Homologie et cohomologie des groupes

Exercice 1 : Coefficients triviaux en degré 1.

Soit G un groupe. Montrez que $H_1(G,\mathbb{Z}) \simeq G_{\mathrm{ab}}$ et que $H^1(G,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_{\mathrm{ab}},\mathbb{Z})$.

Exercice 2 : Groupes cycliques.

Soit G un groupe cyclique, et M un $\Bbbk G$-module.

1. Cas G cyclique d'ordre n.
   Notons g le générateur de G. Soit $\nu = b_1 + b_g + \cdots + b_{g^{n-1}} \in \Bbbk G$ et $\alpha = b_1 - b_g \in \Bbbk G$. Montrez que :
   $$H^0(G,M) = M^G\ , \quad H^{2i}(G,M) = M^G/\nu M\ ,\ \text{et } H^{2i-1}(G,M) = \{m \in M; \nu m = 0\}/\alpha M \text{ pour } i > 1.$$
2. Cas G cyclique d'ordre infini.
   Notons g le générateur de G, et $\alpha = b_1 - b_g \in \Bbbk G$. Montrez qu'on a une suite exacte courte de $\Bbbk G$-modules : $0 \to \Bbbk G \xrightarrow{\alpha\cdot} \Bbbk G \to \mathbb{Z}$, puis que
   $$H^0(G,M) = M^G\ , \quad H^1(G,M) = M_G\ ,\ \text{et } H^i(G,M) = 0 \text{ pour } i > 1.$$

Exercice 3 : Coefficients locaux et revêtements

Soit X un espace topologique admettant un revêtement universel $\widetilde{X}$, soit π le groupe des automorphismes du revêtement de X et soit π' un sous-groupe de π.

1. Montrez que pour tout $\Bbbk\pi$-module à droite M, on a un isomorphisme de $\Bbbk$-modules, naturel en M : $M \otimes_{\Bbbk\pi} \Bbbk(\pi/\pi') \simeq M \otimes_{\Bbbk\pi'} \Bbbk$.
2. Montrez que l'application de revêtement $\widetilde{X} \twoheadrightarrow \widetilde{X}/\pi'$ induit un isomorphisme de complexes de $\Bbbk$-modules : $C_*(\widetilde{X},\Bbbk) \otimes_{\Bbbk\pi} \Bbbk(\pi/\pi') \simeq C_*(X/\pi',\Bbbk)$.
3. Montrez que l'on a un isomorphisme : $H_*(X,\Bbbk(\pi/\pi')) \simeq H_*(\widetilde{X}/\pi',\Bbbk)$.

Exercice 4 : Injectifs et projectifs pour les groupes finis.

Soit G un groupe fini et $\Bbbk$ un corps.

1. Montrez que l'on a un isomorphisme de $\Bbbk G$-modules $\Bbbk G \simeq \Bbbk G^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk G,\Bbbk)$.
2. Soit M un $\Bbbk G$-module de dimension finie. Montrez que les énoncés suivants sont équivalents :
   (a) M est projectif (b) M^* est projectif (c) M est injectif (d) M^* est injectif

Exercice 5 : p-groupes

Soit P un p-groupe, et $\Bbbk$ un corps de caractéristique p.

1. Soit M un $\Bbbk P$-module
   (a) Soit $m \in M$, montrez que le sous-groupe abélien de M engendré par les $(g(m), g \in P)$ est un p-groupe abélien fini, et que plusieurs éléments de M sont fixes sous l'action de P.
   (b) Montrez qu'il y a un unique $\Bbbk P$-module simple, le module trivial $\Bbbk$ (Indication : Si M est un $\Bbbk P$-module, montrez que $M^P \neq 0$ à l'aide de (a).).
2. (a) Soit M un $\Bbbk P$-module et $M \hookrightarrow J$ une enveloppe injective[1] de M. Montrez que l'application $M^P \hookrightarrow J^P$ est un isomorphisme.
   (b) Soit M un $\Bbbk P$-module de type fini. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) M est injectif (b) $H^1(P,M) = 0$ (c) Pour tout n, $H^n(P,M) = 0$.

[1] Une enveloppe injective d'un R-module M est une paire (J,i), où J est un objet injectif, et $i : M \hookrightarrow J$ est une application injective, telle que $i(M)$ soit un sous-module essentiel de J, c'est à dire que pour tout sous-module $N \subset J$, si $N \cap i(M) = \{0\}$ alors $N = \{0\}$. On peut démontrer que dans R-mod, tout objet admet une enveloppe injective (cela résulte essentiellement du lemme de Zorn). L'envelope injective d'un objet injectif J est (J, Id).