Université de Lille — Faculté des Sciences et Technologies

2018/19 - Master 1 - M414

Devoir Maison 1

Problème 1. Produits infinis.

Soit $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'espaces topologiques *non vides* (on ne suppose pas Λ fini). Un *pavé ouvert* est un sous-ensemble de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ de la forme $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{U}_\lambda$, où chaque $\mathcal{U}_\lambda$ est un ouvert de X_λ et où tous les $\mathcal{U}_\lambda$ sauf un nombre fini sont égaux à X_λ.

Q1. Vérifiez que les parties de $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ qui sont des réunions de pavés ouverts forment une topologie sur $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, qu'on appelle *topologie produit*.

Q2. Vérifiez que les projections canoniques $p_\beta : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\beta$ sont continues. Montrez que $f : Y \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ est continue si et seulement si ses applications coordonnées $f_\lambda = p_\lambda \circ f$ sont continues.

Q3. Montrez que $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ est séparé si et seulement si tous les X_λ sont séparés.

Q4. Le théorème de Tychonoff. Dans cette question on suppose les X_λ compacts. On se propose de démontrer que $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ est compact (c'est le théorème de Tychonoff).

Définition : On dit qu'une famille $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble X possède *la propriété d'intersection non vide* (on abrégera par « $\mathcal{A}$ possède la propriété (P) ») si toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ est non vide.

a. Soit X un ensemble, et $\mathcal{A}$ une famille de parties de X possédant la propriété (P).

i) A l'aide du lemme de Zorn, montrez que toute famille $\mathcal{A}$ possédant la propriété (P) est contenue dans une famille $\mathcal{B}$ possédant la propriété (P), et qui est maximale pour l'inclusion (c'est-à-dire : si $\mathcal{B}$ est contenue dans une famille $\mathcal{C}$ possédant la propriété (P), alors $\mathcal{B} = \mathcal{C}$).

ii) Montrez qu'une telle famille maximale $\mathcal{B}$ est stable par intersections finies. Montrez que si $A \subset X$ vérifie $A \cap B \neq \emptyset$ pour tout $B \in \mathcal{B}$, alors $A \in \mathcal{B}$.

b. Montrez qu'un espace topologique X est compact si et seulement si pour toute famille $\mathcal{A}$ de *fermés* de X possédant la propriété d'intersection non vide on a $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \neq \emptyset$.

c. On pose maintenant $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, on se fixe une famille $\mathcal{A}$ de fermés de X possédant la propriété (P), ainsi qu'une famille $\mathcal{B}$ possédant la propriété (P), maximale pour l'inclusion et contenant $\mathcal{A}$.

i) Montrez que pour tout λ, la famille des $\overline{p_\lambda(B)}$, pour $B \in \mathcal{B}$, est une famille de parties de X_λ possédant la propriété (P). Déduisez qu'il existe un élément $x_\lambda \in \bigcap_{B\in\mathcal{B}} \overline{p_\lambda(B)}$.

ii) Soit $\mathcal{U} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{U}_\lambda$ un pavé ouvert contenant $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Montrez que pour tout λ on a $p_\lambda(B) \cap \mathcal{U}_\lambda \neq \emptyset$, et déduisez-en que $\mathcal{U}$ est un élément de $\mathcal{B}$ (utilisez **a.**ii)).

iii) Soit A un élément de $\mathcal{A}$. Déduisez de la question précédente que tout pavé ouvert $\mathcal{U}$ contenant $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ intersecte non trivialement A. Déduisez-en que $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$, et concluez.

Q5. Produits et espaces métriques. Soit $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces métriques. Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux éléments de l'ensemble $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ par

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\delta_n(x_n, y_n)$$

où $\delta_n(x_n, y_n) = \min\{d_n(x_n, y_n), 1\}$.

a. Montrez que δ_n est une métrique sur X_n, et que d_n et δ_n définissent la même topologie sur X_n.

b. Montrez que d est une métrique sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, et que la topologie associée à cette métrique coïncide avec la topologie produit.

Q6. L'espace de Cantor abstrait K. On note $K = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ le produit d'un ensemble dénombrable de copies de l'espace topologique discret $\{0,1\}$. L'espace K s'appelle l'espace de Cantor abstrait et jouit de propriétés remarquables. Nous en donnons quelques unes ci-dessous [1]. Malgré ses propriétés extraordinaires, il est homéomorphe à un banal sous-espace de $\mathbb{R}$! [2]

a. Montrez que K est compact, séparé, et que sa topologie peut être définie par une métrique d.

b. Soit $x \in K$. Montrez que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $y \in K \setminus \{x\}$ tel que $d(x,y) < \epsilon$. Déduisez-en qu'aucun singleton de K n'est ouvert. (On dit que K n'a *aucun point isolé*, en particulier sa topologie n'est pas discrète).

c. Montrez que les seules parties connexes de K sont les singletons (on dit que K est *totalement discontinu.* A titre de comparaison, $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est totalement discontinu, mais n'est pas du tout compact !).

d. Montrez que $K \times K$ est homéomorphe à K.

e. Montrez que l'application $f : K \to \mathbb{R}$, telle que $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}$ induit un homéomorphisme de K sur son image $f(K)$ [3].

Problème 2. Cylindre d'une application.

<u>Notations :</u> la lettre I désigne l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$. Si A et B sont deux espaces topologiques, on note $A \sqcup B$ la réunion disjointe des deux ensembles A et B, munie de la topologie dont les ouverts sont de la forme $\mathcal{U}_A \sqcup \mathcal{U}_B$, où $\mathcal{U}_A$ est un ouvert de A et $\mathcal{U}_B$ un ouvert de B.

* * *

Soit $f : X \to Y$ une application continue. Le *cylindre de f* est l'espace topologique quotient :

$$Cyl(f) = \Big(X \times I \ \sqcup \ Y \Big) \Big/ \sim \quad ,$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence qui identifie chaque point $(x,0) \in X \times I$ avec le point $f(x) \in Y$. En d'autres termes, les classes d'équivalence de $\sim$ non réduites à un point sont les sous-ensembles de la forme $f^{-1}(\{y\}) \times \{0\} \ \sqcup \ \{y\}$ pour $y \in \operatorname{Im} f$.

La classe d'un élément $(x,t) \in X \times I$ dans le quotient $Cyl(f)$ sera notée $[x,t]$, la classe d'un élément $y \in Y$ sera notée $[y]$.

Q1. Montrez que le cylindre de l'application Id_X est homéomorphe au cylindre $X \times I$.

Q2. Vérifiez que les applications $\iota_X : X \to Cyl(f)$ et $\iota_Y : Y \to Cyl(f)$ définies par $\iota(x) = [x,1]$ et $\iota_Y(y) = [y]$ sont continues, et qu'elles induisent chacune un homéomorphisme sur son image.

Q3. Vérifiez que l'application $R_Y : Cyl(f) \times I \to Cyl(f)$ définie par $R_Y([x,t],s) = [x,ts]$ et $R_Y([y],s) = [y]$ définit une rétraction par déformation de $Cyl(f)$ sur $\iota_Y(Y)$ (en particulier, on n'oubliera pas de vérifier que R_Y est *continue*).

Q4. On définit une application continue $r_Y : Cyl(f) \to Y$ par $r_Y([x,t]) = f(y)$ et $r_Y(y) = y$.

a. Montrez que r_Y est une équivalence d'homotopie.

b. Calculez $r_Y \circ \iota_X$. Montrez que f est une équivalence d'homotopie si et seulement si ι_X est une équivalence d'homotopie.

---

1. Il y en a d'autres, par exemple, pour tout espace métrique compact X on peut trouver une surjection continue $K \to X$, cf. Gonnord-Tosel, Thèmes d'analyse pour l'agrégation, tome 1 (topologie et analyse fonctionnelle), page 55. Un corollaire est l'existence d'applications continues surjectives $[0,1] \to [0,1]^2$ (courbes de Péano), *ibid* page 87.
2. Moralité : ne prenez pas les nombres réels « à la légère ».
3. En remplaçant '10^k' par $3^{k+1}/2$ dans l'expression de f, on obtient un homéomorphisme sur le célèbre ensemble triadique de Cantor, cf. Queffélec, Topologie, page 84.