2018/19 - Master 1 - M414

Informations générales et Prérequis mathématiques

Page web du cours : http ://math.univ-lille1.fr/~touze/enseignement.html.

Patatoïdes

Dans ce module, nous allons beaucoup utiliser les opérations usuelles sur les ensembles. Les formules suivantes sont à connaître absolument (sinon. . .☠).

Soit X un ensemble, A une partie de X et $(B_j)_{j\in J}$ une famille de parties de X (J peut être un ensemble quelconque).

$$A \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} (A\cap B_j) \;, \qquad X \setminus \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} (X\setminus B_j) \;,$$

$$A \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} (A\cup B_j) \;, \qquad X \setminus \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} (X\setminus B_j) \;.$$

Soit $f : X \to Y$ une application, alors (donnez des exemples où les deux dernières inclusions sont strictes)

$$f\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f(B_j) \;, \qquad f\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \subset \bigcap_{j\in J} f(B_j) \;, \qquad f(X)\setminus f(A) \subset f(X\setminus A) \;.$$

Soit $g : W \to X$ une autre application, alors (remarquez que tout va bien avec les images réciproques, ce qui tombe bien car les formules avec les images réciproques sont les plus utiles !)

$$g^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} g^{-1}(B_j) \;, \qquad g^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} g^{-1}(B_j) \;, \qquad W\setminus g^{-1}(A) = g^{-1}(X\setminus A) \;.$$

Pour une partie C de W et une partie D de Y on a aussi $(f\circ g)(C) = f(g(C))$ et $(f\circ g)^{-1}(D) = g^{-1}(f^{-1}(D))$.

Axiomes de $\mathbb{R}$

Nous utiliserons l'axiomatique suivante sur les nombres réels. Ces quatre axiomes caractérisent les réels. (l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels vérifie les trois premiers axiomes mais pas le quatrième).

Axiome 1 : $\mathbb{R}$ est un corps commutatif (de lois notées $+$ et $\cdot$.), les éléments neutres pour l'addition et la multiplication étant notés 0 et 1.

Axiome 2 : $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné, c'est-à-dire qu'il existe une relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tous les réels x, y, z :

$$(x \leq y) \quad\Rightarrow\quad (z+x \leq z+y) \tag{1}$$

$$(x\geq 0,\, y\geq 0) \quad\Rightarrow\quad (xy \geq 0) \tag{2}$$

Axiome 3 : $\mathbb{R}$ est archimédien, c'est-à-dire que si $x > 0$ et $y \geq 0$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $y \leq nx$ (où $nx = x+\cdots+x$, n fois).

Axiome 4 : $\mathbb{R}$ a la propriété de la borne supérieure. C'est-à-dire tout sous-ensemble X non vide et majoré admet une borne supérieure. (Rappelons que si X est un sous-ensemble d'un ensemble ordonné, la borne supérieure de X est le plus petit des majorants de X).

A partir de ces axiomes, on montre toutes les propriétés usuelles de $\mathbb{R}$: l'existence de la partie entière $E(x)$ d'un nombre réel x (cette propriété est équivalente à l'axiome 3), toute suite croissante majorée converge (cette propriété est équivalent à l'axiome 4), $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, etc.

Relations d'équivalences, partitions et surjections

Nous utiliserons beaucoup de relations d'équivalences. Il est très important d'avoir bien compris la chose suivante. Soit X un ensemble. Il revient essentiellement au même de se donner (a) une surjection de X sur un autre ensemble, (b) une partition de X, (c) une relation d'équivalence sur X.

Passage entre (a) et (b). Toute surjection $\pi : X \to Y$ permet de définir une partition $(X_y)_{y\in Y}$ de X par $X_y := \pi^{-1}(\{y\})$. Réciproquement, toute partition $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X permet de définir une surjection $\pi : X \to A$ où $\pi(x)$ est l'unique $\alpha \in A$ tel que $x \in X_\alpha$.

Passage entre (b) et (c). Toute partition $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ permet de définir une relation d'équivalence $\simeq$ sur X, par $x \simeq x'$ si et seulement si x et x' sont dans la même partie X_α. Réciproquement, si $\simeq$ est une relation d'équivalence sur X, ses classes d'équivalences forment une partition de X.

Passage entre (a) et (c). Toute surjection $\pi : X \to Y$ permet de définir une relation d'équivalence $\simeq$ sur X par $x \simeq x'$ si et seulement si $\pi(x) = \pi(x')$. Réciproquement, si $\simeq$ est une relation d'équivalence sur X, on note $X/\simeq$ l'ensemble de ses classes d'équivalences et on définit une surjection $\pi : X \to X/\simeq$ par $\pi(x) = [x]$ (la classe d'équivalence de x).

Le problème de la dimension

Le contenu de cette partie est purement culturel : il ne sera pas utilisé dans le cours, et n'est donné qu'à titre de motivation. Deux ensembles X et Y sont *équipotents* s'il existe une bijection $X \to Y$. Par exemple, un ensemble est fini s'il est équipotent à une partie bornée de $\mathbb{N}$, infini dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$, etc. Voici un théorème non trivial et très pratique pour manier la notion d'équipotence.

Theorème (Cantor-Bernstein)**.** *S'il existe des injections $X \to Y$ et $Y \to X$ alors X et Y sont équipotents.*

Passons au développement décimal des nombres réels. Soit x_0 un nombre entier positif, et $(x_i)_{i\geq 1}$ une suite de nombres entiers compris entre 0 et 9. On écrit « $x_0, x_1x_2x_3x_4\dots$ » pour désigner le nombre

$$x = x_0 + \sum_{i\geq 1} \frac{x_i}{10^i} .$$

Tout nombre entier positif peut s'écrire sous cette forme (c'est une conséquence de l'existence de la partie entière et du fait que toute suite croissante majorée converge). Une telle écriture s'appelle un *développement décimal* de x. Le développement décimal d'un nombre donné n'est pas unique en général. Par exemple « $1,000000\dots$ » est égal à « $0,999999\dots$ », mais c'est le seul phénomène qui empêche l'unicité.

Theorème. *Soit x un réel positif. Alors il existe un unique développement décimal de x tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \geq n$ tel que $x_m \neq 9$.*

Le théorème surprenant suivant fut découvert par Cantor. Cantor écrivit lui-même dans une lettre à Dedekind « Je le vois, mais je n'y crois pas ». Ce théorème montre que la dimension de *l'ensemble* $\mathbb{R}^n$ n'a pas de sens. Nous verrons dans ce cours que la dimension de *l'espace topologique* $\mathbb{R}^n$ est, elle, bien définie.

Theorème (Cantor, 1877)**.** *Pour tous les entiers n et m, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont équipotents.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}$ est équipotent à $]0,1[$, il suffit de montrer que $]0,1[$ est équipotent à $]0,1[^2$. D'après le théorème de Cantor-Bernstein, il suffit de trouver une injection $f :]0,1[^2 \to]0,1[$. On utilise pour cela les développements décimaux : $f(x,y) = 0, x_1y_1x_2y_2\dots$. □

Signalétique des feuilles d'exercices

Les exercices marqués d'une tasse à café ☕ sont des exercices importants qui seront réutilisés plus tard dans le cours ou dans les exercices. Les exercices marqués d'une étoile ✪ sont des exercices qui font découvrir une notion classique, qui peut être utile dans d'autres modules (ou plus tard à l'agrégation).