsilon < \frac{1}{2}$, le quotient de $\mathbb{U} \times ([0, \epsilon[\cup]1 - \epsilon, 1])$ par la relation $\sim$ est homéomorphe à $\mathbb{U}\times] - \epsilon, \epsilon[$.

b. Montrez que K est un variété topologique de dimension 2, compacte connexe.

Exercice 25. Quotients d'espaces réguliers. ✪ Un espace topologique X séparé est *régulier* si pour tout fermé $F \subset X$ et tout $x \in X \setminus F$ il existe des ouverts $\mathcal{U}_F$ et $\mathcal{U}_x$ disjoints tels que $F \subset \mathcal{U}_F$ et $x \subset \mathcal{U}_x$.

a. Montrez que les espaces métriques sont réguliers.

b. Soit A une partie de X régulier. Montrez que A est fermé si et seulement si X/A est séparé.

Exercice 26. Compactifié d'Alexandroff et quotient. Soit X un espace compact séparé, et C un fermé non vide de X. Montrez que $(X \setminus C)^*$ (le compactifié d'Alexandroff de $X \setminus C$) est homéomorphe à l'espace quotient X/C.

Exercice 27. Un espace non séparé, localement homéomorphe à $\mathbb{R}$. On note Δ l'ensemble $\mathbb{R} \sqcup \{0'\}$. Vérifiez que les réunions de parties de la forme $\mathcal{U}$ ou $\mathcal{U} \setminus \{0\} \sqcup \{0'\}$, où les ensembles $\mathcal{U}$ sont ouverts dans $\mathbb{R}$, forment une topologie sur $\mathbb{R}$. Vérifiez que Δ est non séparé, mais qu'il peut s'écrire comme réunion de deux ouverts homéomorphes à $\mathbb{R}$.

Exercice 28. Espace total d'un revêtement de base séparée. Soit $p : E \to B$ un revêtement. Montrez que si B est séparé, alors E est séparé.

Exercice 29. Un revêtement de base non séparée. ✪ Soit G un groupe agissant par homéomorphismes sur un espace séparé X. On dit que l'action est *vagabonde* (*wandering* dans la littérature anglaise) si pour tout $x \in X$ il existe un ouvert $\mathcal{U}$ contenant x tel que l'ensemble $\{g \in G \mid g(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$ est fini.

a. Montrez qu'un action libre et par homéomorphismes de G sur un espace séparé X est vagabonde si et seulement si l'application quotient est un revêtement.

b. On considère l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par $n \cdot (x, y) = (2^n x, y/2^n)$.

i) Montrez que cette action est vagabonde.

ii) Montrez que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ n'est pas séparé (ceci implique que l'action n'est pas propre).

Exercice 30. Homéomorphismes transportant les points.

a. Soient a et b deux points de $[-1, 1]^n$. Montrez qu'il existe un homéomorphisme $f : [-1, 1]^n \to [-1, 1]^n$ tel que $f(x) = x$ si $||x||_\infty = 1$ et tel que $f(a) = b$.

b. En déduire que si X est une variété topologique de dimension n, connexe par arcs, alors le groupe $\mathrm{Homeo}(X)$ des homéomorphismes de X agit transitivement sur X.