Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Agrégation externe **Année 2003-2004**

T.P. sur le théorème de limite centrale

Ex 1. *Comparaison des lois binomiales et de Poisson*

Écrire un script qui trace sur le même graphique les diagrammes en bâtons de la loi $\mathrm{Bin}(n, p)$ et de la loi $\mathrm{Pois}(np)$. On se limitera aux valeurs entières $0 \leq k \leq 2\lambda + 4$. Utiliser deux couleurs différentes et décaler les bâtons pour une meilleure lisibilité. On pourra utiliser les f.d.r. `cdfbin` et `cdfpoi`.

Ex 2. *Intervalles de confiance pour une probabilité inconnue*

Le théorème de de Moivre Laplace permet d'estimer la probabilité inconnue p à partir de l'observation d'un échantillon de taille n de variables de Bernoulli indépendantes X_i de paramètre p. Dans la suite, on pose

$$M_n := \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Au niveau de confiance de 95%, on peut proposer l'intervalle

$$I = \left[M_n(\omega) - \frac{1{,}96}{2\sqrt{n}} ; M_n(\omega) + \frac{1{,}96}{2\sqrt{n}} \right],$$

obtenu en *majorant* la variance inconnue pq par $1/2$. On peut obtenir un intervalle plus étroit en estimant pq par $M_n(1 - M_n)$. Ce qui donne au niveau de confiance 95% l'intervalle

$$J = \left[M_n(\omega) - 1{,}96 \sqrt{\frac{M_n(\omega)(1 - M_n(\omega))}{n}} ; [M_n(\omega) + 1{,}96 \sqrt{\frac{M_n(\omega)(1 - M_n(\omega))}{n}} \right].$$

1) Écrire un script `peigne1.sce` qui demande la valeur inconnue p, génère 100 échantillons de la taille voulue par l'utilisateur, calcule pour chacun d'eux l'intervalle I et l'affiche comme un segment vertical (avec pour abscisse le numéro de l'échantillon). Le segment devra être de couleur verte s'il contient p et rouge sinon. On tracera de plus la ligne horizontale d'ordonnée p en bleu.

2) Écrire le script `peigne2.sce` qui fait la même chose mais en calculant simultanément I et J et affiche les deux « peignes » dans deux sous-graphiques de la même fenêtre (utiliser `xsetech`). Tester et commenter les observations faites.

Ex 3. *Le TLC pour des lois de Paréto*

On dit que X suit la loi de Paréto de paramètres p et 1, si

$$\mathbf{P}(X > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1, \\ x^{-p} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

L'espérance existe pour $p > 1$, la variance pour $p > 2$. Elles valent respectivement :

$$\mathbb{E}\, X = \frac{p}{p-1}, \qquad \operatorname{Var} X = \frac{p}{(p-1)^2(p-2)}.$$

1) Comment générer un échantillon de la loi de Paréto à partir d'un échantillon uniforme ?

2) Étudier expérimentalement l'influence du paramètre p sur la valeur maximale de l'échantillon.

3) Générer N échantillons de taille n de la loi de Paréto de paramètre p (données à faire saisir interactivement) et calculer pour chacun la somme centrée réduite du TLC (S_n^*). Faire tracer l'histogramme de ces N sommes centrées réduites (classes de longueur $1/2$ entre -4 et $+4$) ainsi que la courbe de la densité gaussienne standard. Étudier l'influence du paramètre p sur la qualité de l'approximation gaussienne.

Ex 4. *Saturation d'un central téléphonique*

Un central téléphonique dessert 5000 abonnés. A un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 2 % d'utiliser son téléphone et les appels des abonnés sont supposés indépendants.

1) Quel nombre minimal m d'appels doit pouvoir traiter simultanément le central pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2.5 % ?

2) Simuler le trafic sur une centaine d'instants consécutifs (temps discrétisé) et le représenter graphiquement par un diagramme en bâtons (de hauteur proportionnelle aux nombres d'abonnés utilisant leur téléphone à l'instant concerné).

Ex 5. *Loi uniforme dans un triangle et TLC dans* $\mathbb{R}^2$

1) Proposer une solution simple (et sans boucle `for` !) pour construire le vecteur des espacements d'un n-échantillon uniforme sur $[0,1]$, i.e. les longueurs des $n+1$ segments consécutifs (de gauche à droite) découpés sur $[0,1]$ par les n points de l'échantillon.

2) Générer un échantillon de la loi uniforme dans un triangle ABC du plan. On rappelle que si $(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$ est le vecteur des espacements d'un 2-échantillon uniforme sur $[0,1]$, le point $\delta_0 A + \delta_1 B + \delta_2 C$ suit la loi uniforme dans le triangle ABC.

3) Tracer le triangle ABC et le *nuage de points* d'un n échantillon de la loi uniforme dans ABC.

4) Générer N échantillons de taille n de la loi uniforme dans ABC. Pour chacun, calculer la somme $S_n^\star = (S_n - \mathbb{E}\, S_n)/\sqrt{n}$ et afficher le nuage de points des $S_n^\star$. Que remarque-t-on ?

5) Tracer sur ce nuage de points des ellipses lignes de niveau de la densité gaussienne limite.