Université de Lille — Faculté des Sciences et Technologies

## 2018/19 - Master 1 - M414

# Homologie singulière : Résumé de la théorie

## Une vision synthétique de l'homologie singulière

Le théorème suivant résume les résultats établis dans le chapitre III du cours concernant l'homologie singulière. Les complexes de $R$-modules n'apparaissent pas dans l'énoncé : ils sont absolument absolument indispensables pour *construire* de l'homologie singulière, mais ne servent pas si on souhaite juste *utiliser* l'homologie singulière pour obtenir des résultats de topologie.

**Théorème.** Soit $R$ un anneau. Il existe une construction mathématique appelée *homologie singulière* qui

1. à un espace topopologique $X$ associe des $R$-modules d'homologie $H_i(X)$, $i \in \mathbb{N}$,
2. à toute $f : X \to Y$ continue associe des applications $H_i(f) : H_i(X) \to H_i(Y)$, $R$-linéaires ($i \in \mathbb{N}$).

Cette construction vérifie les propriétés suivantes.

**P1. Description des morphismes (I) :**

(a) L'application $H_i(\mathrm{Id}_X) : H_i(X) \to H_i(X)$ est l'application identité,

(b) Pour toute paire d'application continues $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ on a $H_i(g \circ f) = H_i(g) \circ H_i(f)$,

(c) En particulier, les deux points précédents montrent que l'homologie singulière est un *invariant topologique* : tout homéomorphisme $f : X \xrightarrow{\approx} Y$ induit des isomorphismes en homologie.

**P2. Description des morphismes (II) :**

(a) Si $f, g : X \to Y$ sont des applications continues homotopes, alors $H_i(f) = H_i(g)$.

(b) En particulier, lex points précédent montre que l'homologie singulière est un *invariant homotopique* : toute équivalence d'homotopie $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ induit des isomorphismes en homologie.

**P3. Signification topologique du $H_0(X)$ :**

On a un isomorphisme de $R$-modules $H_0(X) \simeq R\pi_0(X)$.

**P4. Outils de calcul de l'homologie :**

(a) **Espaces contractiles.**

Si $X$ est contractile, on a des isomorphismes de $R$-modules $H_i(X) \simeq \begin{cases} R & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i > 0. \end{cases}$

(b) **Composantes connexes par arcs.** Si $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, où les $X_\alpha$ sont les composantes connexes par arcs de $X$, alors on a des isomorphismes de $R$-modules :

$$H_i(X) \simeq \bigoplus_{\alpha \in A} H_i(X_\alpha) \; .$$

(c) **Calculs par découpage (Suite de Mayer-Vietoris).** Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux ouverts de $X$ tels que $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, alors on a une suite exacte longue de $R$-modules en homologie :

$$\cdots \to H_{i+1}(X) \xrightarrow{\partial_{i+1}} H_i(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \xrightarrow{(H_i(\iota_1), H_i(\iota_2))} H_i(\mathcal{U}) \oplus H_i(\mathcal{V}) \xrightarrow{H_i(j_1) - H_i(j_2)} H_i(X) \xrightarrow{\partial_i} \dots$$
$$\cdots \to H_1(X) \xrightarrow{\partial_1} H_0(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \xrightarrow{(H_0(\iota_1), H_0(\iota_2))} H_0(\mathcal{U}) \oplus H_0(\mathcal{V}) \xrightarrow{H_0(j_1) - H_0(j_2)} H_0(X) \to 0 \; .$$

De plus, toute $f : X \to Y$ telle que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}'$ et $f(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}'$ induit une échelle (= diagramme commutatif avec lignes exactes) reliant la suite de Mayer-Vietoris de $X$ avec celle de $Y$.

**P5. Possibilité de calcul combinatoire (éventuellement par ordinateur).**

Si $K$ est un complexe simplicial géométrique fini de $\mathbb{R}^n$ et $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subset \mathbb{R}^n$ est le polyèdre associé, alors l'homologie singulière de $|K|$ est isomorphe à l'homologie simpliciale de $K$.

## Homologie singulière réduite

Soit $R$ un anneau. L' *homologie singulière réduite* est une construction qui

1. à un espace topopologique $X$ associe des $R$-modules $\widetilde{H}_i(X)$, $i \in \mathbb{N}$,
2. à toute $f : X \to Y$ continue associe des applications $\widetilde{H}_i(f) : \widetilde{H}_i(X) \to \widetilde{H}_i(Y)$, $R$-linéaires ($i \in \mathbb{N}$).

Cette construction est une légère modification de l'homologie singulière :

$$H_i(X) = \begin{cases} \widetilde{H}_i(X) & \text{si } i > 0, \\ \widetilde{H}_0(X) \oplus R & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

L'invariance homotopique et la suite exacte longue de Mayer-Vietoris restent valable en replaçant $H$ par $\widetilde{H}$. De plus, si $X$ est un espace contractile, alors $\widetilde{H}_i(X) = 0$ pour tout $i \geq 0$.

Cette dernière propriété implique qu'on a un peu plus d'objets nuls dans les suites exactes longues lorsqu'on utilise l'homologie réduite. C'est une des raisons pour lesquelles on utilise souvent l'homologie réduite plutôt que l'homologie dans les calculs.

Une autre raison pour utiliser l'homologie réduite est que certains résultats de calculs sont plus agréables à lire. Un exemple typique est celui de l'homologie des sphères, qu'on obtient d'après la suite de Mayer-Vietoris (pour vous convaincre de l'utilité de l'homologie réduite, réécrivez l'énoncé du théorème suivant avec l'homologie).

**Théorème.** Soit $n \geq 0$. Alors $\widetilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} R & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{si } i \neq n. \end{cases}$

## Quelques résultats topologiques fondamentaux

**Théorème** (Invariance de la dimension)**.** Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$. S'il existe un homéomorphisme $h : \mathcal{U} \xrightarrow{\approx} \mathcal{V}$ alors $n = m$.

**Théorème** (Point fixe de Brouwer)**.** Toute application continue $f : D^n \to D^n$ admet un point fixe.

**Théorème.** Soit $f : S^{2n} \to S^{2n}$ continue. Alors il existe $x \in S^{2n}$ tel que $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$.

**Théorème** (Sphère chevelue)**.** Tout champ de vecteurs continu sur $S^{2n}$ s'annule en au moins un point.

Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$, le *bord de* $\mathcal{U}$ est l'ensemble $\partial\mathcal{U} = \mathcal{U} \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

**Théorème** (Invariance du bord)**.** Soit $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ des ouverts de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$, et soit $h : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un homéomorphisme. Alors $h$ se restreint en des homéomorphismes :

$$h : \partial\mathcal{U} \xrightarrow{\approx} \partial\mathcal{V}\ , \qquad h : \mathcal{U} \setminus \partial\mathcal{U} \xrightarrow{\approx} \mathcal{V} \setminus \partial\mathcal{V}\ .$$

**Théorème** (Jordan)**.** Soit $f : S^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ une application continue injective. Alors l'ouvert $\mathbb{R}^m \setminus f(S^{m-1})$ possède deux composantes connexes par arcs, l'une bornée et l'autre non bornée.

**Théorème** (Application ouverte)**.** Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue injective. Alors $f$ est *ouverte*, c'est-à-dire que l'image d'un ouvert par $f$ est un ouvert.