Invariants, cohomologie et représentations fonctorielles des groupes algébriques

Antoine Touzé

Université Paris 13

Cours Peccot- leçon 2
mardi 30 mars 2010

Foncteurs strictement polynomiaux et cohomologie de GL_n

Objectif : obtenir des informations sur $H^*(G, M)$

G schéma en groupes algébrique affine sur $\Bbbk$

M une représentation (rationnelle) de G

$H^*(G, M) = Ext^*_G(\Bbbk^{\mathrm{triv}}, M)$ cohomologie rationnelle
(Hochschild, Andersen, Jantzen, Cline, Parshall, Scott, van der Kallen, Friedlander, Suslin,...)

Foncteurs strictement polynomiaux et cohomologie de GL_n

Objectif : obtenir des informations sur $H^*(G, M)$

G schéma en groupes algébrique affine sur $\Bbbk$

M une représentation (rationnelle) de G

$H^*(G, M) = Ext^*_G(\Bbbk^{\mathrm{triv}}, M)$ cohomologie rationnelle
(Hochschild, Andersen, Jantzen, Cline, Parshall, Scott, van der Kallen, Friedlander, Suslin,...)

Rq : $Ext^*_G(V, W) = H^*(G, V^\sharp \otimes W)$ $\qquad$ $(\dim V < \infty)$.

Foncteurs strictement polynomiaux et cohomologie de GL_n

Objectif : obtenir des informations sur $H^*(G, M)$

G schéma en groupes algébrique affine sur $\Bbbk$

M une représentation (rationnelle) de G

$H^*(G, M) = Ext^*_G(\Bbbk^{\mathrm{triv}}, M)$ cohomologie rationnelle
(Hochschild, Andersen, Jantzen, Cline, Parshall, Scott, van der Kallen, Friedlander, Suslin,...)

Rq : $Ext^*_G(V, W) = H^*(G, V^\sharp \otimes W)$ $\qquad$ $(\dim V < \infty)$.

Slogan de la leçon 2 :

Catégorie $\mathcal{P}_\Bbbk$ permet des calculs explicites pour $G = GL_n$

Introduction

A propos du nom “représentation rationnelle”

$\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ algébriquement clos

Rappel : Représ rat. de $GL_n(\overline{\Bbbk}) = \overline{\Bbbk}$ e.v. $V + \rho_V : GL_n(\overline{\Bbbk}) \to GL(V)$ rég.

Introduction

A propos du nom "représentation rationnelle"

$\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ algébriquement clos

Rappel : Représ rat. de $GL_n(\overline{\Bbbk}) = \overline{\Bbbk}$ e.v. $V + \rho_V : GL_n(\overline{\Bbbk}) \to GL(V)$ rég.

$$GL_n(\overline{\Bbbk}) = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & detM^{-1} \end{bmatrix} \subset M_{n+1}(\overline{\Bbbk}).$$

Introduction

A propos du nom "représentation rationnelle"

$\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ algébriquement clos

Rappel : Représ rat. de $GL_n(\overline{\Bbbk}) = \overline{\Bbbk}$ e.v. $V + \rho_V : GL_n(\overline{\Bbbk}) \to GL(V)$ rég.

$$GL_n(\overline{\Bbbk}) = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & detM^{-1} \end{bmatrix} \subset M_{n+1}(\overline{\Bbbk}).$$

$$V \text{ "rationnelle" ssi } \begin{array}{ccc} M_{n+1}(\overline{\Bbbk}) & \xrightarrow[\exists F]{} & M_q(\overline{\Bbbk}) \\ \cup & & \cup \\ GL_n(\overline{\Bbbk}) & \xrightarrow{\rho_V} & GL(V) \end{array} \quad \text{F polynôme}$$

Introduction

A propos du nom "représentation rationnelle"

$\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ algébriquement clos

Rappel : Représ rat. de $GL_n(\overline{\Bbbk}) = \overline{\Bbbk}$ e.v. $V + \rho_V : GL_n(\overline{\Bbbk}) \to GL(V)$ rég.

$$GL_n(\overline{\Bbbk}) = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & detM^{-1} \end{bmatrix} \subset M_{n+1}(\overline{\Bbbk}).$$

$$\begin{array}{lccc} V \text{ "rationnelle" ssi} & M_{n+1}(\overline{\Bbbk}) & \xrightarrow[\exists F]{} & M_q(\overline{\Bbbk}) \quad \text{F polynôme} \\ & \cup & & \cup \\ & GL_n(\overline{\Bbbk}) & \xrightarrow{\rho_V} & GL(V) \end{array}$$

V "rationnelle" ssi $\rho_V([a_{ij}]) = [\rho_{k,\ell}(a_{ij})] \in M_q(\overline{\Bbbk})$ avec

$$\rho_{k,\ell}(a_{ij}) = \frac{P(a_{ij})}{det[a_{ij}]^t}$$

Introduction

A propos du nom "représentation rationnelle"

$\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ algébriquement clos

Rappel : Représ rat. de $GL_n(\overline{\Bbbk}) = \overline{\Bbbk}$ e.v. $V + \rho_V : GL_n(\overline{\Bbbk}) \to GL(V)$ rég.

$$GL_n(\overline{\Bbbk}) = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & detM^{-1} \end{bmatrix} \subset M_{n+1}(\overline{\Bbbk}).$$

$$\begin{array}{lccc} V \text{ "rationnelle" ssi} & M_{n+1}(\overline{\Bbbk}) & \underset{\exists F}{\longrightarrow} & M_q(\overline{\Bbbk}) \quad \text{F polynôme} \\ & \cup & & \cup \\ & GL_n(\overline{\Bbbk}) & \xrightarrow{\rho_V} & GL(V) \end{array}$$

V "rationnelle" ssi $\rho_V([a_{ij}]) = [\rho_{k,\ell}(a_{ij})] \in M_q(\overline{\Bbbk})$ avec

$$\rho_{k,\ell}(a_{ij}) = \frac{P(a_{ij})}{det[a_{ij}]^t}$$

Déf : rep. polynomiale de $GL_n(\overline{\Bbbk}) = \rho_V$ tq l'une des cond eq.

- les $\rho_{k,\ell}(a_{ij})$ sont des polynomes en les a_{ij}
- $GL_n(\overline{\Bbbk}) \curvearrowright V$ s'étend en $M_n(\overline{\Bbbk}) \curvearrowright V$

Introduction
Motivation des calculs - torsion de Frobenius (1)

(A) Si $\mathbb{k}$ de car 0, $G = GL_n$ (ou schéma gps réductif)

- $\forall V, V \simeq \bigoplus V_i$, V_i G-mod simples
- $\forall V, W$ $Ext^*_G(V, W) = 0$ pour $* > 0$.

Introduction
Motivation des calculs - torsion de Frobenius (1)

(A) Si $\Bbbk$ de car 0, $G = GL_n$ (ou schéma gps réductif)

- $\forall V, V \simeq \bigoplus V_i$, V_i G-mod simples
- $\forall V, W$ $Ext^*_G(V, W) = 0$ pour $* > 0$.

$\Rightarrow$ La théorie classique des invariants permet des calculs explicites

Introduction
Motivation des calculs - torsion de Frobenius (1)

(A) Si $\Bbbk$ de car 0, $G = GL_n$ (ou schéma gps réductif)

- $\forall V, V \simeq \bigoplus V_i$, V_i G-mod simples
- $\forall V, W$ $Ext^*_G(V, W) = 0$ pour $* > 0$.

$\Rightarrow$ La théorie classique des invariants permet des calculs explicites

(B) Si $\Bbbk$ de car p, V un G-mod

"Twist de Frobenius de V" $:= V^{(r)} = \ < v^{p^r}; v \in V > \subset S^{p^r}(V)$

Introduction
Motivation des calculs - torsion de Frobenius (1)

(A) Si $\Bbbk$ de car 0, $G = GL_n$ (ou schéma gps réductif)

- $\forall V, V \simeq \bigoplus V_i$, V_i G-mod simples
- $\forall V, W$ $Ext^*_G(V, W) = 0$ pour $* > 0$.

$\Rightarrow$ La théorie classique des invariants permet des calculs explicites

(B) Si $\Bbbk$ de car p, V un G-mod

"Twist de Frobenius de V" $:= V^{(r)} = \ < v^{p^r}; v \in V > \subset S^{p^r}(V)$

Prop :

- $(V \otimes W)^{(r)} \simeq V^{(r)} \otimes W^{(r)}$
- $(V \oplus W)^{(r)} \simeq V^{(r)} \oplus W^{(r)}$
- $(V^\sharp)^{(r)} \simeq (V^{(r)})^\sharp$
  (dim $V < \infty$)
- $$\left.\begin{array}{c} V = \Bbbk^n \\ \rho_V : G \to GL_n \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} & & V^{(r)} \simeq \Bbbk^n & & \\ G & \xrightarrow[\rho_V]{} & GL_n & \to & GL_n \\ & & [a_{ij}] & \mapsto & [a_{ij}^{p^r}] \end{array} \right.$$

Introduction
Motivation des calculs - torsion de Frobenius (2)

- V G-mod simple $\Leftrightarrow$ $V^{(r)}$ G-mod simple.

Introduction
Motivation des calculs - torsion de Frobenius (2)

- V G-mod simple $\Leftrightarrow$ $V^{(r)}$ G-mod simple.
- Lien avec les groupes finis :
  G schéma en gps de Chevalley sur $\mathbb{F}_p$ (GL_n, SO_n, Sp_n, SL_n...)
  $$H^i(G, V^{(r)}) \otimes \mathbb{F}_q \simeq H^i(G(\mathbb{F}_q), V \otimes \mathbb{F}_q)$$
  $r, q >> i$ (Cline Parshall Scott van der Kallen 1977)

Introduction
Motivation des calculs - torsion de Frobenius (2)

- V G-mod simple $\Leftrightarrow$ $V^{(r)}$ G-mod simple.
- Lien avec les groupes finis :
  G schéma en gps de Chevalley sur $\mathbb{F}_p$ (GL_n, SO_n, Sp_n, SL_n...)
  $$H^i(G, V^{(r)}) \otimes \mathbb{F}_q \simeq H^i(G(\mathbb{F}_q), V \otimes \mathbb{F}_q)$$
  $r, q >> i$ (Cline Parshall Scott van der Kallen 1977)
- Lien avec (ECF) des groupes réductifs.
  - Friedlander-Suslin (1997)
    Thm : Soit G un schéma en gpes fini (i.e. dim $\Bbbk[G] < \infty$).
    Alors G a des alg. de cohomologie $H^*(G, A)$ de t.f.

Introduction
Motivation des calculs - torsion de Frobenius (2)

- V G-mod simple $\Leftrightarrow$ $V^{(r)}$ G-mod simple.
- Lien avec les groupes finis :
  G schéma en gps de Chevalley sur $\mathbb{F}_p$ (GL_n, SO_n, Sp_n, SL_n...)
  $$H^i(G, V^{(r)}) \otimes \mathbb{F}_q \simeq H^i(G(\mathbb{F}_q), V \otimes \mathbb{F}_q)$$
  $r, q >> i$ (Cline Parshall Scott van der Kallen 1977)
- Lien avec (ECF) des groupes réductifs.
  - Friedlander-Suslin (1997)
    Thm : Soit G un schéma en gpes fini (i.e. dim $\Bbbk[G] < \infty$).
    Alors G a des alg. de cohomologie $H^*(G, A)$ de t.f.
    Clé : calcul d'éléments dans $H^*(GL_n, \mathfrak{gl}_n^{(r)})$.

Introduction
Motivation des calculs - torsion de Frobenius (2)

- V G-mod simple $\Leftrightarrow$ $V^{(r)}$ G-mod simple.
- Lien avec les groupes finis :
  G schéma en gps de Chevalley sur $\mathbb{F}_p$ (GL_n, SO_n, Sp_n, SL_n...)
  $$H^i(G, V^{(r)}) \otimes \mathbb{F}_q \simeq H^i(G(\mathbb{F}_q), V \otimes \mathbb{F}_q)$$
  $r, q >> i$ (Cline Parshall Scott van der Kallen 1977)
- Lien avec (ECF) des groupes réductifs.
  - Friedlander-Suslin (1997)
    Thm : Soit G un schéma en gpes fini (i.e. dim $\Bbbk[G] < \infty$).
    Alors G a des alg. de cohomologie $H^*(G, A)$ de t.f.
    Clé : calcul d'éléments dans $H^*(GL_n, \mathfrak{gl}_n^{(r)})$.
  - Conjecture de van der Kallen (2000)
    Thm : Soit G un schéma en gpes réductif.
    Alors G a des alg. de cohomologie $H^*(G, A)$ de t.f.

Introduction
Motivation des calculs - torsion de Frobenius (2)

- V G-mod simple $\Leftrightarrow$ $V^{(r)}$ G-mod simple.
- Lien avec les groupes finis :
  G schéma en gps de Chevalley sur $\mathbb{F}_p$ (GL_n, SO_n, Sp_n, SL_n...)
  $$H^i(G, V^{(r)}) \otimes \mathbb{F}_q \simeq H^i(G(\mathbb{F}_q), V \otimes \mathbb{F}_q)$$
  $r, q >> i$ (Cline Parshall Scott van der Kallen 1977)
- Lien avec (ECF) des groupes réductifs.
  - Friedlander-Suslin (1997)
    Thm : Soit G un schéma en gpes fini (i.e. dim $\Bbbk[G] < \infty$).
    Alors G a des alg. de cohomologie $H^*(G, A)$ de t.f.
    Clé : calcul d'éléments dans $H^*(GL_n, \mathfrak{gl}_n^{(r)})$.
  - Conjecture de van der Kallen (2000)
    Thm : Soit G un schéma en gpes réductif.
    Alors G a des alg. de cohomologie $H^*(G, A)$ de t.f.
    Clé : calcul de classes dans $H^*(GL_n, \Gamma^*(\mathfrak{gl}_n^{(1)}))$ (2008)

Motivation des calculs - torsion de Frobenius (3)

Ce qu'on sait en général sur $H^*(G, V^{(r)})$
($G = GL_n$ ou un schéma en gps de Chevalley)

Motivation des calculs - torsion de Frobenius (3)

Ce qu'on sait en général sur $H^*(G, V^{(r)})$
($G = GL_n$ ou un schéma en gps de Chevalley)

- $H^0(G, V) = H^0(G, V^{(r)})$

Motivation des calculs - torsion de Frobenius (3)

Ce qu'on sait en général sur $H^*(G, V^{(r)})$
($G = GL_n$ ou un schéma en gps de Chevalley)

- $H^0(G, V) = H^0(G, V^{(r)})$
- $H^*(G, V^{(r)}) \hookrightarrow H^*(G, V^{(r+1)})$ (Andersen)

Motivation des calculs - torsion de Frobenius (3)

Ce qu'on sait en général sur $H^*(G, V^{(r)})$
($G = GL_n$ ou un schéma en gps de Chevalley)

- $H^0(G, V) = H^0(G, V^{(r)})$
- $H^*(G, V^{(r)}) \hookrightarrow H^*(G, V^{(r+1)})$ (Andersen)
- $H^*(G, V^{(r)}) \simeq H^*(G, V^{(r+1)})$ en bas degrés (CPSvdK)

Introduction
Motivation des calculs - torsion de Frobenius (3)

Ce qu'on sait en général sur $H^*(G, V^{(r)})$
($G = GL_n$ ou un schéma en gps de Chevalley)

- $H^0(G, V) = H^0(G, V^{(r)})$
- $H^*(G, V^{(r)}) \hookrightarrow H^*(G, V^{(r+1)})$ (Andersen)
- $H^*(G, V^{(r)}) \simeq H^*(G, V^{(r+1)})$ en bas degrés (CPSvdK)

Pb : Calcul explicites difficiles

Ex : $H^*(GL_n, \mathfrak{gl}_n^{(r)}) = Ext^*_{GL_n}(\mathbb{k}^{n(r)}, \mathbb{k}^{n(r)})$.
si $r = 0$: $H^*(GL_n, \mathfrak{gl}_n) = 0$ pour $* > 0$, $H^0(GL_n, \mathfrak{gl}_n) = \mathbb{k}$.
si $r > 0$: ? ?

Introduction
Motivation des calculs - torsion de Frobenius (3)

Ce qu'on sait en général sur $H^*(G, V^{(r)})$
($G = GL_n$ ou un schéma en gps de Chevalley)

- $H^0(G, V) = H^0(G, V^{(r)})$
- $H^*(G, V^{(r)}) \hookrightarrow H^*(G, V^{(r+1)})$ (Andersen)
- $H^*(G, V^{(r)}) \simeq H^*(G, V^{(r+1)})$ en bas degrés (CPSvdK)

Pb : Calcul explicites difficiles

Ex : $H^*(GL_n, \mathfrak{gl}_n^{(r)}) = Ext^*_{GL_n}(\mathbb{k}^{n(r)}, \mathbb{k}^{n(r)})$.
si $r = 0$: $H^*(GL_n, \mathfrak{gl}_n) = 0$ pour $* > 0$, $H^0(GL_n, \mathfrak{gl}_n) = \mathbb{k}$.
si $r > 0$: ? ?

Slogan de la leçon 2 :

Catégorie $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ permet des calculs explicites pour $G = GL_n$
Notamment de mieux comprendre la torsion de Frobenius

Plan de la leçon 2

I. Brefs rappels de la leçon 1

II. Le théorème de Friedlander et Suslin

$$\begin{array}{c}\text{foncteurs strictement}\\ \text{polynomiaux}\end{array} = \begin{array}{c}\text{version stabilisée}\\ \text{de l'algèbre de Schur}\end{array}$$

III. Techniques de calcul dans $\mathcal{P}_{\Bbbk}$

Pourquoi les calculs dans $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ sont efficaces ?

IV. La formule de Chalupnik

Certains calculs d'extensions impliquant la torsion de Frobenius se ramènent à des calculs d'invariants.

Rappels leçon 1 : Foncteurs strictement polynomiaux

Corps de base $\mathbb{k}$, V une rep. rat. de G, de dim $< \infty$

Procédés fonctoriels pour construire représ.

$F : \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{k}}$ $\qquad \mathcal{V}_{\mathbb{k}} = \{\mathbb{k}\text{-e.v. dim} < \infty\}$.

$F(V)$ muni action $\begin{array}{ccc} G \times F(V) & \to & F(V) \\ (g, w) & \mapsto & F(g)(w) \end{array}$

Rappels leçon 1 : Foncteurs strictement polynomiaux

Corps de base $\mathbb{k}$, V une rep. rat. de G, de dim $< \infty$

Procédés fonctoriels pour construire représ.

$F : \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{k}} \qquad \mathcal{V}_{\mathbb{k}} = \{\mathbb{k}\text{-e.v. dim} < \infty\}.$

$F(V)$ muni action $\begin{array}{ccc} G \times F(V) & \to & F(V) \\ (g, w) & \mapsto & F(g)(w) \end{array}$

Pb : Comment assurer que $F(V)$ rationnelle ?

Rappels leçon 1 : Foncteurs strictement polynomiaux

Corps de base $\Bbbk$, V une rep. rat. de G, de dim $< \infty$

Procédés fonctoriels pour construire représ.

$F : \mathcal{V}_\Bbbk \to \mathcal{V}_\Bbbk \qquad \mathcal{V}_\Bbbk = \{\Bbbk\text{-e.v. dim} < \infty\}.$

$F(V)$ muni action $\begin{array}{ccc} G \times F(V) & \to & F(V) \\ (g, w) & \mapsto & F(g)(w) \end{array}$

Pb : Comment assurer que $F(V)$ rationnelle ?

($\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ alg. clos) $G \xrightarrow{\rho_V} GL(V) \xrightarrow{F_{V,V}} GL(F(V))$ régulière ?

Rappels leçon 1 : Foncteurs strictement polynomiaux

Corps de base $\mathbb{k}$, V une rep. rat. de G, de dim $< \infty$

Procédés fonctoriels pour construire représ.

$F : \mathcal{V}_\mathbb{k} \to \mathcal{V}_\mathbb{k} \qquad \mathcal{V}_\mathbb{k} = \{\mathbb{k}\text{-e.v. dim} < \infty\}.$

$F(V)$ muni action $\begin{array}{ccc} G \times F(V) & \to & F(V) \\ (g, w) & \mapsto & F(g)(w) \end{array}$

Pb : Comment assurer que $F(V)$ rationnelle ?

($\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ alg. clos) $G \xrightarrow{\rho_V} GL(V) \xrightarrow{F_{V,V}} GL(F(V))$ régulière ?

Déf. Foncteur strictement polynomial $F : \mathcal{V}_\mathbb{k} \to \mathcal{V}_\mathbb{k} :=$

- $\forall V$, $F(V) \in \mathcal{V}_\mathbb{k}$
- $\forall V, W$, polynome

$$F_{V,W} : Hom_\mathbb{k}(V, W) \to Hom_\mathbb{k}(F(V), F(W))$$

tq $\quad F_{W,V}(g) \circ F_{V,U}(f) = F_{W,U}(g \circ f), \quad F_{V,V}(Id_V) = Id_{F(V)}.$

$\mathcal{P}_\mathbb{k}$ = catégorie des fctrs str. polyn. deg. fini $\quad (\deg F := \sup\{\deg F_{V,W}\})$

Rappels leçon 1 : Foncteurs strictement polynomiaux

Propriétés des foncteurs strictement polynomiaux

(1) $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ est une catégorie abélienne.

Rappels leçon 1 : Foncteurs strictement polynomiaux

Propriétés des foncteurs strictement polynomiaux

(1) $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ est une catégorie abélienne.

(2) $\mathcal{P}_{\Bbbk} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{P}_{\Bbbk,d}$

$\mathcal{P}_{\Bbbk,d}$ = sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ des fctrs hom. deg. d.

Rappels leçon 1 : Foncteurs strictement polynomiaux

Propriétés des foncteurs strictement polynomiaux

(1) $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ est une catégorie abélienne.

(2) $\mathcal{P}_{\Bbbk} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{P}_{\Bbbk,d}$

$\mathcal{P}_{\Bbbk,d}$ = sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ des fctrs hom. deg. d.

$\otimes^d, S^d, \Lambda^d, \Gamma^d$ hom. deg. d,

$I^{(r)}$ hom. deg. p^r si $\Bbbk$ de car $p > 0$.

Rappels leçon 1 : Foncteurs strictement polynomiaux

Propriétés des foncteurs strictement polynomiaux

(1) $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ est une catégorie abélienne.

(2) $\mathcal{P}_{\Bbbk} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{P}_{\Bbbk,d}$

$\mathcal{P}_{\Bbbk,d}$ = sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ des fctrs hom. deg. d.

$\bigotimes^d, S^d, \Lambda^d, \Gamma^d$ hom. deg. d,

$I^{(r)}$ hom. deg. p^r si $\Bbbk$ de car $p > 0$.

NB : $Ext^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F, G) = 0$ si F et G hom. de deg. $\neq$! !

Rappels leçon 1 : Foncteurs strictement polynomiaux

Propriétés des foncteurs strictement polynomiaux

(1) $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ est une catégorie abélienne.

(2) $\mathcal{P}_{\Bbbk} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{P}_{\Bbbk,d}$

$\mathcal{P}_{\Bbbk,d}$ = sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ des fctrs hom. deg. d.

$\bigotimes^d, S^d, \Lambda^d, \Gamma^d$ hom. deg. d,

$I^{(r)}$ hom. deg. p^r si $\Bbbk$ de car $p > 0$.

NB : $Ext^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F, G) = 0$ si F et G hom. de deg. $\neq$! !

(3) Si V est un G-module, évaluation $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{\Bbbk} & \longrightarrow & G\text{-mod} \\ F & \longmapsto & F(V) \end{array}$

Rappels leçon 1 : Foncteurs strictement polynomiaux

Propriétés des foncteurs strictement polynomiaux

(1) $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ est une catégorie abélienne.

(2) $\mathcal{P}_{\Bbbk} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{P}_{\Bbbk,d}$

$\mathcal{P}_{\Bbbk,d}$ = sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ des fctrs hom. deg. d.

$\otimes^d, S^d, \Lambda^d, \Gamma^d$ hom. deg. d,

$I^{(r)}$ hom. deg. p^r si $\Bbbk$ de car $p > 0$.

NB : $Ext^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F, G) = 0$ si F et G hom. de deg. $\neq$! !

(3) Si V est un G-module, évaluation $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{\Bbbk} & \longrightarrow & G\text{-mod} \\ F & \longmapsto & F(V) \end{array}$

$$\begin{array}{ccc} Ext^k_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F, G) & \longrightarrow & Ext^k_{G\text{-mod}}(F(V), G(V)) \\ [G \to X^1 \to \cdots \to X^k \to F] & \longmapsto & [G(V) \to X^1(V) \to \cdots \to X^k(V) \to F(V)] \end{array}$$

A démontrer :

Thm : (FS 97) c'est un isomorphisme si

$G = GL_n$, $V = \Bbbk^n$ repres std de GL_n, $n \geq \deg F, \deg G$.