CARACTÈRES UNITAIRES DE U, R ET QUELQUES AUTRES GROUPES TOPOLOGIQUES

OLIVIER SERMAN

Le but de ces notes est de déterminer les caractères unitaires de certains groupes classiques.

Rappelons d'abord que si G est un groupe fini on appelle *caractère* (multiplicatif, ou linéaire) de G tout homomorphisme $\chi\colon G \to \mathbf{C}^*$. L'ensemble des caractères de G forme un groupe $\widehat{G}$, appelé groupe dual. Si $G \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, son groupe dual $\widehat{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ est isomorphe au groupe μ_n des racines n-ièmes de l'unité, qui est encore cyclique de même ordre. On en déduit à l'aide du théorème de structure des groupes abéliens finis que pour tout groupe abélien fini G, $\widehat{G}$ est isomorphe à G. De plus, $G \to \widehat{\widehat{G}}, g \mapsto (\chi \mapsto \chi(g))$ définit un isomorphisme canonique entre G et son bidual. Enfin, la formule d'inversion de Fourier s'écrit simplement

$$f(g) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi)\chi(g)$$

pour toute fonction $f\colon G \to \mathbf{C}$, où $\widehat{f}(\chi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi(g)}f(g)$.

Comment cela se généralise-t-il aux groupes abéliens infinis tels que $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C}^*, |z| = 1\}$? et aux groupes matriciels $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$?... Il est assez naturel de considérer les homomorphismes $G \to \mathbf{C}^*$ qui sont en plus continus. Et, comme nous allons le voir, il est bien utile de considérer d'abord les homomorphismes à valeurs dans $\mathbf{U}$ plutôt que dans $\mathbf{C}^*$ tout entier.

1. Caractères et caractères unitaires

Soit G un groupe topologique [1]. On appelle *caractère* de G tout homomorphisme continu de G dans $\mathbf{C}^*$, et *caractère unitaire* (ou encore tout simplement caractère, en fonction du contexte [2]) tout homomorphisme continu de G dans $\mathbf{U}$. On appelle *groupe dual* le groupe des caractères unitaires de G (qu'on voit comme un groupe abstrait pour simplifier [3]).

Proposition 1.1. *L'application $z \in \mathbf{C}^* \longmapsto (\log|z|, \frac{z}{|z|}) \in \mathbf{R}\times\mathbf{U}$ induit un isomorphisme de groupes topologiques de $\mathbf{C}^*$ sur $\mathbf{R}\times\mathbf{U}$. Autrement dit, c'est un isomorphisme de groupes qui est également un homéomorphisme.*

Démonstration. Cette application est un homomorphisme continu de $(\mathbf{C}^*, \times)$ vers $(\mathbf{R}, +) \times (\mathbf{U}, \times)$. Elle admet pour réciproque l'application $(t, u) \in \mathbf{R}\times\mathbf{U} \mapsto e^t u \in \mathbf{C}^*$ qui est également continue. □

Cette proposition n'est bien sûr qu'une reformulation de la décomposition polaire $z \in \mathbf{C}^* \mapsto (|z|, \frac{z}{|z|}) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{U}$, $(\rho, u) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{U} \mapsto \rho u \in \mathbf{C}^*$ à l'aide de l'isomorphisme entre $(\mathbf{R}_+^*, \times)$ et $(\mathbf{R}, +)$ donné par le logarithme.

Date: 23 janvier 2013.

1. On appelle groupe topologique un groupe G muni d'une topologie rendant les lois $G\times G \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1g_2$ et $G \to G, g \mapsto g^{-1}$ continues. Les groupes topologiques considérés ici sont $\mathbf{R}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{C}^*$ ou des groupes matriciels, munis de leur topologie usuelle.

2. On appelera ainsi tout simplement caractère un homomorphisme continu de G dans $\mathbf{U}$ lorsque G est un groupe abélien localement compact.

3. Dès que G est localement compact, ce qui est bien sûr le cas pour les groupes usuels, le groupe dual $\widehat{G}$ possède une topologie naturelle, qui est celle de la convergence uniforme sur tout compact de G. Lorsque G est compact, c'est simplement la topologie de la convergence uniforme.

Corollaire 1.2. *Tout caractère $\varphi\colon G \to \mathbf{C}^*$ d'un groupe topologique G s'écrit de manière unique comme produit $\varphi = \varphi_{\mathbf{R}_+^*}\varphi_{\mathbf{U}}$ d'un homomorphisme continu $\varphi_{\mathbf{R}_+^*} : G \to \mathbf{R}_+^*$ et d'un caractère unitaire $\varphi_{\mathbf{U}}$ de G.*

Démonstration. On a en effet $\varphi_{\mathbf{R}_+^*}(g) = |\varphi(g)|$ et $\varphi_{\mathbf{U}}(g) = \frac{\varphi(g)}{|\varphi(g)|}$ pour tout $g \in G$. □

On peut donc séparer l'étude des caractères d'un groupe topologique G en celles de ses caractères unitaires d'une part et de ses homomorphismes continus vers $\mathbf{R}$ d'autre part. Pour les groupes compacts, ces derniers sont triviaux :

Proposition 1.3. *Tout homomorphisme continu d'un groupe compact G vers $\mathbf{R}$ est constant. En particulier, tout caractère d'un groupe compact est unitaire.*

Démonstration. Soient G un groupe compact et $\varphi\colon G \to \mathbf{R}$ un homomorphisme continu. L'image de G par φ est un sous-groupe compact de $\mathbf{R}$. Mais les sous-groupes non triviaux de $\mathbf{R}$ sont non bornés (si $x \neq 0$ appartient à un sous-groupe H de $\mathbf{R}$, alors $nx \in H$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$). On a donc $\varphi(G) = \{0\}$, i.e. $\varphi = 0$. Il résulte alors du corollaire précédent que tout caractère de G est unitaire. □

2. Caractères de $\mathbf{R}$

L'exponentielle fournit des caractères unitaires non triviaux de $\mathbf{R}$ sous la forme $t \mapsto \exp(i\xi t)$, $\xi \in \mathbf{R}$. Le but de cette partie est de montrer que ce sont les seuls, autrement dit que

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{R}} \\ \xi & \longmapsto & (t \mapsto \exp(i\xi t)) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

Nous en donnons deux démonstrations. La première repose sur le théorème de relèvement, qui ramène le problème à celui des homomorphismes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. La seconde est plus élémentaire.

2.1. Théorème de relèvement et homomorphismes de R dans lui-même.

Rappelons que l'exponentielle complexe définit une application holomorphe surjective

$$z \in \mathbf{C} \mapsto \exp z \in \mathbf{C}^*$$

de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}^*$ qui est également un homomorphisme de noyau $2\pi i\mathbf{Z}$. On a ainsi un isomorphisme de groupes $\mathbf{C}/(2\pi i\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^*$. Le cercle unité $\mathbf{U}$ est l'image par exp de $i\mathbf{R}$, de sorte qu'on a également un homomorphisme continu

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \exp(it) \in \mathbf{U}$$

de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{U}$, de noyau $2\pi\mathbf{Z}$, et un isomorphisme de groupes $\mathbf{R}/(2\pi\mathbf{Z}) \to \mathbf{U}$.

Théorème 2.2. *Soient I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$, et $f\colon I \to \mathbf{U}$ une application continue de I dans $\mathbf{U}$. Soit $t_0 \in I$. Alors il existe pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$ vérifiant $\exp(ix_0) = f(t_0)$ une unique application continue $\tilde{f}\colon I \to \mathbf{R}$ telle que $\exp(i\tilde{f}) = f$ et $\tilde{f}(t_0) = x_0$.*

De même, il existe pour toute application continue $f\colon I \to \mathbf{C}^*$ et tout $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $\exp(z_0) = f(t_0)$ une unique application continue $\tilde{f}\colon I \to \mathbf{C}$ telle que $f = \exp \tilde{f}$ et $\tilde{f}(t_0) = z_0$.

On dit que $\tilde{f}$ relève f (ou encore que c'est un logarithme continu de f). Elle complète le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R} \arrow[d, "\exp(i\cdot)"] \\ I \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbf{U} \end{tikzcd}$$

Démonstration. Nous donnons la démonstration dans le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbf{U}$. Le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbf{C}^*$ s'obtient exactement de la même façon [4].

L'unicité est aisée : soient $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ deux relèvements de f, i.e. deux applications continues $I \to \mathbf{R}$ telles que $\exp(i\tilde{f}_1) = f = \exp(i\tilde{f}_2)$. La différence $\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ est donc une fonction continue sur I à valeurs dans $\ker(\exp(i\cdot)) = 2\pi\mathbf{Z}$, qui est donc constante puisque I est connexe. Deux relèvements sont donc égaux si et seulement si ils coïncident en un point, d'où l'unicité sous la condition $\tilde{f}(t_0) = x_0$.

Pour l'existence on dispose de plusieurs démonstrations, qui utilisent toutes d'une manière ou d'une autre le logarithme complexe (qui permet de relever localement une fonction continue).

La plus proche de la théorie générale des revêtements topologiques se trouve par exemple dans le tome 3 du cours de Lelong-Ferrand & Arnaudiès [2, VI.6, p. 337].

Notons d'abord qu'il suffit de traiter le cas où l'intervalle est compact [5]. En effet, par unicité du relèvement continu, si J_1 et J_2 sont deux segments contenus dans I contenant t_0, alors les relèvements $\widetilde{f_{|J_1}}$ et $\widetilde{f_{|J_2}}$ des restrictions de f à J_1 et J_2 envoyant t_0 sur x_0 coïncident sur $J_1 \cap J_2$ (qui est bien connexe). Le relèvement continu $\tilde{f}$ de f s'obtient alors en posant, pour tout $t \in I$, $\tilde{f}(t) = \widetilde{f_{|J}}(t)$ où J désigne n'importe quel segment contenu dans I et contenant t et t_0.

Supposons donc $I = [a, b]$. Il suffit de montrer l'existence d'un relèvement $\tilde{f}_0$ de f sans fixer sa valeur en t_0. En effet, un tel relèvement vérifie $\exp(i\tilde{f}_0(t_0)) = f(t_0) = \exp(ix_0)$, d'où on déduit $\tilde{f}_0(t_0) = x_0 + 2k\pi$ pour $k \in \mathbf{Z}$. Le relèvement de f envoyant t_0 sur x_0 est alors $\tilde{f} = \tilde{f}_0 - 2k\pi$.

Soit alors J le sous-ensemble des points t de I tels que la restriction $f_{|[a,t]}$ de f à $[a, t]$ admette un relèvement continu $\tilde{f}$ (on dit que f admet un relèvement continu sur l'intervalle $[a, t]$). Ce sous-ensemble est non vide puisqu'il contient a. Il admet donc une borne supérieure $\sup J \in [a, b]$.

Montrons que $\sup J = b$. Sinon $c = \sup J$ est strictement inférieur à b et, f étant continue, il existe donc $\delta > 0$ tel que $[c, c + \delta[\subset I$ et $t \in I, |t - c| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(c)| < 1$. On a donc $t \in I, |t-c| < \delta \Rightarrow |\frac{f(t)}{f(c)} - 1| < 1$. Ainsi $t \in]c-\delta, c+\delta[\cap I \mapsto \frac{f(t)}{f(c)}$ est à valeurs dans le demi-cercle unité ouvert contenu dans le demi-plan $\{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$, où la détermination principale Log du logarithme complexe est bien définie (par exemple par $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-^* \mapsto \int_{[1,z]} \frac{dz}{z}$). Si x_c désigne un réel vérifiant $\exp(ix_c) = f(c)$, les relèvements de f sur $]c - \delta, c + \delta[\cap I$ sont de la forme $\varphi_k \colon t \in]c - \delta, c + \delta[\cap I \mapsto x_c + 2k\pi + \frac{1}{i} \operatorname{Log} \frac{f(t)}{f(c)}$ pour $k \in \mathbf{Z}$.

Par définition de $c = \sup J$, il existe $c' \in [a, c] \cap]c - \delta, c]$ tel que f admette un relèvement continu $\tilde{f}$ sur $[a, c']$. L'idée est de relever f au-delà de c en recollant $\tilde{f}$ et φ_k pour un entier k bien choisi. On a $\exp(i\tilde{f}(c')) = f(c') = \exp(i\varphi_0(c'))$, de sorte qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\tilde{f}(c') = \varphi_0(c') + 2k\pi$. L'application $\tilde{g} \colon [a, c + \delta[\to \mathbf{R}$ égale à $\tilde{f}$ sur $[a, c']$ et à φ_k sur $[c', c + \delta[$ est donc bien définie et continue. De plus elle relève f. Donc $c + \delta/2 \in J$, ce qui est absurde. On a donc $\sup J = b$, i.e. f admet un relèvement continu sur $[a, b]$. □

Remarque 2.3. Dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$, on dispose d'une expression intégrale explicite de $\tilde{f}$ qui permet de raccourcir l'argument : en effet, il suffit de constater que la fonction

$$t \in I \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{if(u)} du$$

4. Le cas $I \to \mathbf{U}$ est bien sûr un cas particulier du cas $I \to \mathbf{C}^*$.

5. On pourrait éviter d'avoir à déduire ainsi le cas général du cas compact en donnant l'argument suivant, qui présente l'inconvénient d'utiliser le lemme de Zorn : considérons l'ensemble des couples $(J, \tilde{f}_J)$ où J est un intervalle contenu dans I et contenant t_0 et $\tilde{f}_J$ un relèvement de $f_{|J}$ envoyant t_0 sur x_0, ordonné par la relation $(J, \tilde{f}_J) \leqslant (J', \tilde{f}_{J'})$ si $J \subset J'$ et $(\tilde{f}_{J'})_{|J} = \tilde{f}_J$. Cet ensemble est inductif et non vide, donc admet un élément maximal $(J, \tilde{f}_J)$. On montre alors que $J = I$ en vérifiant comme dans la preuve du théorème que les inégalités strictes $\sup J < \sup I$ et $\inf I < \inf J$ sont impossibles.

est le relèvement cherché (on aboutit à une telle expression tout simplement en dérivant l'identité $f = \exp(i\tilde{f})$). Cela se trouve par exemple dans le livre de Rouvière [4], ou dans le cours de Lelong-Ferrand et Arnaudiès déjà cité.

Remarque 2.4. Il est bon d'avoir en tête la situation géométrique, qui n'est malheureusement pas assez éclairée par la démonstration précédente. Si $f\colon I \to \mathbf{U}$ est continue, on peut relever f au voisinage de tout point de I à l'aide du logarithme complexe, et il suffit de recoller ces relèvements locaux.

Remarque 2.5 (Autre démonstration plutôt originale)**.** Voici une élégante démonstration du théorème de relèvement permettant de manipuler la notion de groupe topologique sur un exemple très concret, que l'on peut trouver en exercice corrigé dans le cours de topologie de Hervé Queffélec [3, Chapitre 4, Ex. IV.26]. On y montre un peu plus généralement que toute fonction continue f d'un compact étoilé K de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{C}^*$ se relève en une fonction continue $\tilde{f}\colon K \to \mathbf{C}$. On en déduit que le résultat reste vrai pour tout fermé étoilé [6] de $\mathbf{R}^n$, en particulier pour $\mathbf{R}^n$ tout entier.

Soit I un segment dans $\mathbf{R}$. On peut supposer qu'il contient 0. Soit G le groupe des applications continues de I dans $\mathbf{U}$ (le produit est induit par celui de $\mathbf{U}$, l'élément neutre est la fonction 1 constante égale à 1). On le munit de la topologie induite par la norme infinie sur l'espace $\mathcal{C}(I, \mathbf{C})$ des fonctions continues de I dans $\mathbf{C}$ (autrement dit de la topologie de la convergence uniforme). Le groupe G est ainsi un groupe topologique.

Considérons le sous-ensemble G_0 des éléments de G admettant un relèvement $I \to \mathbf{R}$. C'est un sous-groupe de G (si $f = \exp i\tilde{f}$ et $g = \exp i\tilde{g}$, alors $fg = \exp i(\tilde{f}+\tilde{g})$ et $f^{-1} = \exp(-i\tilde{f})$), qui contient un voisinage de l'élément neutre 1 : en effet, on vérifie à l'aide du logarithme complexe que la boule ouverte $U = \{f \in G, \|f-1\|_\infty < 1\}$ de centre 1 et de rayon 1 est contenue dans G_0 (si $\|f-1\| < 1$, alors $f\colon I \to \mathbf{U}$ évite -1, donc $\tilde{f} = \frac{1}{i}\operatorname{Log} f\colon I \to \mathbf{R}$ est bien définie, continue, et $f = \exp i\tilde{f}$. On en déduit que G_0 est ouvert [7] : en effet, c'est un voisinage de chacun de ses points, puisque tout point $g \in G_0$ est contenu dans gU, qui est contenu dans le sous-groupe G_0 et ouvert comme image de l'ouvert U par l'homéomorphisme $g\colon G \to G, h \mapsto gh$ (la multiplication par g est bien un homéomorphisme, comme application continue bijective dont la réciproque est la multiplication par g^{-1} qui est également continue). Or, dans un groupe topologique, tout sous-groupe ouvert est automatiquement fermé : en effet [8], G s'écrit comme une union disjointe $G = \coprod_{a\in A} g_a G_0$ où $\{g_a, a \in A\}$ est un système de représentants des classes à gauche modulo G_0, et $G \setminus G_0 = \coprod_{a\in A, g_a \notin G_0} g_a G_0$ est ouvert comme union d'ouverts.

Enfin G est connexe par arcs : en effet, on peut relier toute fonction $g \in G$ à la fonction constante égale à $g(0)$ par le chemin $t \mapsto g_t$ où $g_t(x) = g(tx)$. Ce chemin est bien continu car g est uniformément continue. On peut ensuite relier toute fonction constante à la fonction 1 puisque $\mathbf{U}$ est connexe par arcs.

Finalement G_0 est une partie ouverte et fermée non vide dans G connexe, de sorte que $G_0 = G$. Autrement dit, toute application continue $I \to \mathbf{U}$ admet un relèvement $I \to \mathbf{R}$.

Il faut ensuite en déduire le cas d'un intervalle quelconque comme dans la démonstration [9] du théorème 2.2.

Nous sommes maintenant en mesure de décrire les homomorphismes continus φ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{U}$. L'idée est de relever une telle application en un homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

6. Avec un peu plus de soin, on peut en déduire que cela reste vrai pour toute partie étoilée de $\mathbf{R}^n$.

7. L'argument montre en fait qu'un sous-groupe d'un groupe topologique est ouvert si et seulement si il contient un voisinage de l'élément neutre.

8. On peut préférer l'argument suivant : soit $g \in G \setminus G_0$. Si U désigne un voisinage ouvert de 1 contenu dans G_0, alors gU est un ouvert (image de U par l'homéomorphisme $h \mapsto gh$) qui ne rencontre pas le sous-groupe G_0.

9. Il ne semble malheureusement pas possible de généraliser directement l'argument précédent au cas d'un intervalle quelconque : en effet, le chemin $t \mapsto g_t$ n'est a priori plus continu pour la topologie de la convergence uniforme si I n'est pas compact. Le groupe G possède en fait une topologie plus naturelle, celle de la convergence uniforme sur les compacts. Le chemin précédent est bien continu pour cette topologie, mais par contre il n'est plus aussi simple de montrer que G_0 est un voisinage de 1.

L'existence d'un relèvement continu est donnée par le théorème de relèvement et il n'est pas difficile de montrer que si on a pris soin d'envoyer 0 sur 0, alors ce relèvement est aussi un homomorphisme. On est alors ramené à l'exercice suivant :

Lemme 2.6. *Tout homomorphisme continu de* $\mathbf{R}$ *dans lui-même est de la forme* $x \in \mathbf{R} \mapsto ax$*, pour* $a \in \mathbf{R}$*. Plus généralement, tout homomorphisme continu* $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *est une application* $\mathbf{R}$*-linéaire.*

Démonstration. Soit $\varphi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ un homomorphisme continu. Il suffit de vérifier que $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $x \in \mathbf{R}^n$. Soit $x \in \mathbf{R}^n$. Puisque φ est un homomorphisme, on a $\varphi(nx) = \varphi(x + \cdots + x) = \varphi(x) + \cdots + \varphi(x) = n\varphi(x)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, puis pour tout $n \in \mathbf{Z}$ puisque $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Si $\lambda = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ pour $p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0$, alors $q\varphi(\frac{p}{q}x) = \varphi(px) = p\varphi(x)$, i.e. $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{Q}$. On conclut par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$. $\square$

Théorème 2.7. *Tout homomorphisme continu de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{U}$ *est de la forme* $t \mapsto \exp(i\xi t)$ *pour un unique* $\xi \in \mathbf{R}$*. Plus précisement, le groupe dual* $\widehat{\mathbf{R}}$ *est isomorphe à* $\mathbf{R}$ *via*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{R}} \\ \xi & \longmapsto & (t \mapsto \exp(i\xi t)). \end{array}$$

Démonstration. Un homomorphisme continu $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{U}$ admet un unique relèvement continu $\tilde{\varphi}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ envoyant 0 sur 0 : le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R} \arrow[d, "\exp(i\cdot)"] \\ \mathbf{R} \arrow[ur, dashed, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbf{U} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Montrons que $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme de groupes. Si $t \in \mathbf{R}$ considérons les deux applications continues $t' \in \mathbf{R} \mapsto \tilde{\varphi}(t + t')$ et $t' \in \mathbf{R} \mapsto \tilde{\varphi}(t) + \tilde{\varphi}(t')$. Ce sont deux relèvements continus de $t' \in \mathbf{R} \mapsto \varphi(t)\varphi(t') = \varphi(t + t')$ qui prennent la même valeur $\tilde{\varphi}(t)$ en 0. Ils sont donc égaux, et $\tilde{\varphi}$ est donc un homomorphisme.

D'après le lemme 2.6, $\tilde{\varphi}$ est de la forme $t \mapsto \xi t$ pour un réel $\xi = \tilde{\varphi}(1)$. Donc φ est de la forme $t \mapsto \exp(i\xi t)$ pour un ξ uniquement déterminé (en effet, φ détermine uniquement $\tilde{\varphi}$ tel que $\tilde{\varphi}(0) = 0$, qui détermine ξ ; on peut aussi remarquer que ξ est égal à $-i\varphi'(0)$). $\square$

Si on a pris soin de munir $\widehat{\mathbf{R}}$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, l'isomorphisme précédent est en fait un homéomorphisme. De plus, son dual $\widehat{\widehat{\mathbf{R}}}$ est alors bien défini, et on a bien sûr le résultat suivant :

Corollaire 2.8. *Le groupe* $\mathbf{R}$ *est canoniquement isomorphe à son double dual : en effet* $\mathbf{R} \longrightarrow \widehat{\widehat{\mathbf{R}}}, t \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(t))$ *est un isomorphisme de groupes.*

Remarque 2.9. L'isomorphisme $\mathbf{R} \to \widehat{\mathbf{R}}$ permet de relier transformation de Fourier dans $L^2(\mathbf{R})$ et sur les groupes abéliens finis. Dans les deux cas, la transformée de Fourier d'un objet défini sur $G = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un objet défini sur le groupe dual. Si f est une fonction $G \to \mathbf{C}$, sa transformée de Fourier est

$$\widehat{f}\colon \chi \in \widehat{G} \longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} f(g).$$

De la même manière, la transformée de Fourier d'une fonction f dans $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ est définie par la somme sur $t \in \mathbf{R}$

$$\widehat{f}\colon \xi \in \mathbf{R} \simeq \widehat{\mathbf{R}} \longmapsto \int_{\mathbf{R}} \exp(-i\xi t) f(t) dt = \int_{\mathbf{R}} \overline{\exp(i\xi t)} f(t) dt.$$

Les formules d'inversion sont toutes deux obtenues comme des sommes sur les groupes duaux :

$$f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi)\chi \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi \in \mathbf{R}} \widehat{f}(\xi) \exp(i\xi\cdot) d\xi$$

(la seconde égalité ayant lieu dans $L^2(\mathbf{R})$).

2.10. **Arguments plus directs.**

Un argument plus élémentaire consiste à remarquer d'abord qu'un homomorphisme continu $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{U}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui permet de produire ensuite une équation différentielle satisfaite par φ. L'application φ étant continue et égale à 1 en 0, il existe $\delta > 0$ tel que $\int_0^\delta \varphi(u)du = c \neq 0$ (considérer la partie réelle de φ). On a alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $c\phi(t) = \int_0^\delta \varphi(u)\varphi(t)du = \int_0^\delta \varphi(u+t)du = \int_t^{t+\delta} \varphi(u)du$, de sorte que $c\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et donc φ aussi puisque c est non nul.

En dérivant par rapport à u la relation $\varphi(t+u) = \varphi(t)\varphi(u)$ on obtient $\varphi'(t+u) = \varphi(t)\varphi'(u)$ d'où, en $u = 0$, $\varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t)$. On a donc $\varphi(t) = \varphi(0)\exp(at)$ où $a = \varphi'(0)$. La constante $\varphi(0)$ est égale à 1 puisque φ est un homomorphisme, et $a \in i\mathbf{R}$ puisque φ est à valeurs dans $\mathbf{U}$: on a donc $\varphi = \exp(i\xi\cdot)$ avec $\xi \in \mathbf{R}$, comme annoncé.

Une autre idée (à première vue très simple, mais finalement assez exigeante) est de considérer le noyau d'un homomorphisme continu $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{U}$. C'est un sous-groupe fermé de $\mathbf{R}$, ce qui nous amène au résultat classique suivant :

Lemme 2.11. *Un sous-groupe de $\mathbf{R}$ est ou bien dense, ou bien de la forme $a\mathbf{Z}$, pour $a \in \mathbf{R}$.*

Démonstration. Soit G un sous-groupe de $\mathbf{R}$ non réduit à $\{0\}$. Soit $a = \inf\{t \in G, t > 0\}$. Si $a = 0$ alors G est dense. Sinon $a > 0$, et on montre d'abord que a appartient à G, puis qu'il engendre G. □

Le noyau $\ker\varphi$ est donc ou bien égal à $\mathbf{R}$ tout entier (auquel cas φ est constant), ou de la forme $a\mathbf{Z}$. Dans le second cas, φ identifie $\mathbf{U}$ au quotient $\mathbf{R}/a\mathbf{Z}$ de $\mathbf{R}$ par $a\mathbf{Z}$: en effet, comme $\ker\varphi = a\mathbf{Z}$, il suffit de vérifier que φ est surjective. Mais l'image de φ est un sous-groupe non trivial de $\mathbf{U}$ connexe et compact (comme image continue du compact $[0, a]$ dans $\mathbf{U}$ qui est séparé). Or, les sous-groupes fermés de $\mathbf{U}$ distincts de $\mathbf{U}$ étant finis (cf lemme 3.7), l'image de φ est $\mathbf{U}$ tout entier.

On déduit par ailleurs un isomorphisme explicite entre le quotient $\mathbf{R}/a\mathbf{Z}$ et $\mathbf{U}$ du morphisme surjectif $\pi_a\colon t \in \mathbf{R} \mapsto \exp(\frac{2\pi i}{a}t)$. On est donc dans la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_a"'] & \mathbf{U} \\ \mathbf{U} \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

où $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme de groupes. Le point un peu délicat est de montrer que $\bar{\varphi}$ est aussi continu [10]. La continuité (qui est tautologique si on parle de topologie quotient) se vérifie ici directement : l'application π_a est ouverte (i.e. envoie tout ouvert de $\mathbf{R}$ sur un ouvert de $\mathbf{U}$), de sorte que pour tout ouvert $U \subset \mathbf{U}$, $\bar{\varphi}^{-1}(U) = \pi_a(\varphi^{-1}(U))$ est ouvert. Il résulte alors du théorème 3.4 que $\bar{\varphi}$ est l'identité ou la conjugaison, de sorte que $\varphi = \bar{\varphi}\pi_a$ est effectivement de la forme $t \mapsto \exp(\pm\frac{2\pi i}{a}t)$.

2.12. **Homomorphismes continus de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}^*$.** On peut décrire au passage les homomorphismes continus de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}^*$. Puisque $\mathbf{C}^*$ est isomorphe à $\mathbf{R}\times\mathbf{U}$, tout homomorphisme continu $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}^*$ est de la forme $\varphi = \varphi_{\mathbf{R}}\varphi_{\mathbf{U}}$ où φ_R est un homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, donc de la forme $t \mapsto at$ avec $a \in \mathbf{R}$, et $\varphi_{\mathbf{U}}$ un homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{U}$, donc de la forme $t \mapsto \exp(ibt)$ avec $b \in \mathbf{R}$. Finalement, on a montré :

Proposition 2.13. *Tout homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}^*$ est de la forme $t \mapsto \exp(tz)$ pour un $z \in \mathbf{C}$.*

Remarque 2.14. Il est en fait préférable de démontrer cet énoncé en utilisant le théorème de relèvement pour les fonctions à valeurs dans $\mathbf{C}^*$, en vérifiant que le relèvement de $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}^*$ envoyant 0 sur 0 est un homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, donc de la forme $t \mapsto zt$.

Remarque 2.15. On peut plus généralement décrire les homomorphismes continus $\mathbf{R} \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ (appelés *sous-groupes à un paramètre*), par exemple à l'aide du théorème d'inversion locale : ce sont les homomorphismes de la forme $t \mapsto \exp(tA)$ où $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, où exp désigne l'exponentielle matricielle.

3. Caractères de $\mathbf{U}$

Il est très facile de déduire de l'étude de $\widehat{\mathbf{R}}$ quels sont les homomorphismes continus de $\mathbf{U}$ dans lui-même. Nous donnons plus bas un argument plus direct.

10. Alors $\bar{\varphi}$ est même un homéomorphisme. En effet, toute bijection continue entre deux compacts est un homéomorphisme, car l'image d'un fermé est fermée.

Théorème 3.1. *Tout homomorphisme continu de* $\mathbf{U}$ *dans* $\mathbf{U}$ *est de la forme* $z \mapsto z^k$ *pour un unique* $k \in \mathbf{Z}$. *Plus précisement, le groupe dual* $\widehat{\mathbf{U}}$ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}$ *via*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{U}} \\ k & \longmapsto & (z \mapsto z^k). \end{array}$$

Démonstration. Soit $\varphi\colon \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ un homomorphisme continu. Soit $\psi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{U}$ l'homomorphisme continu $\psi = \varphi \circ \exp(i\cdot)$ obtenu en composant φ et l'exponentielle complexe $\exp(i\cdot)\colon \mathbf{R} \to \mathbf{U}$. D'après le théorème 2.7, il existe un unique $\xi \in \mathbf{R}$ tel que $\psi(t) = \exp(i\xi t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. En particulier $1 = \psi(2\pi) = \exp(2i\pi\xi)$, ce qui entraîne $\xi \in \mathbf{Z}$. Donc en posant $\xi = k$ on a $\varphi(\exp(it)) = \psi(t) = \exp(ikt) = \exp(it)^k$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, i.e. $\varphi(z) = z^k$ pour tout $z \in \mathbf{U}$. □

On peut résumer la démarche par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & & \mathbf{R} \arrow[d, "\exp(i\cdot)"] \\ \mathbf{R} \arrow[urr, dashed, "\tilde{\psi}"] \arrow[r, "\exp(i\cdot)"] \arrow[rr, bend right, "\psi"'] & \mathbf{U} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbf{U} \end{tikzcd}$$

où l'homomorphisme continu φ induit un homomorphisme ψ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{U}$, que l'on relève en un homomorphisme continu $\tilde{\psi}$ (qui est l'unique relèvement continu de ψ envoyant 0 sur 0). Cet homomorphisme est linéaire, de la forme $t \mapsto \xi t$, et il ne reste plus qu'à remarquer que ξ appartient à $\mathbf{Z}$.

Remarque 3.2. Muni de la topologie de la convergence uniforme, $\widehat{\mathbf{U}}$ est un groupe topologique discret ; autrement dit, l'isomorphisme $\mathbf{Z} \to \widehat{\mathbf{U}}$ est un isomorphisme de groupes topologiques.

D'autre part, le groupe $\widehat{\mathbf{Z}}$ des caractères unitaires de $\mathbf{Z}$ est naturellement isomorphe à $\mathbf{U}$, puisque, $\mathbf{Z}$ étant monogène, $\widehat{\mathbf{Z}} \to \mathbf{U}, \varphi \mapsto \varphi(1)$ est un isomorphisme de groupes. De plus, si on munit $\widehat{\mathbf{Z}}$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, cet isomorphisme est également un homéomorphisme. On obtient de la manière habituelle des isomorphismes de groupes topologiques :

$$\mathbf{U} \xrightarrow{\sim} \widehat{\widehat{\mathbf{U}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \widehat{\widehat{\mathbf{Z}}}.$$

On retrouve ainsi, comme dans la remarque 2.9, un lien entre transformée de Fourier sur les groupes abéliens finis et séries de Fourier : on associe à une fonction périodique f, i.e. définie sur $\mathbf{U}$, une série de Fourier, i.e une fonction $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbf{Z}}$ définie sur $\mathbf{Z}$ par

$$\widehat{f}\colon n \in \mathbf{Z} \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{U}} e^{-int} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{U}} \overline{e^{int}} f(t)dt$$

(les coefficients de Fourier $(\widehat{f}(n))_n$ sont habituellement notés $(c_n(f))_n$). La formule d'inversion exprime alors f comme somme (dans $L^2(\mathbf{U})$) de sa série de Fourier, i.e. comme la somme sur $\widehat{\mathbf{U}} \simeq \mathbf{Z}$

$$f = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n) e^{in\cdot}.$$

3.3. **Automorphismes du cercle.** On est alors en mesure de déterminer le groupe des automorphismes continus de $\mathbf{U}$. Le cercle $\mathbf{U}$ possède deux automorphismes continus évidents, qui sont l'identité et la conjugaison $z \mapsto \bar{z}$. Il n'y en a pas d'autre.

Théorème 3.4. *Les seuls automorphismes continus de* $\mathbf{U}$ *sont l'identité et la conjugaison complexe.*

Avant de démontrer cet énoncé, il est bon de rappeler qu'un tel automorphisme continu est automatiquement un homéomorphisme : plus généralement, toute bijection continue φ d'un compact sur un compact est un homéomorphisme (en effet, φ^{-1} est continue, puisque l'image par φ d'un fermé est fermée).

Démonstration. Le résultat est une conséquence du théorème 3.4 : un automorphisme continu de $\mathbf{U}$ est de la forme $z \mapsto z^k$ pour $k \in \mathbf{Z}$, et un tel homomorphisme n'est injectif que si $k = 1$ ou -1. $\square$

Remarque 3.5 (Démonstration directe)**.** En voici une démonstration élémentaire et plutôt amusante, utilisant quelques propriétés de connexité et de densité de $\mathbf{U}$.

Soit $\varphi\colon \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ un isomorphisme de groupes continu. L'image $\varphi(i)$ de i est un élément de $\mathbf{U}$ d'ordre 4, et ne peut donc être égal qu'à i ou $-i$.

Supposons d'abord que $\varphi(i) = i$, et montrons alors que $\varphi = \mathrm{id}$. Pour ce faire, montrons d'abord que $\varphi(\exp \frac{2i\pi}{2^n}) = \exp \frac{2i\pi}{2^n}$ pour tout entier positif n.

Notons que $\mathbf{U} \setminus \{1, i\}$ est l'union disjointe de deux composantes connexes (par arcs) C_+ et C_-, où C_- désigne la composante connexe contenant -1. Puisque $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(i) = i$, l'image de C_- par la bijection continue φ est la composante connexe de $\mathbf{U} \setminus \{1, i\}$ contenant $\varphi(-1) = -1$. On a donc $\varphi(C_-) = C_-$, et $\varphi(C_+) = C_+$. Comme $\exp(\frac{i\pi}{4})$ est l'unique élément d'ordre 8 contenu dans C_+, on en déduit que $\varphi(\exp \frac{i\pi}{4}) = \exp \frac{i\pi}{4}$.

On conclut par récurrence sur n : si $\varphi(\exp \frac{i\pi}{2^n}) = \exp \frac{i\pi}{2^n}$, il suffit de remarquer que $\exp \frac{i\pi}{2^{n+1}}$ est l'unique élément d'ordre 2^{n+2} contenu dans la composante connexe de $\mathbf{U} \setminus \{1, \exp \frac{i\pi}{2^n}\}$ ne contenant pas -1. Comme φ envoie cette composante sur elle-même, on en déduit que $\varphi(\exp \frac{i\pi}{2^{n+1}}) = \exp \frac{i\pi}{2^{n+1}}$.

On en déduit que $\varphi(\exp \frac{2ik\pi}{2^n}) = \exp \frac{2ik\pi}{2^n}$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et tout $n \in \mathbf{N}$. Le sous-groupe $\{\exp \frac{2ik\pi}{2^n}, k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$ étant dense dans $\mathbf{U}$ et φ étant continue, on a $\varphi = \mathrm{id}$.

Si $\varphi(i) = -i$, alors $\bar{\varphi}$ est un homomorphisme continu fixant i. On a donc $\bar{\varphi} = \mathrm{id}$, ce qui signifie que φ est la conjugaison complexe.

3.6. **Sous-groupes de U.**

Nous donnons ici quelques résultats importants sur les sous-groupes de $\mathbf{U}$. Nous en profitons pour montrer, à titre de curiosité, comment en déduire directement la description des caractères de $\mathbf{U}$.

Lemme 3.7. *Un sous-groupe de* $\mathbf{U}$ *est ou bien fini, ou bien dense. S'il est fini, il est cyclique, égal au groupe* μ_n *des racines* n*-ièmes de l'unité.*

Démonstration. L'image inverse d'un sous-groupe H de U par l'exponentielle complexe $\exp(i\cdot)\colon \mathbf{R} \to \mathbf{U}$ est d'après 2.11 ou bien dense, auquel cas son image H est également dense dans $\mathbf{U}$, ou bien de la forme $a\mathbf{Z}$, avec $a = \frac{2\pi}{n}$ (puisque $a\mathbf{Z} \supset 2\pi\mathbf{Z}$), auquel cas H est fini, égal à μ_n.

Un argument plus direct (i.e. sans passer par $\mathbf{R}$) consiste à remarquer qu'un sous-groupe infini $H \subset \mathbf{U}$ contient des éléments arbitrairement proches de 1. En effet, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, on peut partager $\mathbf{U}$ en N arcs $[e^{\frac{2k\pi}{N}}, e^{\frac{2(k+1)\pi}{N}}]$, $k = 0, \ldots, N-1$, de longueur $2\pi/N$. Puisque H est infini, l'un au moins de ces arcs contient deux éléments distincts h et h' de H, et $h_N = h'h^{-1}$ est un élément de $H \setminus \{1\}$ vérifiant $d(h_N, 1) \leqslant 2\pi/N$ (on peut bien sûr être un peu plus précis : $d(h_n, 1) = |h_n - 1| \leqslant \sin(2\pi/N)$). On en déduit que H est dense : en effet, tout $z \in \mathbf{U}$ est contenu pour tout N dans un arc de longueur $\leqslant 2\pi/N$ de la forme $[h_N^k, h_N^{k+1}]$, ce qui signifie que $d(z, H) \leqslant \pi/N$ pour tout $N \in \mathbf{N}^*$.

Reste alors à vérifier qu'un sous-groupe fini est cyclique. Mais un sous-groupe fini d'ordre n est constitué de racines n-ièmes de l'unité, i.e est contenu dans μ_n. Comme μ_n est aussi d'ordre n, on a égalité. $\square$

Remarque 3.8. De manière générale, tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif k^* d'un corps (commutatif) k est cyclique. Si $k = \mathbf{C}$, c'est immédiat comme on vient de le voir (le point étant que $\mathbf{C}$ contient n racines n-ièmes de l'unité).

Lemme 3.9. *Soit* $\alpha \in \mathbf{R}$*. Le sous-groupe* $\langle e^{i\alpha} \rangle = \{e^{in\alpha}, n \in \mathbf{Z}\}$ *engendré par* $e^{i\alpha}$ *est dense si et seulement si* $\alpha \notin \pi\mathbf{Q}$*.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, il suffit de vérifier que $\langle e^{i\alpha} \rangle$ est fini si et seulement si α/π est rationnel, ce qui est immédiat.

Voici un argument qui n'utilise pas explicitement le lemme précédent : l'image inverse du sous-groupe $\langle e^{i\alpha}\rangle$ par $\exp(i\cdot)\colon \mathbf{R}\to\mathbf{U}$ est le sous-groupe $\mathbf{Z}\alpha+\mathbf{Z}2\pi\subset\mathbf{R}$ engendré par α et 2π. Ce sous-groupe est d'après 2.11 ou bien dense dans $\mathbf{R}$, auquel cas $\langle e^{i\alpha}\rangle$ est dense dans $\mathbf{U}$, ou bien de la forme $\mathbf{Z}a$, auquel cas $2\pi=na$, $\alpha=ma=2\pi m/n$, et $\langle e^{i\alpha}\rangle$ est d'ordre au plus n. Il reste à remarquer que $\mathbf{Z}\alpha+\mathbf{Z}2\pi$ est monogène si et seulement si $\alpha/\pi\in\mathbf{Q}$ (si $\alpha/2\pi=m/n$ avec $(m,n)=1$, alors $\mathbf{Z}\alpha+\mathbf{Z}2\pi=\mathbf{Z}a$ avec $a=\frac{\alpha}{m}=\frac{2\pi}{n}$). $\square$

Des exemples de sous-groupes denses non monogènes sont le sous-groupe $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\mu_n$ des racines de l'unité, ou encore le sous-groupe $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\mu_{2^n}$ des racines de l'unité d'ordre une puissance de 2 déjà rencontré en 3.5.

3.10. **Démonstration de $\widehat{\mathbf{U}}\simeq\mathbf{Z}$ en utilisant le sous-groupe dense $\bigcup_n\mu_n$.** Soit $\varphi\colon\mathbf{U}\to\mathbf{U}$ un caractère de $\mathbf{U}$. Pour tout $n\geqslant 1$, sa restriction φ_n à μ_n est un caractère de μ_n : il existe donc un entier k_n (bien défini modulo n) tel que $\varphi_n(\zeta)=\zeta^{k_n}$ pour tout $\zeta\in\mu_n$. Montrons que ce k_n ne dépend en fait pas de n, i.e. qu'il existe un entier $k\in\mathbf{Z}$ tel que $k_n=k \mod n$ pour tout n.

Il existe $\delta\in]0,1[$ tel que le voisinage ouvert connexe $U=\{z\in\mathbf{U},\operatorname{Re}z>1-\delta\}$ de 1 vérifie $\varphi(U)\subset\mathbf{U}\setminus\{-1\}$, de sorte que $z\in U\mapsto\operatorname{Log}\varphi(z)$ existe et est continue sur U (où Log désigne toujours le logarithme complexe). Cela signifie simplement qu'un argument continu de $\varphi(z)$ reste contenu dans $]-\pi,\pi[$. Soit U' l'ouvert connexe $U'=U\cap\{z,\operatorname{Im}z>0\}$. Pour tout $\zeta\in U'\cap\mu_n$, $\frac{\operatorname{Log}\varphi(\zeta)}{\operatorname{Log}\zeta}$ est alors un entier relatif congru à k_n modulo n (plus précisement, c'est l'unique entier congru à k_n modulo n compris entre $-n/2$ et $n/2$). La fonction $z\mapsto\frac{\operatorname{Log}\varphi(z)}{\operatorname{Log}z}$ est continue sur le connexe U', et prend en tout point de la partie dense $\Omega=U'\cap\bigcup_n\mu_n$ des valeurs entières. Elle est donc constante sur U', égale à $k\in\mathbf{Z}$. En remarquant qu'il existe N tel que $\zeta_n=\exp(\frac{2i\pi}{n})$ appartient à Ω pour tout $n\geqslant N$, on en déduit que $\varphi(z)=z^k$ pour tout $z\in\bigcup_{n\geqslant N}\mu_n=\bigcup_n\mu_n$, donc pour tout $z\in\mathbf{U}$ puisque $\bigcup_n\mu_n$ est dense et φ continue.

3.11. **Démonstration de $\widehat{\mathbf{U}}\simeq\mathbf{Z}$ en utilisant un sous-groupe dense monogène.** L'idée est très simple : de la même manière qu'un caractère de $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est déterminé par l'image d'un générateur, un homomorphisme continu $\mathbf{U}\to\mathbf{U}$ doit être déterminé par l'image de tout élément engendrant un sous-groupe dense. Cependant, la mise en œuvre de cette idée utilise la caractérisation des sous-groupes monogènes denses de $\mathbf{U}^n$: dans le cas qui nous intéresse, $(e^{i\alpha},e^{i\beta})\in\mathbf{U}\times\mathbf{U}$ engendre un sous-groupe dense dans $\mathbf{U}\times\mathbf{U}$ si et seulement si α, β et 2π forment une famille libre sur $\mathbf{Q}$ (autrement dit s'ils sont « rationnellement indépendants »). En effet, le sous-groupe engendré par $(e^{i\alpha},e^{i\beta})$ est dense dans $\mathbf{U}\times\mathbf{U}$ si et seulement si son image inverse dans $\mathbf{R}^2$, c'est-à-dire le sous-groupe engendré par (α,β), $(2\pi,0)$ et $(0,2\pi)$, est dense dans $\mathbf{R}^2$, et on conclut à l'aide de Bourbaki [1, VII §1 n°3, Cor. 2 de Prop. 7] [11]. On peut bien sûr en extraire un énoncé ad hoc suffisant pour ce que l'on veut en faire ici : si le groupe engendré par $(e^{i\alpha},e^{i\beta})$ n'est ni dense, ni discret, alors α, β et 2π sont rationnellement dépendants [12].

Soit $\varphi\colon\mathbf{U}\to\mathbf{U}$ un homomorphisme continu. Soit donc $\alpha\in\mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Q}$, de sorte que $e^{i\alpha}$ engendre un sous-groupe dense de $\mathbf{U}$. Son image par φ est $\varphi(e^{i\alpha})=e^{i\beta}$. Il s'agit de montrer que $\beta\in\mathbf{Z}\alpha+\mathbf{Z}2\pi$.

Le sous-groupe engendré par $(e^{i\alpha},e^{i\beta})$ ne peut être dense dans $\mathbf{U}\times\mathbf{U}$, puisque, pour toute suite $(m_k)_k$ d'entiers, $e^{im_k\beta}=\varphi(e^{im_k\alpha})$ tend vers 1 dès que $e^{im_k\alpha}$ tend vers 1. D'après le résultat rappelé plus haut, α, β et 2π satisfont une relation de dépendance linéaire sur $\mathbf{Q}$, i.e. il existe des entiers m, n et p tels que $m\alpha+n\beta+2p\pi=0$. Comme $\alpha\notin\pi\mathbf{Q}$, n est non nul. On peut alors remarquer que l'homomorphisme continu $z\mapsto z^m\varphi(z)^n$ vaut 1 en $e^{i\alpha}$, donc partout puisque le sous-groupe engendré $e^{i\alpha}$ est dense. En évaluant en $z=e^{\frac{2i\pi}{n}}$, on obtient $m=kn$, d'où $\varphi(z)=z^{-k}$ pour tout $z\in\mathbf{U}$ (puisque $z\mapsto z^k\varphi(z)$ est continue de $\mathbf{U}$ dans μ_n, et prend la valeur 1 en 1).

---

11. La démonstration de ce résultat repose sur la description des sous-groupes fermés de $\mathbf{R}^n$ et un joli argument de dualité, utilisant le sous-groupe associé (ou dual) $H^*=\{x\in\mathbf{R}^n,\langle x,h\rangle=\sum_i x_ih_i\in\mathbf{Z}$ pour tout $h\in H\}$ d'un sous-groupe H de $\mathbf{R}^n$.

12. En effet, soit $H\subset\mathbf{R}^2$ l'adhérence de l'image inverse par $(t_1,t_2)\mapsto(e^{it_1},e^{it_2})$ du sous-groupe de $\mathbf{U}$ engendré par $(e^{i\alpha},e^{i\beta})$. C'est d'après les hypothèses un sous-groupe fermé non discret de $\mathbf{R}^2$, distinct de $\mathbf{R}^2$. Montrons d'abord qu'un tel sous-groupe contient une unique droite vectorielle L, puis qu'il s'écrit $H=L\oplus\mathbf{Z}v$ où v est orthogonal à L.

Le sous-groupe H étant distinct de $\mathbf{R}^2$, il contient au plus une droite vectorielle.

Par ailleurs, tout sous-groupe fermé non discret de $\mathbf{R}^n$ contient une droite vectorielle. Cela résulte d'un très simple argument de compacité : dire que le sous-groupe H est non discret équivaut à dire que 0 n'est pas isolé dans H. Soit alors $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments non nuls de H tendant vers 0. La suite $(h_n/|h_n|)$ admet une valeur d'adhérence a. Pour montrer que la droite $\mathbf{R}a$ est contenue dans le sous-groupe fermé H, il suffit de montrer que $\frac{1}{k}a\in H$ pour tout $k\in\mathbf{N}^*$. Mais, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier N tel que $|a-h_N/|h_N||<\varepsilon$ et $|h_N|<\varepsilon$. La seconde inégalité assure l'existence d'un entier m_N tel que $|h_N/(k|h_N|)-m_Nh_N|<\varepsilon$ (par exemple $m_N=[1/(k|h_N|)]$), qui vérifie alors $|a/k-m_Nh_N|<2\varepsilon$. Ainsi a/k est adhérent au sous-groupe fermé H, donc lui appartient.

Le sous-groupe H est donc une union de droites affines parallèles à L : en effet, si p est la projection orthogonale sur la droite $L^\perp$ orthogonale à L, alors $H=L\oplus p(H)$, et, $p(H)$ étant un sous-groupe fermé strict de la droite $L^\perp$, il est monogène, égal à $\mathbf{Z}v$ pour un vecteur v orthogonal à L. Dans notre situation, on peut ajouter que ce vecteur est non nul, puisque H contient $(2\pi,0)$ et $(0,2\pi)$.

Finalement on a écrit H comme l'ensemble des vecteurs $h\in\mathbf{R}^2$ tels que $\langle h,v\rangle\in\mathbf{Z}$. Puisque (α,β), $(2\pi,0)$ et $(0,2\pi)$ appartiennent à H, on obtient, en notant $v=(x,y)$, les trois relations $x\alpha+y\beta=p$, $x2\pi=m$ et $y2\pi=n$ avec m, n, p entiers, d'où la relation attendue $m\alpha+n\beta=p2\pi$.

3.12. **Démonstration de $\widehat{\mathbf{U}} \simeq \mathbf{Z}$ en considérant le noyau d'un caractère.** Une nouvelle fois, l'idée est très simple : le noyau d'un caractère de $\mathbf{U}$ est un sous-groupe fermé de $\mathbf{U}$, donc est fini si le caractère est non trivial. Pour mener à bien ce raisonnement, on a toutefois besoin d'avoir décrit a priori les automorphismes continus du cercle, comme on l'a fait en 3.5.

Soit donc $\varphi\colon \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ un caractère non trivial. Son noyau $\ker\varphi$ est un sous-groupe fermé strict, donc est égal à μ_n pour un entier n. De plus φ est surjectif, puisque son image est un sous-groupe fermé (car image continue d'un compact) infini de $\mathbf{U}$. L'homomorphisme φ identifie donc le quotient $\mathbf{U}/\mu_n$ à $\mathbf{U}$.

Considérons l'application $\pi_n\colon z \in \mathbf{U} \mapsto z^n \in \mathbf{U}$ qui identifie également $\mathbf{U}/\mu_n$ à $\mathbf{U}$. On a alors

$$\begin{tikzcd} \mathbf{U} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_n"'] & \mathbf{U} \\ \mathbf{U} \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

où $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme de groupes, qui est également continu, par exemple puisque l'image inverse d'un fermé F de $\mathbf{U}$ est $\bar{\varphi}^{-1}(F) = \pi_n(\varphi^{-1}(F))$ qui est fermée comme image continue du compact $\varphi^{-1}(F) \subset \mathbf{U}$ (toute application continue entre compacts est automatiquement fermée, i.e. l'image de tout fermé est fermée). D'après le théorème 3.4 (établi comme en 3.5 donc), $\bar{\varphi}$ est donc ou bien l'identité, ou bien la conjugaison complexe, de sorte que φ est $z \mapsto z^n$ ou $z \mapsto z^{-n}$, comme attendu.

4. Caractères holomorphes de $\mathbf{C}^*$

L'isomorphisme entre $\mathbf{C}^*$ et $\mathbf{R} \times \mathbf{U}$ permet de décrire, à l'aide des résultats précédents, les caractères de $\mathbf{C}^*$. En effet, un homomorphisme continu φ de $\mathbf{C}^*$ dans $\mathbf{U}$ correspond donc au produit d'un caractère $\mathbf{R} \to \mathbf{U}, t \mapsto \exp i\xi t$ de $\mathbf{R}$ et d'un caractère de $\mathbf{U} \to \mathbf{U}, z \mapsto z^k$ de $\mathbf{U}$, où $\xi \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{Z}$. Plus explicitement on a $\varphi(z) = \exp(i\xi \log|z|)(\frac{z}{|z|})^k$.

On peut montrer de la même manière que tout homomorphisme continu de $\mathbf{C}^*$ dans lui-même est de la forme $\varphi\colon z \in \mathbf{C}^* \mapsto \exp(a \log|z|)(\frac{z}{|z|})^k$ avec $a \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{Z}$. On a donc montré

Proposition 4.1. *Tout homomorphisme continu de $\mathbf{C}^*$ dans lui-même est de la forme $z \mapsto |z|^a z^k$ avec $a \in \mathbf{C}$ et $k \in \mathbf{Z}$. En particulier, tout caractère unitaire de $\mathbf{C}^*$ est de la forme $z \mapsto |z|^{i\xi}(\frac{z}{|z|})^k$ avec $\xi \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{Z}$.*

Remarque 4.2. Il est plus naturel d'obtenir ce résultat directement à l'aide du théorème de relèvement : si $\varphi\colon \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ est un homomorphisme continu, considérons $\psi = \varphi \circ \exp\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$, et $\tilde{\psi}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ son relèvement continu envoyant 0 sur 0, i.e. l'unique application continue $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ vérifiant $\psi = \exp\tilde{\psi}$ et $\tilde{\psi}(0) = 0$. Cela entraîne comme dans la démonstration de 2.7 que $\tilde{\psi}$ est un homomorphisme continu. C'est donc une application $\mathbf{R}$-linéaire de $\mathbf{C}$ dans lui-même, dont on sait de plus qu'elle admet i pour vecteur propre, associé à une valeur propre entière $k \in \mathbf{Z}$, puisque $\tilde{\psi}(2i\pi\mathbf{Z})$ est contenu dans $\exp^{-1}(\psi(2i\pi\mathbf{Z})) = \exp^{-1}(\{1\}) = 2i\pi\mathbf{Z}$. On a donc $\psi(x+iy) = \psi(1)x + iky$ pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, d'où $\varphi(z) = |z|^{\psi(1)}(\frac{z}{|z|})^k$.

Dans certains contextes (groupes algébriques, algèbres de Lie complexes...), on est amené à considérer également les caractères $\mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ qui sont de plus *holomorphes*.

Théorème 4.3. *Tout homomorphisme holomorphe $\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}^*$ est de la forme $z \mapsto z^k$ avec $k \in \mathbf{Z}$.*

Démonstration. C'est en fait un corollaire de la proposition précédente. En effet, $z \in \mathbf{C}^* \mapsto |z|^a z^k$ est holomorphe si et seulement si $z \mapsto |z|^a$ l'est, ce qui n'est possible que si $a = 0$ (par exemple parce qu'une application holomorphe non constante est ouverte).

L'argument direct suivant est nettement préférable : soit $\varphi\colon \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ est un homomorphisme holomorphe. En dérivant la relation $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$, on obtient $z\varphi'(zz') = \varphi(z)\varphi'(z')$, d'où, pour $z' = 1$,

$$z\varphi'(z) = \varphi'(1)\varphi(z) \text{ pour tout } z \in \mathbf{C}^*.$$

Remarquons que $\varphi'(1)$ est un entier. En effet, si Γ désigne le cercle de centre 0 et de rayon 1,

$$\varphi'(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi'(1)}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz \in \mathbf{Z}$$

(puisque c'est l'indice par rapport à 0 du lacet $t \in [0,1] \mapsto \varphi(e^{2\pi i t})$) [13]. Il suffit alors de remarquer que, si $k = \varphi'(1)$, la dérivée de $z \mapsto \varphi(z)z^{-k}$ est nulle.

(Si l'on veut éviter de parler de l'indice d'un lacet, on peut considérer l'homomorphisme continu $\psi = \varphi \circ \exp\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$. En dérivant la relation $\psi(z+z') = \psi(z)\psi(z')$ on obtient $\psi'(z) = \psi'(0)\psi(z)$ d'où $\psi(z) = \exp(\psi'(0)z)$ pour tout z. Mais puisque $\psi(2\pi i) = 1$, $\psi'(0) = k \in \mathbf{Z}$, et $\varphi(\exp z) = (\exp z)^k$ pour tout $z \in \mathbf{C}$, comme attendu.) □

Remarque 4.4. On peut démontrer directement ce résultat en procédant comme dans la remarque 4.2 et en notant que le relèvement $\tilde{\psi}$ de ψ est holomorphe. En effet, ψ l'est comme composée de fonctions holomorphes, et, puisque exp est un biholomorphisme local, l'égalité $\exp \tilde{\psi} = \psi$ assure que $\tilde{\psi}$ l'est aussi [14]. Mais un homomorphisme $\tilde{\psi}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorphe a une dérivée constante (en dérivant la relation $\tilde{\psi}(z+z') = \tilde{\psi}(z) + \tilde{\psi}(z')$, on a $\tilde{\psi}'(z+z') = \tilde{\psi}'(z)$), donc est de la forme $z \mapsto az$ avec $a \in \mathbf{C}$, et on conclut en rappelant que $\tilde{\psi}(2i\pi) \in 2i\pi\mathbf{Z}$.

5. Caractères du groupe unitaire $\mathbf{U}(n)$

Le groupe unitaire $\mathbf{U}(n) = \{A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C}), AA^* = \mathbf{I}_n\}$ étant compact, ses caractères sont automatiquement unitaires. Le déterminant $\det\colon \mathbf{U}(n) \to \mathbf{U}$ et ses puissances

$$A \in \mathbf{U}(n) \mapsto (\det A)^k$$

définissent naturellement des caractères de $\mathbf{U}(n)$. Ce sont les seuls.

Théorème 5.1. *Tout caractère du groupe unitaire $\mathbf{U}(n)$ est de la forme*

$$A \in \mathbf{U}(n) \longmapsto (\det A)^k$$

pour un entier $k \in \mathbf{Z}$.

Démonstration. Rappelons que toute matrice unitaire est diagonalisable dans une base orthonormale [15] : pour toute matrice $A \in \mathbf{U}(n)$, il existe une matrice diagonale $D \in \mathbf{U}(n)$ et une matrice $P \in \mathbf{U}(n)$ telles que $A = PDP^{-1}$. Un caractère φ de $\mathbf{U}(n)$ est donc déterminé par sa restriction au sous-groupe H des matrices unitaires diagonales, puisque, $\mathbf{U}$ étant abélien, $\varphi(PDP^{-1}) = \varphi(D)$.

Comme les valeurs propres d'une matrice unitaire sont des nombres complexes de module 1, le sous-groupe H est isomorphe à $\mathbf{U}^n$, par $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{U}^n \mapsto \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. La restriction de φ à H est donc un produit $\varphi_{|H}\colon (\operatorname{diag}(\lambda_i)) \mapsto \prod_i \varphi_i(\lambda_i)$ de caractères de $\mathbf{U}$ qui, d'après 3.1, s'écrit

$$\varphi_{|H}(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \prod_i \lambda_i^{k_i} \quad \text{avec} \quad k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{Z}.$$

---

13. Rappelons en la démonstration : si le lacet Γ est paramétré par $\gamma\colon [0,1] \to \mathbf{C}$, son indice $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-a}$ par rapport à un point $a \notin \Gamma$ est entier. Considérons la fonction $\psi\colon t \in [0,1] \mapsto \exp \int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-a} du$, dont la dérivée vérifie $\psi' = \frac{\gamma'}{\gamma - a}\psi$. La fonction $\frac{\psi}{\gamma - a}$ est donc constante, de sorte que $\psi(1) = \psi(0) = 1$, i.e. $\int_\Gamma \frac{dz}{z} \in 2\pi i\mathbf{Z}$.

14. On pourrait aussi simplement dire que $\tilde{\psi}$ est le logarithme holomoprhe de ψ, qui existe bien puisque ψ est une fonction définie sur un ouvert simplement connexe (étoilé suffit) qui ne s'annule pas.

15. Ce théorème de réduction, ou « théorème spectral », qui concerne tous les endomorphismes normaux d'un espace hermitien, est l'un des plus simples qui soient. En effet, il n'utilise que les propriétés élémentaires de l'orthogonalité (stabilité de l'orthogonal, existence de bases orthonormales). Rappelons qu'un endomorphisme u d'un espace hermitien de dimension finie E est dit normal s'il commute avec son adjoint : $u \circ u^* = u^* \circ u$. Montrons qu'il existe alors une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u. Puisqu'on est sur $\mathbf{C}$, u admet une valeur propre λ. Soit $F = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id})$ le sous-espace propre associé. Si $F = E$, toute base orthonormale de E convient. Considérons le supplémentaire orthogonal $F^\perp$ de F. On vérifie que c'est un sous-espace stable par u, et que la restriction de u à $F^\perp$ est encore normale. On conclut alors par récurrence sur la dimension.

Voici un argument plus court. Remarquons que si u est normal, alors $\ker u^2 = \ker u$. Cela résulte de l'égalité $\|u^2(x)\| = \|u^*u(x)\|$ pour tout $x \in E$: si $x \in \ker u^2$, alors $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle u^*u(x), x\rangle = 0$. Puisque $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est normal pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on en déduit que les sous-espaces propres sont égaux aux sous-espaces caractéristiques, i.e. que u est diagonalisable (on peut aussi remarquer que l'égalité $\ker u^2 = \ker u$ assure que tout endomorphisme normal nilpotent est nul, et conclure à l'aide de la décomposition de Dunford).

Pour montrer que $k_i = k_j$ pour tout i, j, remarquons que la matrice de permutation M_σ associée à la permutation σ (définie par $(M_\sigma)_{ij} = 1$ si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon) est unitaire, et agit sur H par conjugaison (en permutant les coefficients diagonaux bien sûr). On a alors

$$\prod_i \lambda_i^{k_i} = \varphi(\operatorname{diag}(\lambda_i)) = \varphi(M_\sigma \operatorname{diag}(\lambda_i) M_\sigma^{-1}) = \varphi(\operatorname{diag}(\lambda_{\sigma(i)})) = \prod_i \lambda_{\sigma(i)}^{k_i},$$

d'où l'on déduit $k_i = k_j$ pour tout i, j (pour $\sigma = (ij)$, on obtient $\lambda_i^{k_i}\lambda_j^{k_j} = \lambda_j^{k_i}\lambda_i^{k_j}$).

Pour tout $A = \operatorname{diag}(\lambda_i) \in H$ on a donc $\varphi(A) = (\prod_i \lambda_i)^k = (\det A)^k$. Comme toute matrice unitaire A est conjuguée à une matrice $D \in H$, on a $\varphi(A) = \varphi(D) = (\det D)^k = (\det A)^k$. □

Remarque 5.2. On peut montrer de la même manière que le groupe spécial unitaire $\mathbf{SU}(n)$ ne possède pas de caractère non trivial. Il suffit de préciser que toute matrice $A \in \mathbf{SU}(n)$ est conjuguée dans $\mathbf{SU}(n)$ à une matrice diagonale (en multipliant au besoin la matrice de passage par $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \det A)$) et de multiplier les matrices de transposition par $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1)$ pour rectifier leur déterminant.

6. Caractères du groupe linéaire $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$

Considérons comme il l'a été fait plus haut dans le cas $n = 1$ les caractères holomorphes [16] de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$. Une fois encore, le déterminant $\det\colon \mathbf{GL}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}^*$ et ses puissances fournissent des exemples de caractères holomorphes non triviaux. Et, une fois encore, ce sont les seuls.

Théorème 6.1. *Tout caractère holomorphe du groupe linéaire $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ est de la forme*

$$A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C}) \longmapsto (\det A)^k$$

pour un entier $k \in \mathbf{Z}$.

Démonstration. Comme dans le cas du groupe unitaire $\mathbf{U}(n)$, on considère la restriction d'un caractère holomorphe $\varphi\colon \mathbf{GL}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}^*$ au sous-groupe H formé des matrices inversibles diagonales, le point étant que deux matrices conjuguées ont même image par φ (puisque $\mathbf{C}^*$ est abélien) et que l'ensemble des matrices inversibles diagonalisables est dense dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$.

Le sous-groupe H des matrices inversibles diagonalisables est isomorphe à $(\mathbf{C}^*)^n$, via $(z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbf{C}^*)^n \mapsto \operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_n)$, de sorte que la restriction $\varphi_{|H}$ de φ à H est un produit $\varphi_{|H}\colon \operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_n) \mapsto \prod \varphi_i(z_i)$ de caractères holomorphes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de $\mathbf{C}^*$. D'après 4.3 il existe $k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\varphi(\operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_n)) = \prod_i z_i^{k_i}.$$

On vérifie que $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = k$ en considérant l'action des matrices de permutation sur H. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ alors

$$\prod_i z_i^{k_i} = \varphi(\operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_n)) = \varphi(M_\sigma \operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_n) M_\sigma^{-1}) = \varphi(\operatorname{diag}(z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)})) = \prod_i z_{\sigma(i)}^{k_i}$$

d'où on déduit, pour tout i, j, $k_i = k_j$ (en considérant $\sigma = (ij)$).

On a ainsi $\varphi(\operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_n)) = (\prod_i z_i)^k = \det(\operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_n))^k$. On a donc $\varphi(A) = \det(A)^k$ pour toute matrice inversible diagonale, donc pour toute matrice inversible diagonalisable, puis, par densité (et continuité de φ), pour toute matrice inversible. □

Remarque 6.2. La démonstration précédente s'adapte facilement pour montrer que $\mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$ n'admet pas de caractère holomorphe non trivial.

Remarque 6.3. Si on ne veut pas parler de caractère holomorphe, on peut décrire tous les caractères de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$. Le même argument montre que ces caractères sont de la forme $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C}) \mapsto |\det A|^a (\det A)^k$ avec $a \in \mathbf{C}$ et $k \in \mathbf{Z}$. En fait l'argument précédent montre

16. On est en train de parler de fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$. C'est tout simplement une application différentiable dont la différentielle est $\mathbf{C}$-linéaire.

qu'un caractère (qu'il soit seulement continu ou holomorphe) de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ est le composé du déterminant et d'un caractère de $\mathbf{C}^*$.

Il faut noter ici qu'un argument purement algébrique permet de décrire pour tout corps commutatif k le groupe des homomorphismes $\mathbf{GL}_n(k) \to k^*$ (resp. $\mathbf{SL}_n(k) \to k^*$), qu'on peut encore appeler caractères (ou caractères algébriques). Cet argument est basé sur le calcul des groupes dérivés de $\mathbf{GL}_n(k)$ et $\mathbf{SL}_n(k)$.

Proposition 6.4. *Soit $n \geqslant 2$.*
(i) *Tout homomorphisme $\mathbf{SL}_n(k) \to k^*$ est trivial.*
(ii) *Tout homomorphisme $\mathbf{GL}_n(k) \to k^*$ est de la forme $\varphi \circ \det$ où φ est un homomorphisme $k^* \to k^*$.*

Démonstration. Tout homomorphisme $G \to k^*$ est trivial sur le groupe dérivé $D(G)$ de G.

Si $n \geqslant 3$ ou $k \neq \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$, alors $D(\mathbf{SL}_n(k)) = \mathbf{SL}_n(k)$, et tout homomorphisme $\mathbf{SL}_n(k) \to k^*$ est donc trivial. Si $n = 2$ et $k = \mathbf{F}_2$, alors $\mathbf{F}_2^*$ est trivial. Si $n = 2$ et $k = \mathbf{F}_3$, alors $D(\mathbf{SL}_2(\mathbf{F}_3))$ est d'indice 3 dans $\mathbf{SL}_2(\mathbf{F}_3)$. Un homomorphisme $\mathbf{SL}_2(\mathbf{F}_3) \to \mathbf{F}_3^*$ provient donc d'un homomorphisme $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \to \mathbf{F}_3^*$, nécessairement trivial.

Si $n \neq 2$ et $k \neq \mathbf{F}_2$, alors $D(\mathbf{GL}_n(k)) = \mathbf{SL}_n(k)$, et tout homomorphisme $\mathbf{GL}_n(k) \to k^*$ se factorise donc via $\det\colon \mathbf{GL}_n(k) \to k^*$. Si $n = 2$ et $k = \mathbf{F}_2$, alors tout est trivial. □

Corollaire 6.5.

Si k est un corps fini, alors tout homomorphisme $\mathbf{GL}_n(k) \to k^*$ est de la forme $A \mapsto (\det A)^r$ pour $r \in \mathbf{Z}$.

Si $k = \mathbf{C}$, tout caractère holomorphe est de la forme $A \mapsto (\det A)^r$ pour $r \in \mathbf{Z}$.

Si $k = \mathbf{R}$, tout homomorphisme continu $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^*$ est de la forme $A \mapsto |\det A|^a$ ou $A \mapsto \frac{\det A}{|\det A|}|\det A|^a$ pour $a \in \mathbf{R}$.

Démonstration. Il s'agit de déterminer le groupe des homomorphismes de k^* dans lui-même.

Si k est fini, son groupe multiplicatif k^* est cyclique, de sorte que tout homomorphisme est de la forme $\lambda \mapsto \lambda^r$ pour une entier $r \in \mathbf{Z}$.

On a rappelé plus haut (théorème 4.3) que tout homomorphisme holomorphe $\mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ est de la forme $z \mapsto z^r$ pour un entier $r \in \mathbf{Z}$.

Soit enfin φ un homomorphisme continu $\mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$. Sa restriction à $\mathbf{R}_+^* \simeq \mathbf{R}$ est de la forme $t \mapsto t^a$ pour $a \in \mathbf{R}$ (puisque tout homomorphisme continu $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est de la forme $x \mapsto ax$). Puisque $\varphi(-1) = \pm 1$, on a ou bien $\varphi(t) = \varphi(|t|)$ pour tout t, ou bien $\varphi(t) = \frac{t}{|t|}\varphi(|t|)$ pour tout t, d'où la conclusion. □

Références

[1] N. Bourbaki, Topologie générale, Chapitre 5 à 10.

[2] J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiès, Cours de mathématiques, Tome 3.

[3] H. Queffélec, Topologie, Cours et exercices corrigés, Dunod.

[4] F. Rouvière, Petit guide de calcul différentiel.