Université de Lille — Faculté des Sciences et Technologies

2018/19 - Master 1 - M414

TD1 : Topologie générale

Notions de base sur les espaces topologiques

Exercice 1. Topologie discrète. Soit X un ensemble. Vérifiez que l'ensemble des parties de X forme une topologie sur X, appelée *topologie discrète*. Si X est muni de la topologie discrète et Y est un espace topologique quelconque, quelles applications $f : X \to Y$ sont continues ?

Exercice 2. Topologie grossière. Soit X un ensemble. Vérifiez que $\{X, \emptyset\}$ est une topologie sur X, appelée *topologie grossière*. Si X est muni de la topologie grossière et Y est un espace topologique quelconque, quelles applications $f : Y \to X$ sont continues ?

Exercice 3. Topologies associées à des normes équivalentes. Soit E un espace vectoriel réel, et soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E.

a. Montrez que les normes N_1 et N_2 définissent la même topologie sur X.

b. Montrez que la boule unité pour la norme N_1 est homéomorphe à la boule unité pour la norme N_2.

Exercice 4. Topologie bizarre sur $[0,2]$. Vérifiez que l'ensemble $[0,2]$ et les intervalles $[0,x[$, pour $x \in [0,2]$, forment une topologie sur $[0,2]$. Déterminez tous les homéomorphismes $h : [0,2] \to [0,2]$.

Exercice 5. Topologie cofinie. Soit X un ensemble. Vérifiez que l'ensemble vide et les complémentaires de parties finies de X forment une topologie sur X, appelée *topologie cofinie*. Si X et Y sont munis de la topologie cofinie, quelles applications $f : X \to Y$ sont continues ? Déterminez tous les homéomorphismes $h : X \to Y$.

Exercice 6. Topologie induite.

a. Soit A une partie d'un espace topologique X. Vérifiez que les parties de A de la forme $A \cap \mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est un ouvert de X, forment une topologie sur A, appelée *topologie induite*.

b. On suppose que $X = F_1 \cup F_2$, avec F_1 et F_2 des fermés de X.

i) Montrez qu'une partie F de X est fermée si et seulement si $F \cap F_1$ est un fermé de F_1 et $F \cap F_2$ est un fermé de F_2.

ii) Montrez qu'une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si ses restrictions $f : F_1 \to Y$ et $f : F_2 \to Y$ sont continues.

iii) L'énoncé des questions i) et ii) reste-t-il vrai si F_1 et F_2 ne sont pas des fermés ?

Exercice 7. Topologie produit.

a. Soient X et Y deux espaces topologiques. Un pavé ouvert de $X \times Y$ est un sous-ensemble de la forme $\mathcal{U} \times VV$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de X et $\mathcal{V}$ est un ouvert de Y. Vérifiez que les réunions de pavés ouverts forment une topologie sur $X \times Y$ appelée topologie produit. Vérifiez que les projections canoniques de $X \times Y$ sur X et Y sont continues, et qu'une application $f : Z \to X \times Y$ est continue si et seulement si ses coordonnées sont continues.

b. Soient $f_1 : X_1 \to Y_1$ et $f_2 : X_2 \to Y_2$ deux applications continues. Montrez que l'application $f : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ définie par $f(x,y) = (f_1(x), f_2(y))$ est continue.

c. Soit $f : X \times Y \to Z$ une application. Pour tout $a \in X$ et tout $b \in Y$, les applications partielles $f_a : Y \to Z$ et $f_b : X \to Z$ définies par $f_a(y) = f(a,y)$ et $f_b(x) = f(x,b)$ sont continues. Montrez que si f est continue, ses applications partielles sont continues, mais que la réciproque est fausse (*Indication :* considérez la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ sinon.)

d. Soient X et Y deux espaces topologiques, A une partie de X et B une partie de Y. On considère A et B munie de la topologie induite. Montrez que la topologie produit sur $A \times B$ coincide avec la topologie induite sur $A \times B$ par la topologie produit de $X \times Y$.

Exercice 8. Homéos de $\mathbb{R}$. Montrez que les homéomorphismes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les bijections monotones.

Exercice 9. Bijections continues. ☕ Soit $f : X \to Y$ une bijection continue. Vérifiez que les conditions suivantes sont équivalentes : (i) f est un homéomorphisme, (ii) pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de X, $f(\mathcal{U})$ est ouvert, et (iii) pour tout fermé F de X, $f(F)$ est fermé.

Exercice 10. Projection stéréographique. ☕ Soit $N = (0, \ldots, 0, 1)$ le pôle nord de la sphère $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{1 \leq i \leq n+1} x_i^2 = 1\}$. La projection stéréographique de pôle N est l'application $p : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ qui associe à tout $x \in S^n \setminus \{N\}$ l'unique point $p(x)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que tel que les points N, x, et $(p(x), 0)$ soient alignés dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

a. Calculez $p(x)$ pour tout $x \in S^n \setminus \{N\}$. On fera un dessin illustrant la situation dans le cas $n = 2$.

b. Montrez que p est un homéomorphisme.

Séparation, compacité, et connexité

Exercice 11. Séparation et diagonale. ☕ Un espace topologique X est dit *séparé* si pour tout couple (x, y) de points distincts de X on peut trouver des ouverts $\mathcal{U}_x$ et $\mathcal{U}_y$ disjoints tels que $x \in \mathcal{U}_x$ et $y \in \mathcal{U}_y$. Montrez que X est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ est un fermé de $X \times X$.

Exercice 12. Séparation et points fermés. Montrez que si X est un espace topologique séparé, alors pour tout $x \in X$, $\{x\}$ est un fermé de X. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 13. Compacts de $\mathbb{R}^n$. ☕

a. Montrez que les segments de $\mathbb{R}$ sont des compacts de $\mathbb{R}$. (*Indication* : étant donné un recouvrement ouvert de $[a, b]$, on pose $E = \{x \in [a, b] \mid [a, x]$ a un recouvrement fini$\}$. On montre $b \in E$ par l'absurde.)

b. Une partie de $\mathbb{R}^n$ est *bornée* si elle est incluse dans un pavé $\prod_{1 \leq i \leq n} [a_i, b_i]$. Déduisez de **a.** et des résultats généraux du cours que les ensembles fermés bornés de $\mathbb{R}^n$ sont compacts.

c. Réciproquement, montrez que les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont fermés et bornés.

Exercice 14. Compactification d'Alexandroff. ☕

a. Soit X un espace topologique, et $X^* := X \sqcup \{\infty\}$. Vérifiez que la famille constituée des ouverts de X, et des ensembles de la forme $X \setminus K \sqcup \{\infty\}$ pour K compact fermé de X, forme une topologie sur X^*.

b. Vérifiez que la topologie de la question précédente fait de X^* un espace compact, et que l'inclusion $X \hookrightarrow X^* \setminus \{\infty\}$ est un homéomorphisme. On appelle X^* le *compactifié d'Alexandroff de X*.

c. Montrez que si K est compact séparé et $x \in K$, alors $(K \setminus \{x\})^*$ est homéomorphe à K. En déduire que $(\mathbb{R}^n)^*$ est homéomorphe à S^n. (D'autres exemples seront donnés dans les prochaines feuilles de TD).

d. Un espace X est dit *localement compact* si tout point de X est contenu dans l'intérieur d'un compact de X. Montrez que X^* est séparé si et seulement si X est séparé et localement compact. Déduisez-en que la compactification d'Alexandroff d'un espace métrique produit naturellement des espaces topologiques qui ne proviennent pas d'espaces métriques.

Exercice 15. Domaines de $\mathbb{R}^n$. ✪ Montrez qu'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si et seulement s'il est connexe. (Les ouverts connexes de $\mathbb{R}^n$ sont souvent appelés des *domaines*).

Exercice 16. Parties connexes de $\mathbb{R}$. ☕

a. Connexité des segments $[a,b]$.

i) Soit F_1 et F_2 deux fermés disjoints de $\mathbb{R}$ tels que $F_1 \cup F_2 = [a,b]$. Montrez que la fonction $f : F_1 \times F_2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = |x-y|$ admet un minimum δ strictement positif.

ii) Soit n tel que $|b-a|/n < \delta$. Posons $a_i = a + i(b-a)/n$. Montrez que si $a \in F_1$ alors pour $0 \leq i \leq n$ on a $[a, a_i] \subset F_1$. En déduire que $[a,b]$ est connexe.

b. Soit $X \subset \mathbb{R}$. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes : (i) X est connexe, (ii) X est connexe par arcs, (iii) X est un intervalle.

Exercice 17. Composantes connexes d'un espace. ✪ Soit X un espace topologique.

a. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de X. Montrez que si $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.

b. Soient x, y deux points de X. On note $x \simeq y$ s'il existe une partie connexe de X contenant x et y. Vérifiez que $\simeq$ est une relation d'équivalence. Ses classes d'équivalence s'appellent les *composantes connexes de X*.

c. Montrez que les composantes connexes sont des fermés connexes de X.

d. Soit $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, muni de la topologie usuelle. Quelles sont les composantes connexes de $\mathbb{Q}$?

Exercice 18. Topologie des groupes de matrices classiques. ☕ Un *groupe topologique* est un groupe G, muni d'une topologie telle que la multiplication $G \times G \to G$ et l'inversion $G \to G$ sont continues. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a. Vérifiez qu'une partie de $M_n(\mathbb{K})$, stable par multiplication et inversion, est un groupe topologique.

b. Montrez que l'espace $GL_n(\mathbb{K})$ est homéomorphe à $SL_n(\mathbb{K}) \times (\mathbb{K} \setminus \{0\})$.

c. Montrez que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs (*Indications.* Première méthode : étudiez le polynôme $\det(zI_n + (1-z)A)$. Deuxième méthode : utilisez que les éléments de $GL_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables. Troisième méthode : utilisez que $GL_n(\mathbb{C})$ est engendré par les dilatations et les transvections), et en déduire le nombre de composantes connexes par arcs de $SL_n(\mathbb{C})$.

d. Calculez le nombre de composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$ et de $SL_n(\mathbb{R})$ (On pourra s'inspirer de la troisième méthode de la question précédente).

e. L'espace $SL_n(\mathbb{K})$ est-il compact (*Indication :* regardez le fermé composé des matrices diagonales dont tous les coefficients sauf deux sont égaux à 1) ? et $GL_n(\mathbb{K})$?

f. Etudiez la compacité et la connexité par arcs de $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$.

Exercice 19. Espaces non homéomorphes. Montrez que les espaces topologiques $[0,1]$, $[0,1]^2$ et $\mathbb{U}$ (les nombres complexes de module 1) ne sont pas homéomorphes.

Exercice 20. Fonctorialité de π_0. ☕ Montrez que si $f : X \to Y$ est continue, elle induit une application $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$. Que vaut $\pi_0(\mathrm{Id}_X)$? Vérifiez que si on a de plus $g : Y \to Z$ continue, alors $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 21. Topologie engendrée. ✪ Soit X un ensemble et $\mathcal{B}$ une famille de parties de X.

a. Montrer qu'il existe une plus petite (au sens de l'inclusion) topologie sur X contenant $\mathcal{B}$, qu'on appelle *topologie engendrée par $\mathcal{B}$*.

b. Montrez qu'une partie est ouverte pour la topologie engendrée par $\mathcal{B}$ si et seulement si c'est une réunion d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}$.

c. Soit W un espace topologique et $f : W \to X$ une application. Montrez que f est continue (pour la topologie engendrée par $\mathcal{B}$ sur X) si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B)$ est un ouvert de W.

Exercice 22. Produit quelconque d'espaces topologiques. ✪ Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques (on ne suppose pas I fini). Un *pavé ouvert* est un sous-ensemble de $\prod_{i\in I} X_i$ de la forme $\prod_{i\in I} \mathcal{U}_i$, où chaque $\mathcal{U}_i$ est un ouvert de X_i et où tous les $\mathcal{U}_i$ sauf un nombre fini sont égaux à X_i. La *topologie produit de* $\prod_{i\in I} X_i$ est la topologie engendrée par les pavés ouverts.

a. Vérifiez que les ouverts de la topologie produit peuvent s'écrire comme réunion de pavés ouverts.

b. Montrez que $f : W \to \prod_{i\in I} X_i$ est continue si et seulement si ses applications coordonnées sont continues.

Exercice 23. Limites de suites et topologie de la convergence simple. ✪ Soit X un espace topologique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de x converge vers une limite $\ell \in X$ lorsque pour tout ouvert $\mathcal{U}$ contenant x, il existe $n_{\mathcal{U}} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_{\mathcal{U}}$ on a $x_n \in \mathcal{U}$.

a. Quelles sont les suites convergentes pour la topologie grossière ? pour la topologie discrète ?

b. Donnez une C.N.S. sur la topologie de X pour que toutes les suites de X aient *au plus une* limite.

c. Montrez que l'image d'une suite convergente par une fonction continue est convergente.

d. Montrez qu'une suite d'éléments d'un produit $\prod_{i\in I} X_i$ converge si et seulement si toutes ses coordonnées sont des suites convergentes.

NB : L'ensemble X^I des applications de I dans X s'identifie au produit $\prod_{i\in X} X_i$, où chaque X_i est une copie de X. Munissons X^I de la topologie produit. La question **d.** montre qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X^I converge vers f au sens de la topologie produit si et seulement si la suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

Exercice 24. Topologie de Zariski. ✪ Soit $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau des polynômes à n variables. A tout idéal I de $\mathcal{P}$, on associe l'ensemble

$$Z(I) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid P(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ pour tout } P \in I\}.$$

a. Montrez que les ensembles $Z(I)$ définissent les fermés d'une topologie sur $\mathbb{C}^n$, appelée *topologie de Zariski.*

b. Vérifiez que pour $n = 1$, la topologie de Zariski coïncide avec la topologie cofinie (voir l'exercice 5).

c. Observez que la topologie de Zariski n'est pas séparée : deux ouverts non-vides se rencontrent obligatoirement.

Exercice 25. Graphe d'une application continue. Soit $f : X \to Y$ une application. Son *graphe* est l'ensemble $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\} \subset X \times Y$. On suppose Y séparé. Montrez que si f est continue alors $\mathcal{G}_f$ est fermé. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 26. Compacts emboîtés. Soit X un espace séparé, et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts non vides de X, décroissante pour l'inclusion. Montrez que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide et que pour tout ouvert $\mathcal{U}$ contenant K, il existe un entier n tel que $K_n \subset \mathcal{U}$.

Exercice 27. Corps convexes. ✪ Soit C un sous-ensemble compact convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in \mathring{X}$. (Un tel sous-ensemble est souvent appelé un *corps convexe* compact)

a. Montrez que toute demi-droite d'origine 0 rencontre $\mathcal{F}r(C)$ en exactement un point.

b. Montrez que l'application $f : \mathcal{F}r(C) \to S^{n-1}$ telle que $f(x) = x/||x||_2$ est un homéomorphisme.

c. Montrez que l'application $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $h(0) = 0$ et $h(x) = ||x||_2 f^{-1}(x/||x||_2)$ est un homéomorphisme, qui envoie D^n sur C, S^{n-1} sur $\mathcal{F}r(C)$ et $\mathbb{R}^n \setminus D^n$ sur $\mathbb{R}^n \setminus C$.

Exercice 28. Produit d'espaces connexes. Montrez que le produit d'espaces connexes est connexe.

Exercice 29. Adhérence et connexité Soit X un espace topologique et $A \subset X$. Montrez que si A est connexe alors son adhérence $\overline{A}$ est connexe. Le résultat est-il vrai si on remplace $\overline{A}$ par $\mathring{A}$?

Exercice 30. Le faux sinus Soit $G \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de l'application $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(1/x)$. Montrez que $\overline{G}$ est connexe, mais n'est pas connexe par arcs.