2018/19 - Master 1 - M414

Devoir Maison 2

L'homologie simpliciale : rappels du cours

• Un *complexe simplicial géométrique* (`CSG`) de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble fini K de simplexes de $\mathbb{R}^n$ tel que :

(1) si s est un élément de K, alors toutes les faces de s sont dans K,

(2) si s et t sont deux éléments de K alors $s \cap t$ est une facette de s et de t.

• Soit K un `CSG`. On choisit un ordre total $\prec$ sur les sommets de K. Alors tout élément de K s'écrit de manière unique sous la forme $< s_0, \ldots, s_k >$ avec $s_0 \prec \cdots \prec s_k$. Dans tout le devoir, $\Bbbk$ désigne un corps. Le complexe $C_*(K)$ est le complexe de $\Bbbk$-espaces vectoriels défini par

1. $C_k(K)$ est le $\Bbbk$-espace vectoriel libre sur l'ensemble des i-simplexes de K,
2. $d : C_k(K) \to C_{k-1}(K)$ est défini par (où le $\widehat{s_i}$ signifie la face contenant tous les points sauf x_i) :

$$d(< s_0, \ldots, s_k >) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i < s_0, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, s_k >$$

L'*homologie simpliciale* de K est l'espace vectoriel défini par : $H_i(K) := H_i(C_*(K))$.
• Enfin, le *polyèdre de* K est le sous-espace topologique $|K| \subset \mathbb{R}^n$ défini par $|K| = \bigcup_{s \in K} s$.

Exercice 1 : Petits calculs directs

Q1. Vérifiez que $C_*(K)$ est bien un complexe, c'est à dire que $d \circ d = 0$.

Q2. Soient a_1, a_2, a_3 trois points affinement indépendants de $\mathbb{R}^2$. Calculez l'homologie simpliciale de :

$$K_1 = \{ < a_1, a_2, a_3 >, < a_1, a_2 >, < a_1, a_3 >, < a_2, a_3 >, < a_1 >, < a_2 >, < a_3 > \},$$
$$K_2 = K_1 \setminus \{ < a_1, a_2, a_3 > \}.$$

Exercice 2 : L'homologie des graphes simpliciaux

On suppose que K est un graphe simplicial, c'est-à-dire un `CSG` n'ayant que des simplexes de dimension 0 et 1. On note n_1 le nombre de 1-simplexes de K et n_0 le nombre de 0-simplexes.

Q1. Montrez que $\dim H_1(K) - \dim H_0(K) = n_1 - n_0$.

Q2. **a.** Montrez que si s_0 est un sommet de K, $< s_0 > \in C_0(K)$ n'est pas un bord.

b. Montrez que si s_1 et s_2 sont deux sommets de K alors ils sont dans la même composante connexe de $|K|$ si et seulement si $< s_1 > - < s_2 >$ est un bord. [Indication : deux sommets sont dans la même composante connexe si et seulement s'ils sont reliés par un chemin d'arêtes]

c. En déduire que $\dim H_0(K)$ est égale au nombre de composantes connexes par arcs de $|K|$.

Exercice 3 : La signification topologique du H_0

Q1. **Connexité par arcs.** On rappelle que $\pi_0(X)$ est l'ensemble quotient de X par la relation d'équivalence qui identifie deux points si et seulement si il sont reliés par un chemin continu dans X.

a. Vérifiez qu'une application continue $f : X \to Y$ passe au quotient en une application $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$, et que si f est une équivalence d'homotopie alors $\pi_0(f)$ est une bijection.

b. Montrez que $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ avec $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ ouverts et $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ connexes par arcs, alors l'inclusion $\iota : \mathcal{U} \hookrightarrow X$ induit une bijection $\pi_0(\iota) : \pi_0(\mathcal{U}) \xrightarrow{\simeq} \pi_0(X)$. [*Indication* : utilisez le lemme de Lebesgue.]

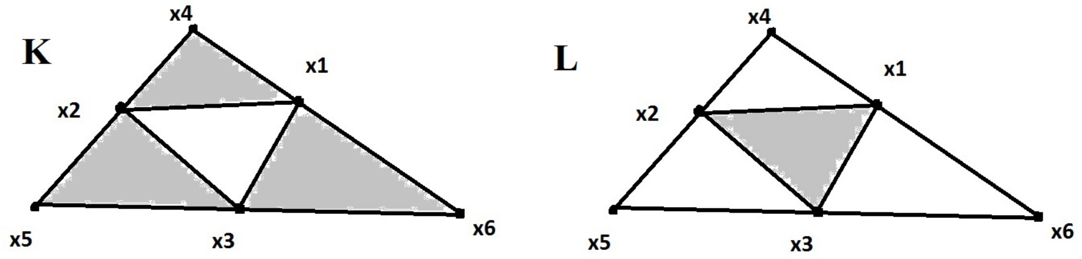

FIGURE 1 – Les `CSG` K et L des exercices 4 et 5.

Q2. Si s un d-simplexe de $\mathbb{R}^n$, on note ∂s la réunion de ses faces (∂s est le bord géométrique du simplexe s). Montrez que pour $x \in s \setminus \partial s$, l'espace topologique $s \setminus \{x\}$ se rétracte par déformation sur ∂s.

Q3. Soit s un simplexe de dimension maximale d'un `CSG` K. On vérifie facilement que $K \setminus \{s\}$ est un `CSG`.

a. Soit $x \in s \setminus \partial s$. Montrez que $|K| \setminus \{x\}$ se rétracte par déformation sur $|K \setminus \{s\}|$.

b. On suppose s est un k-simplexe pour $k \geq 2$. Montrez que l'inclusion $\iota : |K \setminus \{s\}| \hookrightarrow |K|$ induit une bijection $\pi_0(\iota) : \pi_0(|K \setminus \{s\}|) \xrightarrow{\simeq} \pi_0(|K|)$

Q4. Soit K un `CSG`, et soit G le `CSG` constitué des 0-simplexes et des 1-simplexes de K (G est donc un *graphe*). Montrez d'une part que $H_0(G) = H_0(K)$, et montrez d'autre part que l'inclusion $\iota : |G| \hookrightarrow |K|$ induit une bijection $\pi_0(\iota) : \pi_0(|G|) \xrightarrow{\simeq} \pi_0(|K|)$. Déduisez-en que la dimension de $H_0(K)$ est égale au nombre de composantes connexes par arcs de $|K|$.

Exercice 4 : Calculs avec les paires annulables

Q1. Un *sous-complexe simplicial géométrique de* K (sous-`CSG`) est un sous-ensemble $L \subset K$ tel que si $s \in L$ alors toutes les facettes de s sont dans L.

Vérifiez qu'un sous-`CSG` L de K est un `CSG` (c'est-à-dire que la deuxième condition de la définition de `CSG` est satisfaite par L), et vérifiez que $C_*(L)$ est un sous-complexe de $C_*(K)$.

Q2. Une *paire annulable* de K est une paire $\{s, t\} \subset K$ consituée d'un d-simplexe s et d'un $(d+1)$-simplexe t, tel que : (i) s est une face de t, et (ii) s n'est une face d'aucun autre $(d+1)$-simplexe de K.

a. Soit $\{s, t\}$ une paire annulable de K, et $L = K \setminus \{s, t\}$. On vérifie facilement que L est un sous-`CSG` de K. Calculez le complexe $C_*(K)/C_*(L)$ et son homologie.

b. Déduisez-en que pour tout i on a $H_i(L) \simeq H_i(K)$.

Q3. **Application.** Calculez l'homologie du `CSG` K représenté à gauche sur la figure 1 ci-dessus. (Utilisez une suite de paires annulables).

Exercice 5 : Suite de Mayer-Vietoris

Soit K un `CSG`, et K_1 et K_2 deux sous-`CSG` de K tels que $K = K_1 \cup K_2$.

Q1. Vérifiez que $K_1 \cap K_2$ est un sous-`CSG` de K.

Q2. Soient $\iota_k : C_*(K_1 \cap K_2) \hookrightarrow C_*(K_k)$ et $j_k : C_*(K_k) \hookrightarrow C_*(K)$ les inclusions de complexes. Vérifiez qu'on a une suite exacte courte de complexes, où $f_i(s) = \iota_1(s) - \iota_2(s)$, et $g_i(s+t) = j_1(s) + j_1(t)$:

$$0 \to C_*(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{f_*} C_*(K_1) \oplus C_*(K_2) \xrightarrow{g_*} C_*(K) \to 0 \;.$$

Q3. En déduire une suite exacte longue en homologie, reliant $H_i(K_1 \cap K_2)$, $H_i(K_1) \oplus H_i(K_2)$ et $H_i(K)$.

Q4. **Application.** Calculez l'homologie simpliciale du `CSG` L représenté à droite sur la figure 1 ci-dessus.