MATHEMATIQUES
ANALYSE

Pierre Dèbes

TOME II

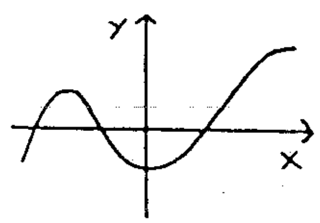
TABLE DES MATIERES

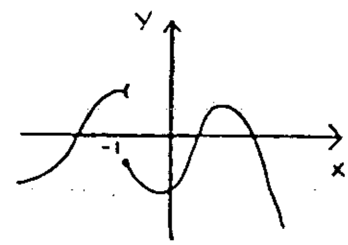
TOME II

CHAPITRE 6

CONTINUITE

Une fonction f(x) définie sur un intervalle I est continue si on peut tracer son graphe d'un seul coup de crayon. Il s'agit d'une propriété "globale" de la fonction. La fonction de gauche sur la figure ci-dessous est continue sur **R**.



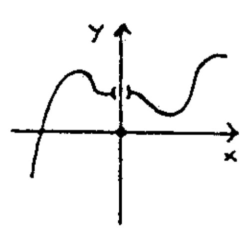


Celle de droite ne l'est pas: il y a une "rupture" ou "discontinuité" au point $x_0 = -1$; par contre, il y a continuité en tous les autres points. La continuité apparaît donc aussi (et d'abord) comme une propriété "locale", i.e., une propriété de la fonction en un point donné.

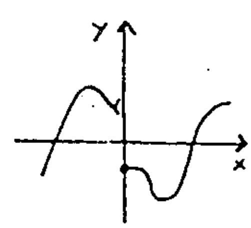
§1. CONTINUITE EN UN POINT.

1.1 Définitions.

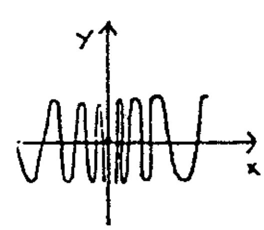
Commençons par quelques exemples typiques de discontinuité.



$f(0) \neq \lim_{x \to 0} f$



$\lim_{x \to 0^+} f \neq \lim_{x \to 0^-} f$



f n'a de limite ni à droite ni à gauche de 0

Exemple 1 Tracer le graphe des fonctions suivantes et préciser quel est le "type de discontinuité" en 0.

(a) $f(x) = [x]$

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Dans les trois cas de figure ci-dessus, la limite de f en 0, soit n'existe pas, soit est différente de la valeur de f en 0. On dira qu'une fonction f est continue en 0 si l'inverse est vrai, i.e., si la fonction f a une limite en 0 qui vaut f(0).

DEFINITION 1.1 *Soient* $f(x_1,\dots,x_n)$ *une fonction de* n *variables et* $m_0(a_1,\dots,a_n) \in D_f$. *La fonction* f *est dite continue en* m_0 *si la limite* $\lim_{m \to m_0} f$ *de* f *en* m_0 *existe et vaut* $f(m_0)$.

Pour vérifier la continuité d'une fonction en en un point, il faut donc calculer et comparer deux nombres: l'un est une valeur de f, l'autre est une limite.

Exemple 2 Soient f et g les deux fonctions définies par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a $\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0$, i.e., $\begin{cases} \neq f(0)\text{: f non continue en 0} \\ = g(0)\text{: g continue en 0} \end{cases}$.

Exemple 3 Etudier la continuité en $x_0 \in D_f$ des fonctions suivantes.
(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = 1/x$ (c) $f(x) = e^x$ (d) $f(x) = |x|$
(e) f est construite à partir des fonctions usuelles du Ch.3.

Remarque. En fait, il y a continuité de f en m_0 ssi la limite de f en m_0 existe et peut être calculée par substitution (Cf. Ch.4 §2.2). Donc dire comme au Ch.4 que le calcul des limites par substitution est licite pour les fonctions usuelles revient exactement à dire que ces fonctions sont continues en chaque point de leur domaine. Cela sera formellement établi un peu plus tard (Cf. §2.1 Remarque).

Exemple 4 Etudier la continuité des fonctions suivantes en 0.

(a) $f(x) = [-x^2]$ en 0 (b) $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1.2 Continuité à droite et à gauche.

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction d'une variable.

DEFINITION 1.2 *Une fonction* f(x) *est dite continue à droite (resp. à gauche) d'un point* x_0 *de son domaine si*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad (\textit{resp.,}\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0))$$

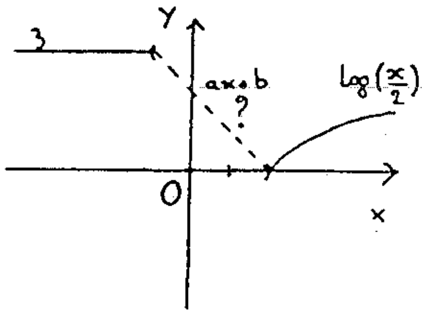
Exemple 5 La fonction $f(x) = [x]$ est continue à droite de 0 mais discontinue à gauche de 0.

La proposition suivante résulte du Th.1.5 du Ch.4.

PROPOSITION 1.3 *Une fonction* $f(x)$ *est continue en un point* $x_0 \in D_f$ *ssi elle est continue à droite et à gauche de* x_0.

Exemple 6 Etudier la continuité, à droite, à gauche des fonctions suivantes en un point $x_0 \in \mathbf{R}$.

(a) $f(x) = [x]$ (b) $f(x) = [-x]$ (c) $f(x) = [x]+[-x]$



Exemple 7 Déterminer les valeurs des paramètres a et b pour que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{pour } x < -1 \\ ax+b & \text{pour } -1 \leq x \leq 2 \\ \mathrm{Log}(x/2) & \text{pour } x > 2 \end{cases}$$

soit continue.

Notes. (a) On distingue deux cas dans l'étude de la continuité d'une fonction "définie par morceaux":

- en tout point x_0 frontière d'un des morceaux, on calcule les limites à droite et à gauche de x_0 et on utilise la Prop.1.3.
- en un point x_0 non frontière, i.e., intérieur à l'un des morceaux, il y a continuité ssi l'expression définissant f sur le morceau considéré est continue en x_0.

(b) Une fonction peut être discontinue en un point x_0 pour diverses raisons: discontinuité à droite, mais pas à gauche ou l'inverse ou discontinuité des deux côtés... Répondre à ces questions s'appelle préciser la nature de la discontinuité.

1.2 Théorèmes généraux.

La Proposition ci-dessous résulte des Th.2.1 et Th.2.2 du Ch.4.

PROPOSITION 1.4 (i) *Soient* f *et* g *deux fonctions de n variables continues en* m_0. *Alors les fonctions* $f+g$ *et* fg *sont continues en* m_0. *Si de plus* $g(m_0) \neq 0$, *alors la fonction* f/g *est continue en* m_0.

(ii) *Si* f *est continue en* m_0 *et* g *continue en* $f(m_0)$, *alors* $g o f$ *est continue en* m_0.

Exemple 8 Les fonctions polynômes, en particulier les fonctions puissances x^n, $n \in \mathbf{Z}$, sont continues en tout point $x_0 \in \mathbf{R}$. Les fonctions homographiques, et plus généralement les fractions rationnelles (i.e., fractions de deux polynômes) sont continues en tout point de leur domaine.

Exemple 9 Etudier la continuité des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ \text{Log}(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = [x] + \sqrt{x-[x]}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solution. (c) La fonction f est continue en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ (Prop.1.4). Voyons si elle est continue à l'origine (0,0). En ce point, la Prop.1.4 ne s'applique pas; il faut revenir à la définition. La valeur de f en (0,0) est 0 et la limite de f en (0,0) vaut également 0 (Cf. Ch.4 §2 Exemple 5); f est donc continue en (0,0). Conclusion: f est continue en tout point de $\mathbf{R}^2$.

Continuité et suites Le résultat suivant a un intérêt théorique important: la continuité peut être étudiée au moyen de suites. Nous nous limitons pour simplifier aux fonctions d'une variable.

THEOREME 1.5 *Soit* $f(x)$ *une fonction et* $x_0 \in (D_f)'$. *Alors* f *est continue ssi pour toute suite* $(x_n)_{n>0}$ *qui tend vers* x_0, *on a*

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Démonstration. Dans le sens ⇒, c'est une conséquence immédiate du Th.2.2 du chapitre 4 sur les compositions de limites. Inversement nous allons montrer que si f n'est pas continue, il existe une suite $(x_n)_{n>0}$ qui tend vers x_0 et telle que la suite $(f(x_n))_{n>0}$ ne tende pas vers $f(x_0)$. Si f n'est pas continue en x_0, on a par définition

(*) $\quad (\exists\, \varepsilon > 0)(\forall\, \alpha > 0)(\exists\, x \in D_f)(\ |x-x_0| < \alpha \text{ et } |f(x)-f(x_0)| \geq \varepsilon)$

Prenons $\alpha = 1/2^n$, pour n un entier quelconque; (*) fournit l'existence d'un élément x_n vérifiant

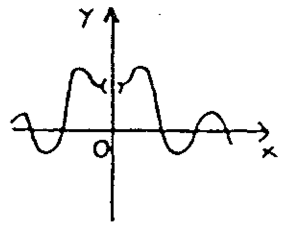
(**) $\quad |x_n-x_0| < 1/2^n$ et $|f(x_n)-f(x_0)| \geq \varepsilon$

Considérons la suite $(x_n)_{n>0}$ ainsi construite. A cause de la première partie de la condition (**), elle tend vers x_0. La seconde partie interdit à la suite $(f(x_n))_{n>0}$ de converger vers $f(x_0)$.

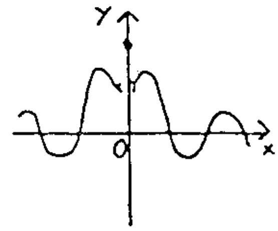
Remarque. On peut utiliser le Th.1.2 pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point: par exemple, [x] n'est pas continue en 0 car la suite [-1/n] converge vers $-1 \neq [0]$. On donne dans l'exercice 15 une application classique de la partie directe du Th.1.2.

1.3 Prolongement par continuité

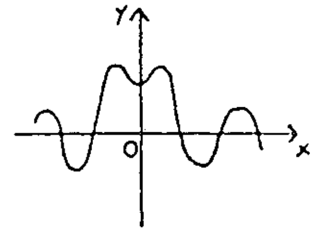
Considérons la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \sin(x)/x$, dont le graphe est représenté ci-dessous à gauche.



Le graphe G_f



La fonction sin(x)/x prolongée par f(0) = 2 (non continue).



La fonction sin(x)/x prolongée par f(0) = 0 (continue).

La fonction f n'est pas définie en 0; prolonger f en 0 signifie définir f en 0. Il y a de multiples façons de prolonger f en 0: il suffit de choisir une valeur dans **R**. Cependant, la fonction f ainsi prolongée, n'a guère de chances d'être continue en 0. Sauf si on a choisi comme valeur de f en 0 le nombre $1 = \lim_{x \to 0} \sin(x)/x$.

Plus généralement, soient $f(x_1,\dots,x_n)$ une fonction de n variables et m_o un point où f n'est pas définie. Supposons que f admet pour limite un nombre réel L quand $m = (x_1,\dots,x_n)$ tend vers m_o. Alors la fonction $f(x_1,\dots,x_n)$ prolongée en m_o par $f(m_o) = L$ est continue en m_o. On dit qu'on a prolongé f par continuité au point m_o.

Exemple 10 Peut-on prolonger la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin(x)}$ par continuité au point 0?

Pour qu'une fonction f soit prolongeable par continuité en un point $m_o \notin D_f$, il faut et il suffit que f admette une limite finie quand m tend vers m_o (en particulier, m_o doit être un point d'accumulation du domaine). Etudier les prolongements par continuité éventuels d'une fonction est donc un simple exercice de calculs de limite.

Exemple 11 Etudier la continuité des fonctions suivantes en précisant la nature des discontinuités éventuelles. Peut-on les prolonger par continuité?

(a) $f(x) = x/|x|$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^2+2x}{\sqrt{x^2+2x+1}}$

(c) $f(x) = (1+x) \operatorname{Log} |1+x|$

(d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{Log} |x|}{x}$

(e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x-1|}}{\sqrt{|x|}}$

(f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x-1|}}{|x|}$

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x-1|}}{x}$

(h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x-1|}}{x^2}$

(i) $f(x) = e^{-1/x^2}$

(j) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2x}$

(k) $f(x,y) = \dfrac{\sin \pi(x^2+y^2)}{\operatorname{Log}(1+x^2+y^2)}$

(l) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x+y)}{e^x e^y - 1}$

Solution. (e)→(h) Les 4 fonctions sont continues sur $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$ en vertu des théorèmes généraux sur la continuité. Il faut étudier ensuite le comportement de la fonction en 0. Sur un voisinage de 0 assez petit, par exemple]-1/2,1/2[, on a

$$\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x-1|} = \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} \underset{0}{\sim} x$$

Conclusions:

(e) $f(x) \underset{0}{\sim} \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|} \to 0$; f se prolonge par continuité: $f(0) = 0$.

(f) $f(x) \underset{0}{\sim} x/|x|$ n'a pas de limite en 0; f ne se prol. pas par cont.

(g) $f(x) \underset{0}{\sim} 1 \to 1$; f se prolonge par continuité: $f(0) = 1$.

(h) $f(x) \underset{0}{\sim} 1/x$ n'a pas de limite en 0; f ne se prol. pas par cont.

(j) f est continue sur $D_f = \mathbf{R}^2\setminus\{Oy\}$ (th.gén.). En un point $m_0(0,b)$ où $b \neq 0$, la fonction f n'a pas de limite finie (considérer les points $m(x,b)$ par exemple), donc ne se prolonge pas par continuité. En revanche, la fonction tend vers 0 quand $m(x,y)$ tend vers $O(0,0)$: en effet, on a la majoration

$$\left|\frac{x^2+y^2}{2x}\right| \leq \frac{|x|}{2}$$

La fonction f se prolonge donc par continuité en (0,0): $f(0,0) = 0$.

Exemple 12 Soit $r \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. Montrer que, pour $r \geq 0$, la fonction puissance $x \to x^r$ se prolonge par continuité en 0.

Exemple 13 Soit $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{Log}(\frac{x+1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{e^{1/x} - axe^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Pour quelle valeur du paramètre a la fonction f se prolonge-t-elle par continuité en 0?

§2. PROPRIETES DES FONCTIONS CONTINUES.

2.1 Continuité sur un ensemble.

DEFINITION 2.1 *On dit qu'une fonction* $f(x_1,\dots,x_n)$ *est continue sur un sous-ensemble* E *de* $\mathbf{R}^n$ *si elle est continue en tous les points de* E. *Le domaine de continuité est l'ensemble de tous les points de* $\mathbf{R}^n$ *où* f *est continue. Enfin,* f *est dite continue si* f *est continue sur son domaine de définition.*

Exemple 1 Les fonctions polynômes en n variables, les fonctions fractions de deux polynômes sont des fonctions continues. La fonction [x] a pour domaine de continuité l'ensemble $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$; ce n'est pas une fonction continue.

De la Prop.1.4, on déduit immédiatement

PROPOSITION 2.2 (a) *Si* f *et* g *sont deux fonctions continues sur* E , *alors* f+g, fg *sont continues sur* E *et* f/g *est continue sur l'ensemble* $E \setminus \{m \in \mathbf{R}^n \mid g(m) = 0\}$. *Si* f *est continue sur* E *et* g *est continue sur* f(E), *alors* gof *est continue sur* E.

(b) *Si* f *et* g *sont deux fonctions continues, alors* f+g, fg, f/g *et* gof *sont continues.*

Les fonctions usuelles du Ch.3 sont continues. D'après la Prop.2.2, toutes les fonctions construites à partir des fonctions usuelles sont également continues.

Remarque. La continuité des fonctions usuelles peut être formellement établie de la façon suivante. Certains arguments s'appuient sur des résultats à venir.

• Les fonctions polynômes. La continuité provient de celle de la fonction x et des théorèmes généraux (Prop.2.2). Ce cas fournit en particulier la continuité des fonctions puissances entières et des fonctions fractions de deux polynômes.

• Les fonctions racines n-ièmes $\sqrt[n]{\ }$. Ce sont des fonctions réciproques de fonctions continues (Cf. Th.2.9)

• La fonction Log. Elle est définie comme primitive de fonction continue; elle est donc elle même continue (et même dérivable).

• La fonction exponentielle. C'est la réciproque de la fonction Log.

• Les fonctions puissances. Elles sont construites à partir de la fonction exponentielle. (Quand l'exposant est rationnel, on peut également déduire la continuité de celle des fonctions racines n-ièmes).

• La fonction sin. La continuité en 0 résulte de l'inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$. On obtient la continuité en un point quelconque en utilisant les formules d'addition (Cf. Exercice 18)

• Les fonctions cos et tg. Elles se déduisent de la fonction sin: pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{cases} \cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \\ tg(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{cases}$$

2.2 Propriétés locales.

Soit $f(x_1,\dots,x_n)$ une fonction continue en un point m_o. Par définition, la valeur $f(m_o)$ de f en m_o est la limite de f en m_o. Il en résulte que

(*) au voisinage de m_o, la fonction f prend des valeurs f(m) "peu différentes" de $f(m_o)$.

Cet énoncé est certes imprécis mais il traduit assez bien l'idée qu'il faut avoir de la continuité en un point.

Exemple 2 Voir sur un exemple pourquoi l'énoncé ne s'applique pas si la fonction f n'est pas continue.

Le résultat ci-dessous précise l'énoncé (*).

PROPOSITION 2.3 *Soient* $f(x_1,...,x_n)$ *une fonction continue en un point* m_0 *et* ε *un nombre strictement positif quelconque. Alors il existe un voisinage de* m_0 *sur lequel la fonction prend des valeurs toutes comprises dans l'intervalle* $]f(m_0)-\varepsilon, f(m_0)+\varepsilon[$.

Preuve. La Prop.2.3 ne fait que reformuler la définition de la continuité de f en m_0.

Nous expliquons dans l'exemple suivant comment il faut utiliser l'énoncé (*) et la Prop.2.3.

Exemple 3 Soit $f(x_1,...,x_n)$ une fonction continue en un point m_0. On suppose $f(m_0) \neq 0$. Montrer qu'il existe un voisinage de m_0 où f ne s'annule pas.

Solution. Intuitivement, c'est clair. En effet, d'après l'énoncé (*), au voisinage de m_0, f prend des valeurs "proches" de $f(m_0)$, qui est non nul. Si elles sont suffisamment proches, elles ne peuvent pas être nulles. Il s'agit maintenant de rendre rigoureux ce raisonnement.
Supposons dans un premier temps $f(m_0) > 0$. On choisit $\varepsilon = f(m_0)/2$; c'est un nombre strictement positif. D'après la Prop.2.3, il existe un voisinage V de m_0 sur lequel f prend des valeurs comprises dans l'intervalle $]f(m_0)-\varepsilon, f(m_0)+\varepsilon[$, i.e., l'intervalle

$$\left]\frac{f(m_0)}{2}, \frac{3f(m_0)}{2}\right[.$$

En particulier, elles sont non nulles. Si $f(m_0) < 0$, le raisonnement est similaire.

Exemple 4 Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout x dans l'intervalle $]-\alpha,\alpha[$, on ait

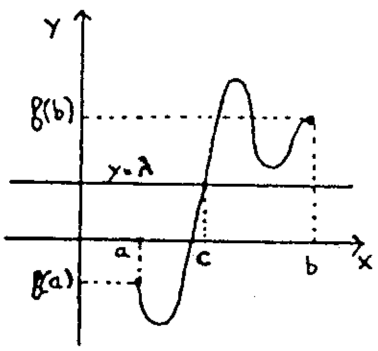
$$\frac{1}{2}|\mathrm{Log}(1+x)| \leq |\sin(x)| \leq \frac{1}{2}|\mathrm{Log}(1+x)|$$

(Appliquer le résultat de l'exemple 3 à la fonction $f(x) = \frac{|\sin(x)|}{|\mathrm{Log}(1+x)|}$)

Exemple 5 Soit $f(x_1,...,x_n)$ une fonction continue en un point m_0. En utilisant la Prop.2.3, montrer qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est bornée.

2.3 Propriété de la valeur intermédiaire.

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction d'une variable définie sur un intervalle I.



Soient a et b deux éléments de I. Considérons maintenant un nombre quelconque λ compris entre f(a) et f(b). Les deux points A(a,f(a)) et B(b,f(b)) du graphe G_f se trouvent de part et d'autre de la droite y = λ (voir figure ci-contre). Si f est continue sur I, on peut aller du point A au point B le long du graphe "sans lever le crayon". On est alors obligé de couper la droite y = λ. On appelle cette propriété la propriété de la valeur intermédiaire. C'est la plus importante propriété des fonctions continues sur un intervalle.

Exemple 6 Voir sur un exemple pourquoi l'hypothèse de continuité est essentielle.

Théorème des valeurs intermédiaires (1ère forme)

THEOREME 2.4 _ *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* I *et* a *et* b *deux éléments de* I *. Alors*

(*) *Toute droite horizontale* y = λ *passant entre les points* A(a,f(a)) *et* B(b,f(b)) *coupe le graphe* G_f *au moins une fois.*

La propriété (*) *s'énonce de façon équivalente*

(* bis) *Si* λ *est un nombre réel quelconque compris entre* f(a) *et* f(b) , *alors il existe* c *entre* a *et* b *tel que* f(c) = λ.

Exemple 7 Soit f une fonction continue sur [a,b]. On suppose f(a)f(b) < 0. Montrer que f s'annule au moins une fois entre a et b.

Exemple 8 Montrer qu'un polynôme de degré impair a au moins une racine dans **R**.

Preuve du Th.2.4. Nous donnons une preuve succincte de (* bis). Elle s'appuie sur une propriété fondamentale de l'ensemble des nombres réels (Cf. Ch.4 Th.2.5), à savoir

(**) Toute partie S non vide et majorée admet une borne supérieure (i.e., un plus petit majorant).

Supposons par exemple f(a) ≥ λ (si f(a) ≤ λ, le raisonnement est analogue). On considère l'ensemble S = { x ∈ [a,b] | f(x) ≥ λ}. C'est un ensemble non vide (a ∈ S) et majoré (par b). Soit c sa borne supérieure. Les deux points suivants montrent qu'on ne peut avoir ni f(c) > λ ni f(c) < λ.

• Supposons f(c) > λ. En utilisant la Prop.2.3, on obtient qu'il existe un voisinage de c où f prend des valeurs > λ (s'inspirer de l'exemple 3). Cela contredit le fait que c est <u>un</u> majorant de S.

• Supposons f(c) < λ. En utilisant la Prop.2.3, on obtient qu'il existe un voisinage de c où f prend des valeurs < λ. Cela contredit le fait que c est <u>le plus petit</u> des majorants de S.

Conclusion: f(c) = λ.

En d'autres termes, le Th.2.4 énonce qu'une fonction continue qui prend les valeurs $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$ en a et b prend également toutes les valeurs intermédiaires. C'est-à-dire,

$$(\forall\ \alpha,\beta \in f(I))\ (f(I) \supset [\alpha,\beta])$$

Cela signifie exactement que l'ensemble image **f(I) est un intervalle** (Cf. Exercice 25 pour un rappel sur les intervalles).

Théorème des valeurs intermédiaires (2ème forme)

THEOREME 2.5 _ *L'image* f(I) *d'un intervalle* I *par une application continue* f *est un intervalle.*

Exemple 9 Voir sur un exemple pourquoi l'hypothèse de continuité est essentielle dans le Th.2.5.

Généralisation (n variables). Une fonction continue de n variables $f(x_1,\ldots,x_n)$ vérifie la propriété suivante qu'on peut voir comme une version à n variables de la propriété de la valeur intermédiaire.

(***) L'image par f d'une boule (ouverte ou fermée) est un intervalle de **R**.

La démonstration est laissée en exercice (Cf. Exercice 28).

Terminons ce paragraphe par un cas particulier important du Théorème des valeurs intermédiaires.

COROLLAIRE 2.6 *L'image* f([a,b]) *de l'intervalle* [a,b] *par une fonction* f *continue et monotone est l'intervalle fermé de bornes* f(a) *et* f(b).

Exemple 10 Voir sur des exemples pourquoi l'hypothèse "continue et monotone" est essentielle.

2.3 Inversion des fonctions continues.

Le résultat que nous avons en vue dans ce paragraphe est le Th.2.9: la réciproque d'une fonction continue et injective sur un intervalle est elle-même continue. Nous le déduirons des deux résultats fondamentaux suivants. Rappelons que f désigne une fonction d'une variable définie sur un intervalle I.

THEOREME 2.7 *Si* f *est strictement monotone et si l'ensemble image* f(I) *est un intervalle, alors* f *est continue sur* I.

THEOREME 2.8 *Si* f *est injective et continue, alors* f *est strictement monotone.*

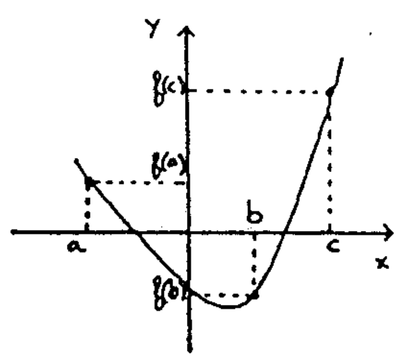
Exemple 11 Déduire du Th.2.7 la continuité de la fonction sinus (appliquer le Th.2.7 à la restriction de sin(x) à $[-\pi/2,\pi/2]$).

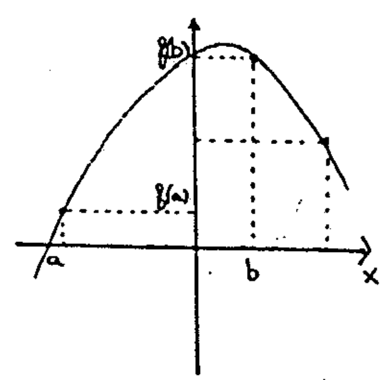
Preuve du Th.2.7. Soit x_0 quelconque dans I. Nous allons démontrer, en revenant à la définition que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Le point capital de la preuve est de remarquer que, puisque f(I) est un intervalle et qu'il contient $f(x_0)$, il existe un petit intervalle fermé J de longueur non nulle, contenant $f(x_0)$ et contenu dans $f(I) \cap]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$. Notons f(a) et f(b) les bornes de cet intervalle J. Il résulte de la stricte monotonie de f que l'intervalle ouvert de bornes a et b est un voisinage de x_0 qui est envoyé par f dans J, donc en particulier dans $]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$.

Preuve du Th.2.8. On raisonne par l'absurde. Si f n'est pas strictement monotone, il existe 3 points a, b, c dans I vérifiant

(*) a < b < c et f(b) est à l'extérieur du segment de bornes f(a) et f(c).

Quitte à changer f en -f on peut supposer que f(c) > f(a). Ci-dessous sont représentés les deux cas de figure possibles.





Dans chacun de ces cas, la propriété de la valeur intermédiaire combinée au test des horizontales pour l'injectivité permet de conclure que f ne peut pas être injective.

THEOREME 2.9 *Soit* f *une fonction continue et injective sur un intervalle* I. *Alors la fonction* f^{-1}, *réciproque de* f, *est continue sur l'intervalle* f(I).

Preuve. Le Th.2.9 se déduit des Th.2.7 et Th.2.8. D'après le Th.2.8, une fonction f continue et injective est strictement monotone. Il est facile de voir qu'alors sa réciproque f^{-1} est également strictement monotone (Cf. Exercice 11 du Ch.3). D'autre part, la fonction f^{-1}, définie sur l'intervalle f(I), a pour ensemble image I. C'est un intervalle, donc d'après le Th.2.7, f^{-1} est continue.

Du Th.2.9, on déduit en particulier la continuité des fonctions racines n-ièmes et de la fonction exponentielle (Cf. Remarque en §2.1). Voici d'autres exemples classiques.

La fonction Arcsin La fonction sinus n'est pas injective mais sa restriction à l'intervalle $I = [-\pi/2, \pi/2]$ l'est. On note Arcsin la réciproque de cette restriction. La fonction Arcsin est définie par:

$$\begin{cases} \mathrm{Arcsin}(x) = y \\ x \in [-1,1] \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(y) = x \\ y \in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}$$

Exemple 12 Arcsin(1) = $\pi/2$; Arcsin(1/2) = $\pi/6$.

Attention! On a bien sin(Arcsin(x)) = x mais on n'a Arcsin(sin(y)) = y que si $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Par exemple, Arcsin(sin($3\pi/2$)) = $-\pi/2$ et non pas $3\pi/2$.

La fonction Arcos La fonction cosinus n'est pas injective mais sa restriction à l'intervalle $I = [0, \pi]$ l'est. On note Arcos la réciproque de cette restriction. La fonction Arcsin est définie par:

$$\begin{cases} \mathrm{Arcos}(x) = y \\ x \in [-1,1] \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(y) = x \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

Exemple 13 Arcos(1) = 0; Arcos(1/2) = $\pi/3$.

Attention! On a bien cos(Arcos(x)) = x mais on n'a Arcos(cos(y)) = y que si $y \in [0, \pi]$. Par exemple, on a Arcos(cos($-\pi/4$)) = $\pi/4$ et non pas $-\pi/4$.

Exemple 14 Etablir la formule Arcos(x) + Arcos(-x) = π.

Solution. Montrons que Arcos(-x) = π-Arcos(x). D'après la définition, il s'agit de montrer que

$$\begin{cases} \cos(\pi - \mathrm{Arcos}(x)) = -x \\ \pi - \mathrm{Arcos}(x) \in [0, \pi] \end{cases}$$

- cos(π-Arcos(x)) = -(cos(Arcos(x))) = -x
- Par définition, Arcos(x) $\in [0, \pi]$. On en déduit que π-Arcos(x) est dans l'intervalle $[\pi - 0, \pi - \pi] = [0, \pi]$.

La fonction Arctg La fonction tangente n'est pas injective mais sa restriction à l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$ l'est. On note Arctg la réciproque de cette restriction. La fonction Arctg est définie par:

$$\begin{cases} \mathrm{Arctg}(x) = y \\ x \in R \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{tg}(y) = x \\ y \in]-\pi/2, \pi/2[\end{cases}$$

Exemple 15 Arctg(1) = $\pi/4$; Arctg($\sqrt{3}$) = $\pi/3$.

Attention! On a bien tg(Arctg(x)) = x mais on n'a Arctg(tg(y)) = y que si y $\in$ [$-\pi/2,\pi/2$]. Par exemple, Arctg(tg($3\pi/4$)) = $\pi/4$ et non pas $3\pi/4$.

Exemple 16 Montrer que, pour tout x > 0, on a:

$$\text{Arctg}(x) + \text{Arctg}(1/x) = \pi/2.$$

D'après le Th.2.9, les fonctions Arcsin, Arcos et Arctg sont des fonctions continues.

2.4 Image continue d'un fermé borné.

Nous nous contenterons dans cette section de citer et d'expliquer une dernière propriété importante des fonctions continues. Ici, f désigne une fonction de n variables définie sur un sous-ensemble E de $\mathbf{R}^n$. On rappelle les deux définitions suivantes.

DEFINITION 2.10 *On dit qu'un sous-ensemble* E *de* $\mathbf{R}^n$ *est* ***borné*** *s'il peut être inclus dans une boule.*

Exemple 17 L'intérieur d'une ellipse, d'un rectangle sont des sous-ensembles bornés de $\mathbf{R}^2$. En revanche, le premier quadrant, la parabole $y = x^2$ ne sont pas bornés.

DEFINITION 2.11 *On dit qu'un sous-ensemble* E *de* $\mathbf{R}^n$ *est* ***fermé*** *s'il contient tous ses points adhérents.*

Exemple 18 (a) Les boules fermées sont des fermés. Les boules ouvertes ne sont pas des fermés: en effet, les points du bord d'une boule ouverte B sont adhérents à B mais ne sont pas dans B.
(b) Un intervalle de **R** n'est un fermé que s'il contient ses bornes, i.e., s'il s'agit d'un intervalle fermé. L'ensemble **Z** est un fermé. L'ensemble $\{1/n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$ n'est pas fermé.

THEOREME 2.12 *L'image* f(E) *d'un ensemble* E *fermé et borné par une fonction continue* f *est un sous-ensemble fermé et borné de* **R**.

On pourra retenir le Th.2.12 sous la forme suivante qu'on utilise très souvent:

(*) Une fonction f continue sur un ensemble E fermé et borné est bornée et atteint ses bornes.

Par "f atteint ses bornes", il faut comprendre ceci. L'ensemble image f(E) est borné; il a donc une borne supérieure M et une borne inférieure μ. Raisonnons sur M; c'est le plus petit nombre réel qui soit supérieur à tous les éléments de f(E). Il est important de comprendre qu'à priori, M n'est pas nécessairement dans f(E). Mais c'est le cas sous les hypothèses du Th.2.12; l'ensemble f(E) est fermé, il contient donc ses bornes μ et M. Autrement dit, les bornes μ et M de f(E) sont des "valeurs atteintes" par la fonction f sur E.

La propriété (*) s'énonce donc de façon plus précise:

(* bis) $(\exists\ \xi,\zeta \in E)(\forall\ x \in E)(\ f(\xi) \leq f(x) \leq f(\zeta))$

c'est-à-dire, f a un maximum et un minimum sur E.

Voici deux exemples: le premier est celui d'une fonction bornée qui n'atteint pas ses bornes, le second montre comment on peut utiliser le Th.2.12.

Exemple 19 Soient $f(x) = 1/x$ et $E =]1,2[$. La fonction f est bornée sur E par 1 et 1/2, mais f n'atteint pas ces bornes. Ici, le Th.2.12 ne s'applique pas car E n'est pas fermé.

Exemple 20 Soient f(x) une fonction continue sur un intervalle [a,b]. On suppose que, pour tout $x \in [a,b]$, on a $0 \leq f(x) < 1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (f(x))^n\,dx = 0$$

(La définition et les propriétés de l'intégrale sont revues au §3).

Solution. La fonction f est continue, donc sa borne supérieure M est atteinte, i.e., M s'écrit $M = f(\zeta)$. De l'hypothèse sur f, on déduit $M < 1$. On a donc:

$$0 \leq f(x) \leq M < 1 \text{ pour tout } x \in [a,b]$$

En élevant à la puissance n et en prenant l'intégrale, on obtient

$$(**) \qquad 0 \leq \int_a^b (f(x))^n\,dx \leq (b-a)\ M^n$$

Or, comme $0 \leq M < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} M^n = 0$, ce qui conduit à la conclusion désirée.

Note. Dans l'exemple ci-dessus, bien comprendre que si la fonction n'est pas continue, rien n'empêche la borne supérieure M d'être égale à 1, auquel cas l'inégalité (**) ne permet plus de conclure.

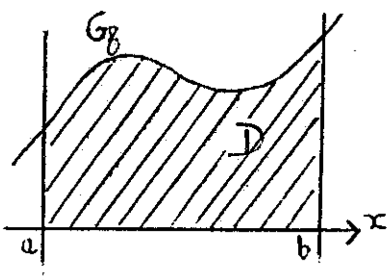
Exemple 21 (a) Montrer que le Th.2.12 devient faux si f n'est plus supposée continue.

(b) Montrer que l'image d'un ensemble E borné par une fonction continue n'est pas nécessairement bornée.

(c) Montrer que l'image d'un ensemble E fermé par une fonction continue n'est pas nécessairement un fermé.

§3. L'INTEGRALE DES FONCTIONS CONTINUES.

3.1 Les propriétés de l'intégrale.

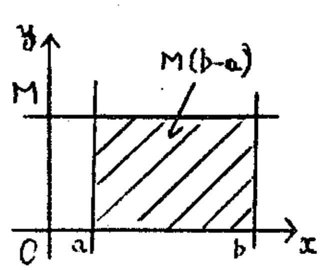


Soit f(x) une fonction positive sur un intervalle [a,b]. Considérons le domaine plan D compris entre le graphe G_f, l'axe Ox et les deux droites verticales x = a et x = b. Bien qu'on ait une bonne intuition de ce qu'est l'aire de D, il est difficile d'en donner une définition précise. C'est l'objet de cette section: étant donnée une fonction f définie sur un intervalle [a,b] (de signe quelconque), on va construire un nombre réel qu'on notera

$$\int_a^b f(x)dx,$$

qu'on appelera intégrale de f entre a et b et qui, si f est positive sur [a,b], s'interprètera comme l'aire du domaine plan D. Cette construction supposera des hypothèses sur la fonction f. Dans la pratique, ces hypothèses seront presque toujours satisfaites: les fonctions "continues par morceaux" seront "intégrables".

Nous repoussons au paragraphe §3.2 la construction de l'intégrale, qui est délicate. Nous allons ici indiquer ses propriétés, qui, reflétant les propriétés des aires, sont plus maniables que la définition et suffisent pour résoudre la plupart des problèmes. Ces propriétés de base devront être établies formellement, une fois l'intégrale définie.

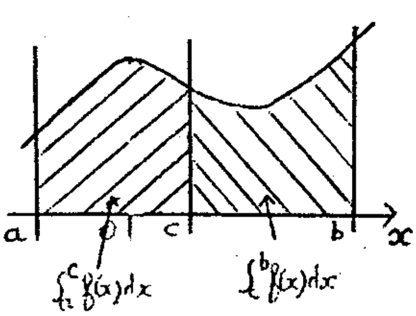


(I_1) si f est constante, égale à M sur [a,b], alors

$$\int_a^b f(x)dx = M(b-a)$$

(I_2) si f est positive sur [a,b] alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$



(I_3) si f est définie sur [a,b] et c ∈ [a,b], alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

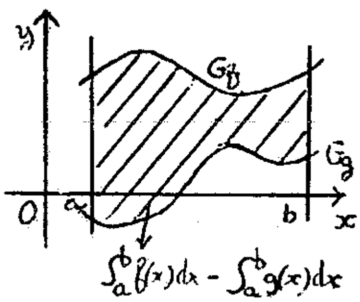
[Cette propriété reste valable même si c est à l'extérieur de l'intervalle [a,b], si on convient de poser pour c ≤ a

$$\int_a^c f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx \quad .]$$

(I_4) si f et g sont deux fonctions définies sur [a,b] et si λ et μ sont deux nombres réels quelconques, alors

$$\int_a^b (\lambda f(x)+\mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

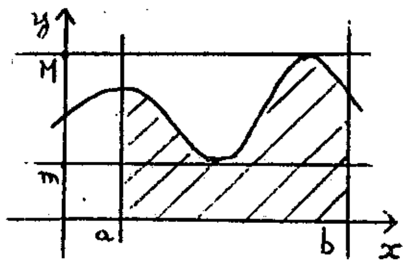
Ces propriétés ont ces conséquences souvent utiles:



(I_5) si f et g sont deux fonctions définies sur [a,b] et si $f \geq g$ sur [a,b], alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

[On applique (I_2) à f-g puis on utilise (I_4).]



(I_6) si f est bornée sur [a,b], supérieurement par M et inférieurement par m, alors

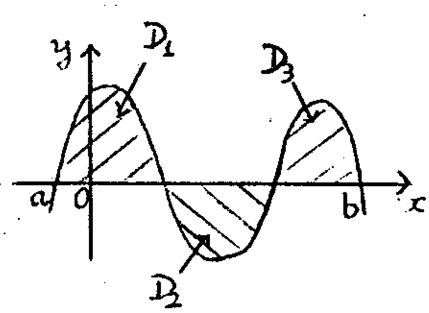
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

[On applique (I_5) à l'inégalité entre fonctions $m \leq f \leq M$ et on utilise (I_1).]

(I_7) si f est définie sur [a,b], alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

[On applique (I_5) à l'inégalité entre fonctions $-|f| \leq f \leq |f|$.]



Exemple 1 Soit f la fonction dont le graphe est représenté ci-contre. Utiliser les propriétés (I_3) et (I_4) pour donner une interprétation de l'intégrale de f entre a et b en termes d'aires.

Réponse. On a

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3$$

où A_i désigne l'aire du domaine plan D_i, i = 1,2,3.

Exemple 2 Donner un encadrement de $\int_a^b f(x)dx$ pour

(a) $f(x) = \sqrt{x^3-3x+2}$ a = 0 ; b = 2

(b) $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ a = -1 ; b = 1

Solution. (a) Une étude rapide de la cubique x^3-3x+2 montre que les valeurs maximale et minimale de f(x) sur [0,2] sont respectivement 2 et 0. D'où l'encadrement

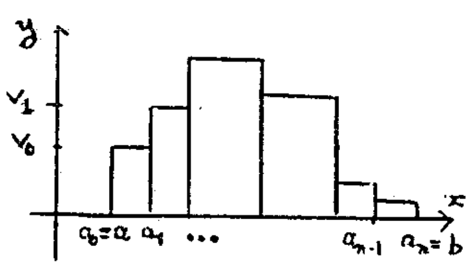
$$0(2-0) = 0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq 2(2-0) = 4.$$

On démontrera au chapitre suivant (Cf. Ch.7 Cor.1.11) le résultat fondamental suivant, qui permet de calculer la valeur exacte d'une intégrale: si f est continue sur [a,b] et si F désigne une primitive de f sur [a,b], alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

3.2 La construction de l'intégrale.

Fonctions en escalier



Une fonction en escalier sur un intervalle [a,b] est une fonction f qui est "constante par morceaux" sur [a,b]. Plus précisément, on demande qu'il existe une partition de l'intervalle [a,b] en un nombre fini n de sous-intervalles $[a_i,a_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$, sur chacun desquels f soit constante. On appelle **subdivision** de [a,b] (associée à f) la donnée ordonnée des points

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n = b.$$

L'intégrale des fonctions en escalier n'est pas difficile à définir. Si f est une fonction en escalier associée à une subdivision comme ci-dessus et si v_i désigne la valeur prise par f sur l'intervalle $[a_i,a_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$, on pose

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)v_i$$

On vérifie sans peine que les propriétés (I_1) jusqu'à (I_4) sont satisfaites pour les fonctions en escalier.

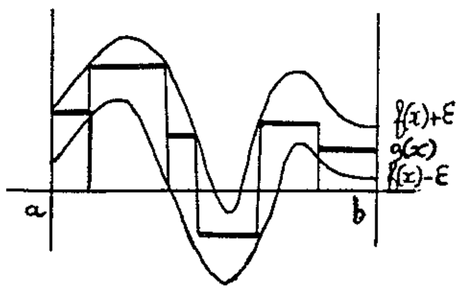
[Indiquons deux points qui interviennent dans cette vérification:
• L'intégrale d'une fonction en escalier f ne dépend pas de la subdivision associée à f choisie.
• Toute combinaison linéaire $\lambda f+\mu g$ de deux fonctions en escalier f et g est une fonction en escalier.]

Fonctions continues

Il s'agit maintenant d'étendre la définition de l'intégrale à des fonctions f plus générales. Le principe de la construction est le suivant. Sous certaines hypothèses sur f, on peut trouver une suite $(f_n)_{n>0}$ de fonctions en escalier qui converge (en un sens à définir) vers f. On définira alors l'intégrale de f sur [a,b] comme la limite I des intégrales I_n des fonctions f_n. Il y a plusieurs difficultés. Outre la question de la convergence d'une suite de fonctions en escalier vers f, il n'est pas évident que la suite $(I_n)_{n>0}$ converge vers un nombre réel I. D'autre part, pour que la définition ait un sens, il faut vérifier que le nombre I ne dépend pas de la suite $(f_n)_{n>0}$.

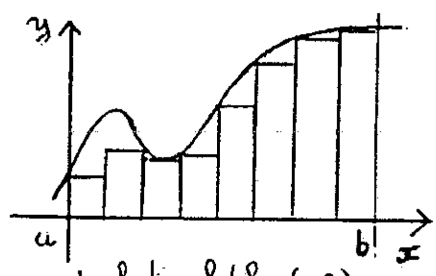
Construction Soit f une fonction définie sur [a,b]. On dira qu'une fonction en escalier g approche f à ε près sur [a,b] si

$$|f(x)-g(x)| < \varepsilon \text{ pour tout } x \in [a,b]$$



Graphiquement, une fonction en escalier approchant f à ε près est une fonction en escalier dont le graphe est compris entre le graphe des fonctions f+ε et f-ε (voir figure). On dira qu'une suite $(f_n)_{n>0}$ **converge uniformément** vers f sur [a,b] s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n>0}$ de nombres réels positifs vérifiant:

- pour tout n>0, f_n approche f à ε_n près.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$



Les fonctions f et f_n (n=3)

Nous supposons désormais que f est continue sur [a,b]. Il y a une façon assez naturelle d'approcher f par une suite (f_n) de fonctions en escalier. Pour tout entier n > 0, on découpe l'intervalle en 2^n intervalles de longueur $(b-a)/2^n$; on définit alors f_n comme la fonction en escalier qui sur chacun des intervalles

$$S_k = [a+k(b-a)/2^n, a+(k+1)(b-a)/2^n], \ (0 \leq k \leq 2^n-1)$$

est constante, égale à

$$v_k = \min \{f(x) \mid x \in S_k\}.$$

On sait que ce minimum existe d'après le Th.2.12. Posons ensuite:

$$I_n = \int_a^b f_n(x)dx.$$

On remarque alors que, pour tout n > 0, on a

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \text{ pour tout } x \in [a,b].$$[1]

On déduit donc grâce à la propriété (I_5) (que l'on sait vraie pour les fonctions en escalier) que la suite $(I_n)_{n>0}$ est croissante. D'autre part, elle est majorée: si M est un majorant de f sur [a,b], alors M(b-a) est un majorant de la suite $(I_n)_{n>0}$. La suite $(I_n)_{n>0}$, croissante et majorée, converge donc vers un nombre réel I.

La difficulté de la construction de l'intégrale réside dans le résultat suivant.

THEOREME-DEFINITION 3.1 *Soit* f *une fonction continue sur* [a,b] . *Alors*
(a) *La suite* $(f_n)_{n>0}$ *de fonctions en escalier définie ci-dessus converge uniformément vers* f .
(b) *Si* $(g_n)_{n>0}$ *est une autre suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers* f , *alors la suite* $(J_n)_{n>0}$ *des intégrales*

$$J_n = \int_a^b g_n(x)dx$$

converge vers le nombre réel I .
Ce nombre réel I *est appelé intégrale de* f *entre* a *et* b *et noté*

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

[1] Pour cela, il faut noter que
• on obtient le découpage de l'intervalle [a,b] au rang n+1 en divisant en deux chacun des intervalles S_k donnés par le découpage de l'intervalle [a,b] au rang n.
• le minimum des valeurs d'une fonction sur un intervalle augmente si on réduit l'intervalle.

En fait, seul (a) est difficile; sa démonstration requiert un résultat important de topologie, le théorème de Heine: une fonction continue sur un intervalle [a,b] est uniformément continue (Cf. Exercice 48). Nous admettrons (a).

Preuve de (b). Il s'agit de démontrer que la suite de terme général J_n tend vers I. On écrit

$$J_n - I = \int_a^b g_n(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx + \int_a^b f_n(x)dx - I$$
$$= \int_a^b (g_n(x)-f_n(x))dx + \int_a^b f_n(x)dx - I$$

L'inégalité triangulaire et la propriété (I_7) (que l'on sait vraie pour les fonctions en escalier), donnent la majoration:

$$(*) \qquad |J_n - I| \leq \int_a^b |g_n(x)-f_n(x)|dx + \left| \int_a^b f_n(x)dx - I \right|$$

Les suites de fonctions en escalier $(f_n)_{n>0}$ et $(g_n)_{n>0}$ convergent uniformément vers f (par hypothèse pour g et d'après (a) pour f). Par définition, il existe deux suites $(\varepsilon_n)_{n>0}$ et $(\alpha_n)_{n>0}$ tendant vers 0 et telles que, pour tout $x \in [a,b]$

$$\begin{cases} |f(x)-f_n(x)| < \varepsilon_n \\ |f(x)-g_n(x)| < \alpha_n \end{cases}$$

On en déduit que, pour tout $x \in [a,b]$

$$|f_n(x)-g_n(x)| < \varepsilon_n+\alpha_n,$$

ce qui, reporté dans (*), conduit à

$$|J_n - I| \leq (b-a)(\varepsilon_n+\alpha_n) + \left| \int_a^b f_n(x)dx - I \right|$$

Chacun des deux termes du membre de droite tend vers 0. On conclut donc que $|J_n - I|$ tend vers 0.

Il reste pour terminer la construction à vérifier que l'intégrale ainsi définie possède les propriétés (I_1) jusqu'à (I_4). Nous allons démontrer (I_2) et (I_4) et laissons en exercice (I_1) et (I_3).

Preuve de (I_2). On suppose f continue et positive sur [a,b]. Il s'agit de montrer que l'intégrale de f entre a et b est positive. Il suffit de remarquer que la suite $(f_n)_{n>0}$ de fonctions en escalier approchant f, qu'on a défini plus haut, est, sous l'hypothèse "$f \geq 0$ sur [a,b]", une suite de fonctions positives sur [a,b]. En conséquence, on a pour tout $n > 0$:

$$I_n = \int_a^b f_n(x)dx \geq 0$$

En passant à la limite, on obtient

$$I = \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Preuve de (I_4). Soient f et g deux fonctions continues sur [a,b]. Soient $(\varphi_n)_{n>0}$ et $(\psi_n)_{n>0}$ deux suites de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f et g. Donnons nous deux nombres réels λ et μ. Pour tout $n > 0$, la fonction $\lambda\varphi_n+\mu\psi_n$ est une fonction en escalier. Nous disons d'autre part que la suite $(\lambda\varphi_n+\mu\psi_n)_{n>0}$ converge uniformément vers $\lambda f+\mu g$.

[En effet, si pour tout $n > 0$, φ_n approche f à ε_n près et ψ_n approche f à α_n près, alors, il résulte de l'inégalité

$$|(\lambda f+\mu g)-(\lambda\varphi_n+\mu\psi_n)| = |\lambda(f-\varphi_n)+\mu(g-\psi_n)| \leq |\lambda|\ |f-\varphi_n| + |\mu|\ |g-\psi_n|$$

que $\lambda\varphi_n+\mu\psi_n$ approche $\lambda f+\mu g$ à $|\lambda|\varepsilon_n+|\mu|\alpha_n$ près. La suite $(|\lambda|\varepsilon_n+|\mu|\alpha_n)_{n>0}$ a pour limite 0 puisque les suites $(\varepsilon_n)_{n>0}$ et $(\alpha_n)_{n>0}$ tendent vers 0 par hypothèse.]

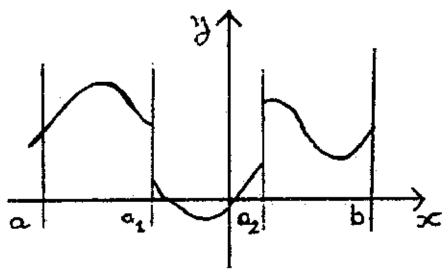
On écrit ensuite la propriété (I_4) pour les fonctions en escalier φ_n et ψ_n:

$$\int_a^b \lambda\varphi_n(x)+\mu\psi_n(x)dx = \lambda \int_a^b \varphi_n(x)dx + \mu \int_a^b \psi_n(x)dx$$

En passant à la limite, on obtient

$$\int_a^b \lambda f(x)+\mu g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Fonctions continues par morceaux



On étend la définition de l'intégrale aux fonctions "continues par morceaux" de la façon suivante. Une fonction f est continue par morceaux sur [a,b] s'il existe une subdivision

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b.$$

de l'intervalle [a,b] telle que les restrictions $f|]a_k,a_{k+1}[$ $(1 \leq k \leq n-1)$ soient continues et admettent des limites finies à droite de a_k et à gauche de a_{k+1}. Pour tout $k = 1,\ldots,n-1$, la fonction $f|]a_k,a_{k+1}[$ peut être prolongée en une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a_k,a_{k+1}]$. On pose alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \ldots + \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{b} f(x)dx$$

CHAPITRE 7

DERIVEES

§1. DERIVEES.

1.1 Définitions.

Une variable Soit f(x) une fonction d'une variable et $x_0 \in D_f$. Le taux d'accroissement de f en x_0 entre les points x_0 et $x_0+\Delta x$ est défini par (Cf. Ch.3 §4.4)

$$\Delta f/\Delta x = (\Delta f/\Delta x)(x_0,\Delta x) = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

C'est une fonction de Δx, qui n'est pas définie pour $\Delta x = 0$.

DEFINITION 1.1 *La fonction* f *est dite dérivable au point* $x_0 \in D_f$ *si le taux d'accroissement admet une limite finie quand* Δx *tend vers* 0. *On appelle alors dérivée de* f *en* x_0 *ce nombre réel limite et on le note* $f'(x_0)$ *ou* $(df/dx)(x_0)$. *En résumé*

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

La correspondance $x \to f'(x)$ *est appelée fonction dérivée de* f *et notée* f'.

Exemple 1 Etudier la dérivabilité des fonctions "simples".

Solution (a) $f(x) = x^2$. Soit x_0 un nombre réel quelconque. On calcule le taux d'accroissement $\Delta f/\Delta x$:

$$\Delta f/\Delta x = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - (x_0{}^2)}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0+\Delta x$$

On fait tendre Δx vers 0:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f/\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0} 2x_0+\Delta x = 2x_0$$

<u>Conclusion</u>: f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 2x_0$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$. Pour $x_0 \geq 0$, on a

$$\Delta f/\Delta x = \frac{\sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{(\Delta x)(\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

<u>Conclusion</u>: • si $x_0 > 0$, f est dérivable et $f'(x_0) = -1/2\sqrt{x_0}$

• Si $x_0 = 0$, $\Delta f/\Delta x$ tend vers $+\infty$ quand Δx tend vers 0; f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

DEFINITION 1.2 *Si le taux d'accroissement a une limite à droite (resp. à gauche) de x_0, on dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) de x_0. On appelle dérivée à droite (resp., à gauche) de x_0 ces limites; on les note $f_d'(x_0)$ (resp., $f_g'(x_0)$).*

Du Th.1.5 du Ch.4, il résulte:

PROPOSITION 1.3 *Une fonction f est dérivable en un point x_0 ssi f est dérivable à droite et à gauche de x_0 et $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$.*

Exemple 2 La fonction $|x|$ est dérivable à droite et à gauche de 0: $f_d'(0) = 1$ et $f_g'(0) = -1$. Mais elle n'est pas dérivable en 0. Est-elle dérivable en $x_0 \neq 0$?

Remarque. Si f est dérivable en un point x_0, alors f est continue en x_0.

[**Preuve**. On écrit $\Delta f = (\Delta x)(\Delta f/\Delta x)$. Quand Δx tend vers 0, Δf tend vers $0.f'(x_0) = 0$. On a donc:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$$

Ce qui est l'exacte définition de la continuité de f en x_0.]

La réciproque est fausse (voir l'exemple 2).

n variables Soient $f(x_1,\dots,x_n)$ une fonction de n variables et $m_0(a_1,\dots,a_n)$ un point dans le domaine D_f de f. Considérons la fonction partielle

$$f(\bullet,a_2,\dots,a_n) : x_1 \to f(x_1,a_2,\dots,a_n)$$

C'est une fonction de la variable x_1. Si elle est dérivable en $x_1 = a_1$, sa dérivée est appelée dérivée partielle de f par rapport à x_1 au point $m_0 = (a_1,\dots,a_n)$ et est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,\dots,a_n) \quad \text{ou} \quad f'_{x_1}(a_1,\dots,a_n).$$

Notons $(\Delta f/\Delta x_1)(a_1,\dots,a_n)$ le taux d'accroissement de la fonction partielle $f(\bullet,a_2,\dots,a_n)$ en $x_1 = a_1$, c'est à dire:

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x_1}\right)(a_1,\dots,a_n) = \frac{f(a_1+\Delta x_1,a_2,\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_n)}{\Delta x_1}$$

Alors, par définition, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,\dots,a_n) = \lim_{\Delta x_1\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x_1}\right)(a_1,\dots,a_n)$$

Cette définition se généralise.

DEFINITION 1.4 *Pour* $i = 1,\ldots,n$, *la dérivée partielle de* f *par rapport à la* i-ième *variable au point* $m_0 = (a_1,\ldots,a_n)$ *est définie comme la dérivée en* $x_i = a_i$, *quand elle existe, de la fonction partielle* $f(a_1,\ldots,a_{i-1},\bullet,a_{i+1},\ldots,a_n)$. *On la note*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\ldots,a_n) \quad ou \quad f'_{x_i}(a_1,\ldots,a_n)$$

Par définition, on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\ldots,a_n) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x_i}\right)(a_1,\ldots,a_n)$$

où

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x_i}\right)(a_1,\ldots,a_n) = \frac{f(a_1,\ldots,a_i+\Delta x_i,\ldots,a_n) - f(a_1,\ldots,a_n)}{\Delta x_i}$$

Exemple 3 Calculer les dérivées partielles de $f(x,y) = yx^2+y^3$ au point (1,2), au point (x_0,y_0).

Solution. • Par définition, $(\partial f/\partial x)(1,2)$ est la dérivée de la fonction partielle $f(x,2) = 2x^2+8$ en $x = 1$.

D'où $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4x|_{x=1} = 4$

De même, au point (x_0,y_0), on calcule $f(x,y_0)$:

$$f(x,y_0) = y_0x^2+y_0^3$$

$(\partial f/\partial x)(x_0,y_0)$ est la dérivée de cette fonction de x en $x = x_0$.

D'où $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2y_0x|_{x=x_0} = 2y_0x_0$

• Pour $(\partial f/\partial y)(x_0,y_0)$, on calcule $f(x_0,y)$:

$$f(x_0,y)) = x_0^2y+y^3$$

$(\partial f/\partial y)(x_0,y_0)$ est la dérivée de cette fonction de y en $y = y_0$.

D'où $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = (x_0^2+3y^2)|_{y=y_0} = x_0^2+3y_0^2$

En particulier, $(\partial f/\partial y)(1,2) = 13$.

Méthode pratique On calcule la dérivée partielle $(\partial f/\partial x)(x_0,y_0)$ (resp., $(\partial f/\partial x)(x_0,y_0)$) en dérivant $f(x,y)$ comme une fonction de x (resp., y), i.e., en considérant y (resp., x) comme constant, et en remplaçant ensuite x par x_0 et y par y_0. On laisse le lecteur énoncer la règle pour plus de deux variables.

Exemple 4 Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes

(a) $f(x,y) = 3xy^4+2x^2y^3+x^3-5$ aux points (x_0,y_0) et (2,-1)

(b) $f(x,y,z) = xyz + \sqrt{xy} + y/z$ aux points $(x_0,y_0) \in D_f$.

Note terminologique. En Economie, les quantités étudiées dépendent généralement de plusieurs facteurs. La dérivée partielle par rapport à un facteur donné est aussi appelé quantité marginale relative à ce facteur. Par exemple, si $Q = Q(K,L)$ est une fonction de production, la production marginale relative au capital est la dérivée partielle $(\partial Q/\partial K)$.

1.2 Calcul des dérivées.

Règles de calcul Les résultats suivants, qui se déduisent des théorèmes généraux sur les limites sont laissés en exercice.

PROPOSITION 1.5 (Opérations algébriques) _ *Soient* $f(x)$ *et* $g(x)$ *deux fonctions dérivables sur un intervalle* I *(i.e., en tout point de* I *). Alors*

(a) $f+g$, fg *sont dérivables sur* I *et*

$$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

(b) f/g *est dérivable en tout point* x *de* I *où* $g(x) \neq 0$ *et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

(c) *En particulier, on a*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$$

$$(kf)'(x) = k\ f'(x) \quad \textit{pour tout } k \in \mathbf{R}$$

$$(f^n)'(x) = n\ f'(x)f(x)^{n-1} \quad \textit{pour tout } n \in \mathbf{Z}$$

Exemple 5 Démontrer (c) à partir de (a) et (b).

PROPOSITION 1.6 (Composition des fonctions) _ *Soient* f *une fonction dérivable sur un intervalle ouvert* I *et* g *une fonction dérivable sur un intervalle ouvert* J *contenant* $f(I)$. *Alors* gof *est dérivable sur* I *et pour tout* x *dans* I , *on a*

$$(gof)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$$

Remarque. On peut préférer cette façon d'énoncer la Prop.1.6: sous les bonnes hypothèses, si $z = z(u)$ et $u = u(x)$ alors z est une fonction de x de dérivée

$$\frac{dz}{dx}(x) = \frac{dz}{du}(u)\ \frac{du}{dx}(x)$$

Exemple 6 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ (b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{2x+3}}$

(c) $f(x) = \mathrm{Log}(\mathrm{Log}(x))$ (d) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$

PROPOSITION 1.7 (Inversion des fonctions) _ *Soit* f *une fonction injective et dérivable sur un intervalle* I. *Alors la fonction réciproque* f^{-1} *est dérivable en tout point* y *de* f(I) *où* $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ *et on a*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Remarque. On peut préférer cette façon d'énoncer la Prop.1.7: sous les bonnes hypothèses, si $y = y(x)$ définit implicitement x en fonction de y et si $(dy/dx)(x) \neq 0$, alors la fonction x(y) est dérivable en $y = y(x)$ et

$$\frac{dx}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x)}$$

Exemple 7 Calculer la dérivée de la fonction exponentielle $g(x) = e^x$.

Solution. La fonction $g(x) = \exp(x)$ est la fonction réciproque de la fonction $f(x) = \mathrm{Log}(x)$, i.e, $g = f^{-1}$. Par définition, la fonction Log est de dérivée 1/x. La Prop.1.7 donne

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\frac{1}{g(y)}} = g(y)$$

On obtient le résultat bien connu: l'exponentielle coïncide avec sa dérivée.

Exemple 8 (a) Calculer la dérivée de la racine n-ième $g(x) = \sqrt[n]{x}$.
(b) En déduire la dérivée de x^r pour r un nombre rationnel.
(c) Déterminer la dérivée de x^α pour α un nombre réel quelconque.
(d) Donner une formule résumant (a), (b) et (c).

Dérivées usuelles En plus des règles ci-dessus, il faut connaître les dérivées des fonctions usuelles du Ch.3. On les a regroupées ci-dessous à gauche. Fréquemment, on les combine avec la Prop.1.6: si $u = u(x)$ et $g = f(u)$, alors g est une fonction de la variable x de dérivée $g' = u' f'(u)$. On obtient alors les règles de dérivation de la colonne de droite.

$(x^r)' = r\, x^{r-1}$ $(r \in \mathbf{R})$	$(u^r)' = r\, u'\, u^{r-1}$ $(r \in \mathbf{R})$
$(\exp(x))' = \exp(x)$	$(\exp(u))' = u' \exp(u)$
$(\mathrm{Log}\ x)' = 1/x$	$(\mathrm{Log}\ u)' = u'/u$

$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\mathrm{tg}\ x)' = 1+\mathrm{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$	$(\mathrm{tg}\ u)' = u'(1+\mathrm{tg}^2 u) = u'/\cos^2 u$
$(\mathrm{Arcsin}\ x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$	$(\mathrm{Arcsin}\ u)' = u'/\sqrt{1-u^2}$
$(\mathrm{Arcos}\ x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$	$(\mathrm{Arcos}\ u)' = -u'/\sqrt{1-u^2}$
$(\mathrm{Arctg}\ x)' = 1/(1+x^2)$	$(\mathrm{Arctg}\ u)' = u'/(1+u^2)$

Attention! Le domaine de validité des formules ci-dessus est le domaine de définition des fonctions considérées, sauf dans les cas suivants:
- $f(x) = x^r$ et $0 < r < 1$: f est définie, continue mais non dérivable en 0.
- $f(x) = \mathrm{Arcsin}(x)$ ou $f(x) = \mathrm{Arcos}(x)$: en 1 et en -1, f est définie, continue mais pas dérivable.

Exemple 9 (a) En revenant à la définition, démontrer la formule $(\sin(x))' = \cos(x)$. Déduire ensuite grâce aux Prop.1.5 et Prop.1.6 les dérivées de $\cos(x)$ et de $\mathrm{tg}(x)$ (Ecrire $\cos(x) = \sin(\pi/2-x)$ et $\mathrm{tg}(x) = \sin(x)/\cos(x)$).

(b) En utilisant la Prop.1.7, démontrer les formules des trois dernières lignes du tableau précédent (Utiliser Ch.6 Exercice 34).

Exemple 10 Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	(b) $f(x) = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$
(c) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right)$	(d) $f(x) = \sin(3x)\cos(4x)$
(e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$	(f) $f(x) = x^2\mathrm{Log}(x)$
(g) $f(x) = \mathrm{Log}(\mathrm{Log}(x))$	(h) $f(x) = x^x$
(i) $f(x) = 2^{x^2+x}$	(j) $f(x) = \mathrm{Log}\lvert x\rvert$

Exemple 11 Soit $f(x) = \exp(-1/x^2)$. Montrer que f se prolonge par continuité en $x = 0$. Etudier alors la dérivabilité de la fonction f. Déterminer f'.

Solution. On a:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

On prolonge f par continuité en posant $f(0) = 0$.
D'après les résultats généraux sur la dérivabilité (Prop.1.5, 1.6 et 1.7), la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

En x = 0, les théorèmes généraux ne s'appliquent pas; il faut revenir à la définition. Le taux d'accroissement de f en 0 vaut

$$\Delta f/\Delta x = \frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \frac{\exp(-1/(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

Il tend vers 0 quand Δx tend vers 0. Donc f est dérivable en 0 et f'(0) = 0. En conclusion, la dérivée f' de f est la fonction définie par

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exemple 12 Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes

(a) $f(x) = |x-1|$ (b) $f(x) = \sqrt{(x-1)^2(x+2)}$

(c) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ (d) $f(x) = \begin{cases} 2x-x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2-2x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Solution. (b) $f(x) = |x-1|\sqrt{x+2} = \begin{cases} (x-1)\sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 1 \\ (1-x)\sqrt{x+2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

D'après les théorèmes généraux, f est dérivable sur]-2,1[U]1,+∞[et

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} + \frac{(x-1)}{2\sqrt{x+2}} & \text{si } x \in]1,+\infty[\\ -\sqrt{x+2} - \frac{(x-1)}{2\sqrt{x+2}} & \text{si } x \in]-2,+1[\end{cases}$$

En -2 et 1, il faut revenir à la définition. En -2, le taux d'accroissement vaut:

$$\Delta f/\Delta x = \frac{f(-2+\Delta x)-f(-2)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x-3|\sqrt{\Delta x}}{\Delta x}$$

Il tend vers $3.\infty = \infty$ quand Δx tend vers 0; f n'est donc pas dérivable en -2.

En 1, le taux d'accroissement vaut:

$$\Delta f/\Delta x = \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|\sqrt{3+\Delta x}}{\Delta x}$$

Quand $\Delta x \to 0$, $\Delta f/\Delta x$ est équivalent à $\sqrt{3}|\Delta x|/\Delta x$. On conclut que

- f n'est pas dérivable en 1
- f est dérivable à droite de 1 et $f_d'(1) = \sqrt{3}$
- f est dérivable à gauche de 1 et $f_g'(1) = -\sqrt{3}$

Les résultats de ce paragraphe ont été énoncés pour des fonctions d'une variable mais s'appliquent au calcul des dérivées partielles en général: en effet, celles ci sont définies comme les dérivées des fonctions partielles, qui sont des fonctions d'une variable.

Exemple 13 Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

(a) $f(x,y) = e^{xy}+y\sin(x)+x\mathrm{Log}(y)$ (b) $f(x,y) = xy/x^2+y^2$

(c) $f(x,y) = e^{x^2}\cos(y)$ (d) $f(x,y) = x^{y^2}$

(e) $f(x,y,z) = (xy)^{yz}$ (f) $f(x,y,z) = \mathrm{Arctg}(y/x)$

Exemple 14 Soit f(x,y) la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{3x^4+2y^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f a des dérivées partielles par rapport à x et y en tout point de $\mathbf{R}^2$.

Solution. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, les théorèmes généraux s'appliquent; c'est un simple calcul. Au point (0,0), il faut revenir à la définition. Les fonctions partielles au point (0,0) sont les fonctions

$$f(x,0) = 3x^2 \quad \text{et} \quad f(0,y) = 2y$$

Elles sont dérivables respectivement en x = 0 et y = 0. Donc f a des dérivées partielles par rapport à x et y qui valent

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 6x|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2|_{y=0} = 2$$

1.3 Dérivées d'ordre supérieur.

Une variable Soit f une fonction d'une variable dérivable sur un ensemble I. La fonction dérivée $f': x \to f'(x)$ est une fonction d'une variable définie sur un sous-ensemble de I. On peut à nouveau dériver f'; la dérivée de f' est une nouvelle fonction qu'on note f" ou $f^{(2)}$. De façon plus générale, pour tout entier $n \geq 0$, la dérivée n-ième $f^{(n)}$ de f est définie par:

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ f^{(n)} = (f^{(n-1)})' \end{cases}$$

On dit que f est n-fois dérivable sur un ensemble E si $f^{(n)}$ est définie en tout point de E.

Exemple 15 Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions ($n \in \mathbf{N}$).

(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = x^k$ (c) $f(x) = 1/(1+x)$

(d) $f(x) = 1/(1-x)$ (e) $f(x) = \sin(ax+b)$ (f) $f(x) = e^{ax}$

Le résultat suivant permet de calculer la dérivée n-ième d'un produit. Sa démonstration se fait par récurrence. Nous la laissons en exercice.

PROPOSITION 1.8 (Formule de Leibnitz) _ *Si* f *et* g *sont* n *fois dérivables sur un ensemble* E , *alors*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, f^{(p)} \, g^{(n-p)}$$

où C_n^p *désigne le coefficient binomial* $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exemple 16 Calculer la dérivée n-ième de f(x) = xsin(x).

n variables Soit $f(x_1,...,x_n)$ une fonction de n variables. Les n correspondances

$$(x_1,...,x_n) \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,...,x_n) \quad i = 1,...,n$$

définissent n nouvelles fonctions de n variables, appelées fonctions dérivées partielles de f par rapport à x_i et notées $(\partial f/\partial x_i)$, $i = 1,...,n$. Leur domaine de définition est l'ensemble des points $(x_1,...,x_n)$ de D_f où $(\partial f/\partial x_i)(x_1,...,x_n)$ est défini, $i = 1,....,n$.

Exemple 17 Soit $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Montrer que le domaine de définition des deux dérivées partielles $(\partial f/\partial x)$ et $(\partial f/\partial y)$ est $R^2\backslash\{(0,0)\}$.

Les dérivées partielles $(\partial f/\partial x_i)$, $i = 1,...,n$ peuvent à leur tour être dérivées par rapport à chacune des variables x_i, $i = 1,...,n$. Les dérivées partielles des dérivées partielles sont appelées dérivées partielles d'ordre 2 de f. Nous utiliserons les notations suivantes.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} & \text{si } i \neq j \\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} & \end{cases}$$

De proche en proche, on définit les dérivées partielles de d'ordre un entier $k \geq 0$ quelconque. Elles sont au nombre de n^k.

Exemple 18 Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f définie par $f(x,y) = e^{xy}+y\sin(x)+x\mathrm{Log}(y)$

Solution. On trouve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy}+y\cos(x)+\mathrm{Log}(y)) = y^2e^{xy}-y\sin(x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}+y\cos(x)+\mathrm{Log}(y)) = xye^{xy}+e^{xy}+\cos(x)+\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}+\sin(x)+\frac{x}{y}) = xye^{xy}+e^{xy}+\cos(x)+\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy} + \sin(x)+\frac{x}{y}) = x^2e^{xy}-\frac{x}{y^2}$$

On constate que les dérivées "croisées" $(\partial^2 f/\partial y\partial x)$ et $(\partial^2 f/\partial x\partial y)$ sont égales. Il s'agit d'un fait général.

THEOREME 1.9 (Théorème de Schwarz) _ *Soient* $f(x_1,...,x_n)$ *une fonction de* n *variables et* $m_o(a_1,...,a_n)$ *un point de* D_f. *Si les dérivées partielles d'ordre 2 de* f, $(\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i)$ et $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)$ *sont définies sur un voisinage de* m_o *et sont continues en* m_o, *alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a_1,...,a_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1,...,a_n)$$

Dans la pratique, les hypothèses du Th.1.9 sont presque toujours satisfaites. On retiendra cependant qu'en toute généralité, le résultat devient faux si on se dispense de toute hypothèse. Le Théorème de Schwarz est assez difficile à démontrer; nous l'admettrons.

Exemple 19 Démontrer que le Théorème de Schwarz est vrai pour les fonctions polynomiales.

Exemple 20 Soit $f(x,y) = \sin(x^2-y^2)$. Montrer les identités suivantes.

(a) $y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$

(c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -4(x^2+y^2)f(x,y)$

1.3 Primitives et intégrales.

Dans ce paragraphe, ne sont considérées que des fonctions d'une variable. Soit $f(x)$ une fonction définie sur un ensemble E. On appelle primitive de f sur E toute fonction F dont la dérivée vaut f sur E, i.e., $F'(x) = f(x)$, pour tout $x \in E$.

Exemple 21 Soit $f(x) = x^n$. La fonction $F(x) = (x^{n+1})/n+1$ est une primitive de f sur **R**. Les primitives de f sur **R** sont toutes les fonctions qui diffèrent d'une constante de F.

Exemple 22 Montrer que la fonction définie par $f(x) = \mathrm{Log}|x|$ est une primitive de $1/x$ sur $\mathbf{R}^*$.

Le résultat suivant est fondamental.

THEOREME 1.10 *Soit* f *une fonction d'une variable continue sur un intervalle* I.
(a) *Si* F_1 *et* F_2 *sont deux primitives de* f, *alors la fonction* F_1-F_2 *est constante sur* I.

(b) *Pour tout* $a \in I$, *il existe une unique primitive* F *de* f *qui s'annule en* a. *Cette primitive est donnée par la formule*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Démonstration. (a) On a $(F_1-F_2)' = f-f = 0$. Une fonction dont la dérivée sur un intervalle I est nulle, est constante sur I. (Ce résultat classique sera redémontré (Cf. Ch.8 Cor.1.5)).

(b) Il s'agit de montrer que la fonction F donnée dans l'énoncé du Th.1.10 est dérivable en tout point $x_0 \in I$ et que $F'(x_0) = f(x_0)$. Le taux d'accroissement de F en x_0 vaut

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}$$

On veut montrer que $\Delta F/\Delta x$ tend vers $f(x_0)$ quand Δx tend vers 0. Pour cela, on cherche à évaluer $|(\Delta F/\Delta x)-f(x_0)|$. On a

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} - \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt}{\Delta x} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t)-f(x_0))\,dt}{\Delta x}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la continuité de f en x_0, il existe un voisinage $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ de x_0 sur lequel f prend des valeurs $f(t)$ vérifiant $|f(t)-f(x_0| < \varepsilon$. Supposons $|\Delta x| < \alpha$. On obtient alors

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| \le \frac{\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varepsilon\,dt\right|}{|\Delta x|}) = \varepsilon.$$

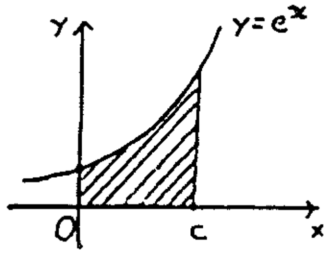
C'est ce qu'il fallait démontrer.

Exemple 23 Quelle est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f(x) = 1/x$, qui s'annule en $x = 1$, en $x = 2$?

Le corollaire 1.11 est une conséquence très importante du Th.1.10: ce résultat permet de ramener tout calcul d'aires, de volumes, plus généralement tout calcul intégral à un calcul de primitives.

COROLLAIRE 1.11 *Soit* $f(x)$ *une fonction continue sur l'intervalle* $[a,b]$ *et* F *une primitive de* f *sur* $[a,b]$. *Alors l'intégrale de* a *à* b *de la fonction* f *peut être calculée par la formule suivante*:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$$



Note. Il est usuel de noter $[F(t)]_a^b$ le terme de droite.

Exemple 24 Trouver le nombre réel c tel que l'aire de la région plane limitée par les courbes d'équation $x = 0$, $x = c$, $y = 0$ et $y = e^x$ vaut 1.

Nous nous bornerons à donner deux règles élémentaires du calcul des primitives (Prop.1.12 et Prop.1.13 ci-dessous). Pour des exemples pas trop compliqués, la connaissance des règles de dérivation, qu'on "applique à l'envers", est souvent suffisante. On verra dans le cours de 2nde année des méthodes permettant le calcul des primitives de certains types de fonctions (fractions rationnelles, fonctions trigonométriques etc...).

Exemple 25 Déterminer les primitives de $f(x) = xe^{x^2}$.

Solution. x est, à un facteur 2 près, la dérivée de x^2. Donc, à un facteur <u>constant</u> près, f(x) est de la forme ue^u où $u = x^2$, qui est la dérivée de e^u. Dérivons e^{x^2}:

$$(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$$

On corrige en divisant par 2. La fonction $e^{x^2}/2$ est une primitive de f(x); les primitives de f(x) sont les fonctions de la forme $e^{x^2} + c$, où $c \in \mathbf{R}$.

On peut préférer, pour ce type d'exercices, faire un changement de variables, c'est-à-dire appliquer le résultat suivant.

PROPOSITION 1.12 *Soient* u(t) *une fonction dérivable et de dérivée continue sur un intervalle* $[\alpha,\beta]$ *et* f *une fonction continue sur l'intervalle image* $u([\alpha,\beta])$. *On a alors, pour tout* $x \in [\alpha,\beta]$

$$\int_\alpha^x f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(\alpha)}^{u(x)} f(u)du$$

On retiendra qu'à droite comme à gauche, les bornes d'intégration sont les bornes du segment où varie la variable et que la "différentielle" (i.e., l'expression complète "f(•)d•") à intégrer est la même; seule change son expression en fonction de la variable. La notion de différentielle ainsi que les règles de différentiation seront précisées au §2. La démonstration de la Prop.1.12 est proposée en exercice (Cf. Exercice 19).

Exemple 26 Refaire l'exemple 25 en utilisant la Prop.1.12.

Solution. Une primitive de xe^{x^2} est donnée par la formule

$$F(x) = \int_0^x te^{t^2}dt$$

On pose $u = t^2$. On a donc $du = 2tdt$. On exprime ensuite la différentielle $te^{t^2}dt$ en fonction de u:

$$te^{t^2}dt = te^u\frac{du}{2t} = \frac{1}{2}e^u du$$

Les nouvelles bornes pour u sont 0 et x^2. La Prop.1.12 donne alors

$$F(x) = \int_0^x te^{t^2}dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{2}e^u du = [\frac{1}{2}e^u du]_0^{x^2} = \frac{1}{2}(e^{x^2}-1)$$

Conclusion: La fonction $e^{x^2}/2$ est une primitive de f(x).

Terminons en rappelant une règle classique: la règle d'intégration par parties.

PROPOSITION 1.13 *Soient* u(x) et v(x) *deux fonctions dérivables et de dérivée continue sur un intervalle* [a,b] . *Alors, pour tout* $x \in [a,b]$, *on a:*

$$\int_a^x u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x u(t)v'(t)dt$$

Démonstration. La formule s'écrit aussi

$$\int_a^x (u'(t)v(t)+u(t)v'(t))dt = [u(t)v(t)]_a^x$$

Elle dit simplement que la fonction u(t)v(t) est une primitive de u'(t)v(t)+u(t)v'(t) sur l'intervalle [a,b].

Exemple 27 Trouver une primitive de la fonction xsin(x).

Solution. On pose

$$\begin{cases} u'(t) = \sin(t) \\ v(t) = t \end{cases} \quad \text{On a donc} \quad \begin{cases} u(t) = -\cos(t) + c \\ v'(t) = 1 \end{cases}$$

La Prop.1.13 fournit

$$\int_0^x t\sin(t)dt = [-t\cos(t)]_0^x - \int_0^x -\cos(t)dt$$

$$= [-t\cos(t)]_0^x + [\sin(t)]_0^x = [-t\cos(t)+\sin(t)]_0^x$$

Conclusion: la fonction -xcos(x)+sin(x) est une primitive de la fonction xsin(x).

Remarque. Ne pas oublier qu'on peut toujours vérifier un calcul de primitive en dérivant le résultat obtenu.

Primitives usuelles

Fonction $f(t)$	Primitive $F(t)$ sur tout intervalle $I \subset D_f$ (à une constante près)
$t^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$1/t$	$\ln\lvert t\rvert$ (logarithme népérien)
$\cos(t)$	$\sin(t)$
$\sin(t)$	$-\cos(t)$
$\dfrac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \mathrm{tg}^2(t)$	$\mathrm{tg}(t)$
$1/\sin^2(t)$	$-1/\mathrm{tg}(t)$
$\mathrm{tg}(t)$	$-\ln\lvert\cos(t)\rvert$
$1/\mathrm{tg}(t)$	$\ln\lvert\sin(t)\rvert$
$e^{mt} \quad (m \neq 0)$	$\dfrac{e^{mt}}{m}$
$a^t \quad (a > 0,\ a \neq 1)$	$\dfrac{a^t}{\ln(a)}$
$1/(t^2+1)$	$\mathrm{arctg}(t)$
$1/(t^2+a^2) \quad (a \neq 0)$	$(1/a)\mathrm{arctg}(t/a)$
$1/\sqrt{1-t^2}$	$\arcsin(t)$
$1/\sqrt{t^2+b} \quad (b \neq 0)$	$\ln\lvert t + \sqrt{t^2+b}\rvert$
$1/\cos(t)$	$\ln\lvert\mathrm{tg}(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\rvert$
$1/\sin(t)$	$\ln\lvert\mathrm{tg}(\frac{t}{2})\rvert$

§2. APPROXIMATION LOCALE ET DIFFERENTIELLE.

2.1 Indicateurs de croissance d'une fonction d'une variable.

Soit f(x) une fonction dérivable d'une variable. Nous avons défini au Ch.3 (§4.4) un certain nombre de quantités permettant d'apprécier la croissance de f. Rappelons les.

Indicateurs "réels" correspondant à un accroissement Δx:	Indicateurs instantanés.
Le taux d'accroissement (absolu)	Le taux d'accroissement instantané
$\frac{\Delta f}{\Delta x}$	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = f'(x)$
Le taux d'accroissement relatif ou taux de croissance.	Le taux d'accroissement relatif instantané ou taux de croissance instantané
$\frac{1}{f}\frac{\Delta f}{\Delta x}$	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{f}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{f}\frac{df}{dx} = \frac{f'}{f}$
L'élasticité de f par rapport à x entre x et x+Δx	L'**élasticité** (instantanée) de f par rapport à x
$\frac{\Delta f/f}{\Delta x/x}$	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f/f}{\Delta x/x} = \frac{(df/dx)}{f/x} = x\frac{f'}{f}$

Elasticité Ouvrons une parenthèse sur ce nouvel indicateur. Si y = y(x) est une fonction de x, dérivable et à valeurs > 0, l'élasticité de y par rapport à x, notée $e_{y/x}$, est définie par

$$e_{y/x} = \frac{(dy/dx)}{y/x} = \frac{xy'}{y}$$

Cette quantité s'obtient comme limite quand Δx tend vers 0 des rapports

$$\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$$

des accroissements relatifs de y et de x. Le sens de l'élasticité est le suivant. Si y est d'élasticité $e_{y/x}(x_0) = e$ au point x_0, alors, une variation relative de r % (= $\Delta x/x$) de x, au voisinage de x_0, induira une variation relative de y à peu près égale à er % (= $\Delta y/y$).

Exemple 1 Déterminer l'élasticité des fonctions suivantes.
(a) $y = ax$ (b) $y = x^{\alpha}$ (c) $y = e^{\alpha x}$ (d) $y = a/x$

Exemple 2 Déterminer les fonctions y dérivables sur $\mathbf{R}_+^*$ vérifiant
(a) $e_{y/x} = \alpha$ (b) $e_{y/x} = \alpha x$

Solution. (a) On a $e_{y/x} = \alpha$ ssi $xy'-\alpha y = 0$. On sait que la fonction x^{α} est solution. Calculons la dérivée de $(x^{-\alpha}y)$:

$$(x^{-\alpha}y)' = x^{-\alpha}\, y' - \alpha x^{-\alpha-1} y = x^{-\alpha-1}(xy'-\alpha y) = 0$$

La fonction $(x^{-\alpha}y)$ est donc constante sur $\mathbf{R}_+^*$. C'est-à-dire:

$$(x^{-\alpha}y) = k \text{ i.e., } y = k\, x^{\alpha}$$

Les fonctions solutions sont donc celles de la forme $k\, x^{\alpha}$.

Si $y = y(x_1,...,x_n)$ est une fonction de n variables, l'élasticité de y par rapport à x_i, notée e_{y/x_i}, est définie comme l'élasticité de la i-ième fonction partielle $y(x_1,...,x_{i-1},\bullet,x_{i+1},...,x_n)$, i.e., par

$$e_{y/x_i} = \frac{(\partial y/\partial x_i)}{y/x_i} = \frac{x_i(\partial y/\partial x_i)}{y}$$

L'élasticité présente 2 propriétés intéressantes pour le calcul.

PROPOSITION 2.1 (a) *Si* y_1 *et* y_2 *sont deux fonctions de* x, *alors*

$$e_{(y_1y_2)/x} = e_{y_1/x} + e_{y_2/x}$$

(b) *Si* $y = y(u)$ *et* $u = u(x)$, *alors*

$$e_{y/x} = e_{y/u}\, e_{u/x}$$

Preuve. C'est une simple vérification.

(a) $$e_{y_1y_2/x} = \frac{x(y_1y_2)'}{y_1y_2} = \frac{x(y_1'y_2+y_1y_2')}{y_1y_2} = \frac{xy_1'}{y_1} + \frac{xy_2'}{y_2} = e_{y_1/x} + e_{y_2/x}$$

(b) $$e_{y/x} = \frac{(dy/dx)}{y/x} = \frac{(dy/du)(du/dx)}{(y/u)(u/x)} = \frac{(dy/du)}{(y/u)}\,\frac{(du/dx)}{(u/x)} = e_{y/u}\, e_{u/x}$$

L'élasticité est une donnée fréquemment utilisée en Economie. L'un de ses avantages est qu'elle ne dépend pas des unités choisies pour x et y, contrairement au taux d'accroissement.

Exemple 3 Si le baril de pétrole vaut 20 dollars, quel est le prix en francs d'un hectolitre de pétrole (on choisira 1 \$ = 6 F et 1 baril = 150 L)? La demande exprimée en barils, d'un pays importateur, dépend du prix p_1 du pétrole, exprimé en dollars par barils, selon la formule

$$D_1(p_1) = 10^5(5 - 0{,}5\, p_1)$$

Exprimer cette même fonction de demande en fonction du prix p_2 exprimé en francs par hectolitre. On obtient une fonction $D_2(p_2)$. Montrer que

$$\frac{dD_1}{dp_1}(p_1) \neq \frac{dD_2}{dp_2}(p_2)$$

mais que

$$e_{D_1/p_1}(p_1) = e_{D_2/p_2}(p_2)$$

Tracer l'une des courbes $e_{D_i/p_i}(p_i)$, $i = 1,2$ en précisant les unités choisies.

Exemple 4 Soient $y = y(x)$, $t = ax$ et $z = by$. Montrer que:

$$e_{y/x} = e_{z/t}.$$

On utilise aussi l'élasticité en Economie pour apprécier par exemple comment varient les biens par rapport aux prix et au revenu.

Exemple 5 Les demandes A et B de deux biens dépendent de leurs prix unitaires p et q et du revenu R de l'agent. C'est-à-dire,

$$\begin{cases} A = A(p,q,R) \\ B = B(p,q,R) \end{cases}$$

Les élasticités $e_{A/p}$, $e_{A/q}$, $e_{A/R}$ sont appelées respectivement élasticité prix direct, élasticité prix croisé et élasticité revenu de A.

La théorie micro-économique montre que, généralement, l'élasticité prix direct est négative. C'est-à-dire,

$$e_{A/p} < 0 \quad \text{et} \quad e_{B/q} < 0$$

Quelques biens (Van Gogh ...) peuvent avoir une élasticité prix direct strictement positive et à l'autre extrême, des biens correspondant à des besoins vitaux peuvent être inélastiques, i.e., d'élasticité nulle par rapport à leur prix.

Les définitions ci-dessus conduisent aux classifications de biens suivantes:

Biens substituables et biens complémentaires.

• si $e_{A/q} < 0$ et $e_{B/p} < 0$, les biens sont dits complémentaires (par exemple automobiles et essence). Si on augmente le prix q, la demande A (et la demande B) vont diminuer.

• si $e_{A/q} > 0$ et $e_{B/p} > 0$, les biens sont dits substituables (par exemple deux mêmes produits de marque différente). Si on augmente le prix q, la demande A (au contraire de B) va augmenter.

Biens inférieurs et biens de luxe.

• si $e_{A/R} < 0$, le bien A est dit bien inférieur (par exemple les rutabagas). Si on augmente le revenu R, la demande A va diminuer.

• si $e_{A/R} > 1$, le bien B est dit bien de luxe (par exemple le tourisme, la culture). Si on augmente le revenu R, la demande A va augmenter, et dans une proportion plus importante que le revenu.

• Il n' a y pas de terminologie standard pour les biens "normaux", i.e., ceux pour lesquels on a $0 \leq e_{A/R} \leq 1$

Approximation locale

Le principe général de "l'approximation locale (d'ordre 1)" est le suivant. Les indicateurs instantanés sont définis comme limites quand Δx tend vers 0 des indicateurs "réels" correspondants. Par conséquent, quand l'accroissement Δx de la variable est petit, les indicateurs instantanés constituent une "bonne approximation" des indicateurs réels.

De façon précise, on a

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_o) = \frac{df}{dx}(x_o) + o(1)$$

où o(1) désigne un terme qui tend vers 0 quand Δx tend vers 0. Cela conduit à

$$(\,*\,) \qquad \Delta f = p\,\Delta x + \Delta x\ o(1) \quad \text{où on a noté } p = \frac{df}{dx}(x_o) = f'(x_o)$$

Autrement dit, l'accroissement $\Delta f = f(x_o+\Delta x)-f(x_o)$ peut être approximé par le terme "linéaire" $p\Delta x$. L'erreur qu'on commet est le terme $(\Delta x)o(1)$; il est négligeable devant Δx. L'approximation est donc d'autant meilleure que Δx est petit.

Exemple 6 Trouver une approximation du nombre réel $\delta = \sqrt{4{,}0008}$.

Solution. Si $f(x) = \sqrt{x}$, $x_o = 4$ et $\Delta x = 0{,}0008$, alors $\delta = f(x_o+\Delta x)$. On peut dire, en utilisant la continuité de f, que δ vaut à peu près $f(x_o) = 2$; c'est une approximation d'ordre 0. Mais on peut être plus précis en utilisant la formule d'approximation d'ordre 1 (*), i.e.,

$$\sqrt{x_o+\Delta x} - \sqrt{x_o} \approx \frac{1}{2\sqrt{x_o}}\Delta x$$

soit

$$\delta - 2 \approx \frac{1}{4}\ 0{,}0008$$

ce qui donne finalement

$$\delta \approx 2{,}0002.$$

Essentiellement donc, la connaissance de $f(x_o)$ et de $f'(x_o)$ donne une bonne approximation des valeurs de f en des points $x_o+\Delta x$ proches de x_o, en tout cas meilleure que celle que donne la simple connaissance de $f(x_o)$. Ce principe se généralise avec la formule de Taylor-Young (Cf. Ch.9): on peut obtenir d'encore meilleures approximations des valeurs $f(x_o+\Delta x)$ si on connaît d'autres dérivées de f en x_o.

Exemple 7 Expliciter la formule (*) pour les fonctions suivantes.
(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = 1/x$ (c) $f(x) = e^x$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
La tester sur des exemples.

2.2 Différentielle d'une fonction de n variables.

On cherche ici à généraliser la formule d'approximation (*) au cas d'une fonction $f(x_1,\dots,x_n)$ de n variables. Une première idée consiste à appliquer (*) à chacune des fonctions partielles qui sont des fonctions d'une variable. On obtient, pour $m_o(a_1,\dots,a_n)$ et pour tout $i = 1,\dots,n$,

$f(a_1,\ldots,a_i+\Delta x_i,\ldots,a_n)-f(a_1,\ldots,a_n) = p_i\,\Delta x_i + \Delta x_i\, o_i(1)$

où on a noté $p_i = (\partial f/\partial x_i)(m_o)$ et où $o_i(1)$ désigne un terme qui tend vers 0 quand Δx_i tend vers 0.

Mais cela suppose que seule la i-ième variable change, les autres étant fixées. Or on souhaite pouvoir estimer l'accroissement Δf quand toutes les variables bougent en même temps. On désignera par Δf l'accroissement

$$\Delta f = f(a_1+\Delta x_1,\ldots,a_n+\Delta x_n) - f(a_1,\ldots,a_n)$$

et

$$\Delta m = (\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)$$

le "vecteur" accroissement de la variable $m(x_1,\ldots,x_n)$.

THEOREME 2.2 *Si les fonctions dérivées partielles* $\partial f/\partial x_1,\ldots,\partial f/\partial x_n$ *existent sur un voisinage de* $m_o(a_1,\ldots,a_n)$ *et sont continues au point* m_o, *alors*

$$(\,*\,)\qquad \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(m_o)\,\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(m_o)\,\Delta x_n + ||\Delta m||\; o(1)$$

où $||\Delta m|| = \sqrt{(\Delta x_1)^2+\ldots+(\Delta x_n)^2}$ *est la norme du vecteur accroissement et* $o(1)$ *désigne un terme qui tend vers* 0 *quand* Δm *tend vers* $(0,\ldots,0)$.

Il s'agit d'un résultat d'approximation de l'accroissement Δf de la fonction entre les points $m_o(a_1,\ldots,a_n)$ et $m(a_1+\Delta x_1,\ldots,a_n+\Delta x_n)$. Quand le vecteur accroissement Δm est petit en norme, Δf peut être approximé par le terme

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(m_o)\,\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(m_o)\,\Delta x_n$$

Ce terme est appelé **différentielle totale** de f au point $m_o(a_1,\ldots,a_n)$ calculée pour l'accroissement $\Delta m = (\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)$ et est noté

$$df_{m_o}(\Delta m)$$

Le terme d'erreur $||\Delta m||\; o(1)$ est négligeable devant $||\Delta m||$, la longueur de l'accroissement. La formule (*) est appelée **identité de la différentielle.**

Notes. 1) L'expression $df_a(\Delta m)$ est une combinaison linéaire des variables $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$. C'est le sens du Th.2.2: on approxime la fonction f grâce à une application "linéaire" au voisinage de tout point m_o.

2) La preuve du Th.2.2 est proposée en exercice au Ch.8 (Cf. Exercice 9).

3) Si f vérifie les hypothèses du Th.2.2, alors f est nécessairement continue en m_o (S'inspirer du cas d'une variable (Cf. §1.1 Remarque)).

Exemple 8 Expliciter la formule (*) pour $f(x,y) = xy$ aux points $m_o(1,2)$ puis $m_o(a,b)$.

Solution. $(a+\Delta x)(b+\Delta y)-ab = b\Delta x + a\Delta y + ||\Delta m||o(1)$
(Ici, le terme reste $||\Delta m||o(1)$ peut être explicité: $||\Delta m||o(1) = \Delta x\Delta y$).

Exemple 9 Trouver une approximation des nombres réels suivants.
(a) $(1{,}9992)^2 \times 3{,}0012$ (b) $\sqrt{8{,}9986 \times 1{,}0008}$

Solution (a) On pose $f(x,y) = x^2y$, $x_o = 2$, $y_o = 3$, $\Delta x = -0{,}0008$ et $\Delta y = 0{,}0012$. Le nombre $\delta = (1{,}9992)^2 \times 3{,}0012$ est alors

$$\delta = f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y)$$

On l'approxime par

$$\delta \approx f(x_o,y_o) + p_1\Delta x + p_2\Delta y$$

où

$$\begin{cases} f(x_o,y_o) = 12 \\ p_1 = (\partial f/\partial x)(2,3) = 12 \\ p_2 = (\partial f/\partial y)(2,3) = 4 \end{cases}$$

d'où $\delta \approx 12 - 12 \times 0{,}0008 + 4 \times 0{,}0012 \approx 11{,}9952$.

Il est fréquent d'omettre dans les notations la référence au point m_o ainsi que celle à l'accroissement $\Delta m = (\Delta x_1,...,\Delta x_n)$. La différentielle de f peut être ainsi définie par

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

où $dm = (dx_1,...,dx_n)$ désigne un accroissement générique.

L'identité de la différentielle devient alors

$$\Delta f = df + ||dm||o(1)$$

Il est bien entendu que ces deux formules n'acquièrent de sens concret qu'une fois qu'ont été stipulés le point "base" m_o ainsi que l'accroissement $\Delta m = (\Delta x_1,...,\Delta x_n)$ auxquels on veut les appliquer.

Exemple 10 Deux automobiles roulant respectivement à 120 km/h et 118 km/h partent en même temps d'un point O pour aller respectivement en deux points A et B situés à 250 kms et 245 kms de O. Laquelle des deux arrivera en premier à destination? Donner une estimation de l'écart de temps.

Solution. La durée d'un parcours est donnée par la fonction l/v. Sa différentielle vaut

$$d(l/v) = dl/v - ldv/v^2$$

Posons $l_o = 250$, $l_o+\Delta l = 245$, $v_o = 120$, $v_o+\Delta v = 118$. L'écart de temps Δt entre les deux parcours est alors donné par

$$\Delta t = \frac{l_o+\Delta l}{v_o+\Delta v} - \frac{l_o}{v_o} \approx \frac{\Delta l}{v_o} - \frac{l_o(\Delta v)}{v_o^2}$$

c'est-à-dire, en secondes

$$\Delta t \approx 3600 \left(\frac{-5}{120} - \frac{250(-2)}{(120)^2}\right) \approx -25$$

L'automobile allant en B y atteindra son but à peu près 25 secondes avant l'autre.

Les notations que nous avons utilisées ne sont pas standard. Signalons les variantes suivantes:

• L'accroissement $(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ peut être noté $(h_1,\dots,h_n)$ (ou (h,k) s'il n'y a que $n = 2$ variables).

• La notation $m(x_1,\dots,x_n)$ est parfois mieux adaptée au contexte que $m(a_1+\Delta x_1,\dots,a_n+\Delta x_n)$. Le vecteur accroissement devient alors $\Delta m = (x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)$.

Exemple 11 En deux variables, l'identité de la différentielle s'écrit au point $(2,-3)$:

$$f(2+h,-3+k) = f(2,-3) + p_1 h + p_2 k + \sqrt{h^2+k^2}\, o(1)$$

$$\text{où} \begin{cases} p_1 = (\partial f/\partial x)(2,-3) \\ p_2 = (\partial f/\partial y)(2,-3) \end{cases}$$

Exemple 12 Ecrire en trois variables, l'identité de la différentielle entre les points (a,b,c) et (x,y,z).

Enfin, on n'oubliera pas que dans le cas d'une variable, l'identité de la différentielle n'est autre que la formule (*) de §2.1:

$$(*) \qquad \Delta f = p\,\Delta x + \Delta x\, o(1)$$

$$\text{où } p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o) = \frac{df}{dx}(x_o) = f'(x_o)$$

La différentielle d'une fonction d'une variable $f(u)$ est donc donnée par la formule

$$df = f'(u)du$$

2.3 Différentiation en chaîne.

Donner un sens précis à "l'opérateur différentiel d" est délicat. Nous nous contenterons ici d'indiquer ses propriétés et d'expliquer comment les utiliser formellement pour calculer les dérivées partielles de fonctions composées (§2.4) et de fonctions définies implicitement (§2.5).

L'opérateur différentiel d associe à toute fonction f sa "différentielle" df. Ses propriétés sont les suivantes:

(i) $d(f+g) = df + dg$

(ii) $d(fg) = fdg + gdf$

(iii) si $f = f(x_1,\ldots,x_n)$, alors

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

En particulier, si u est une fonction de n variables et φ une fonction d'une variable, alors

$$d(\varphi(u)) = \varphi'(u)du$$

On a par exemple:

$$\begin{cases} d(u^n) = nu^{n-1}du \\ d(1/u) = -du/u^2 \\ d(e^u) = e^u du \\ \text{etc...} \end{cases}$$

(iv) Si $x_1, \ldots, x_n$ sont n variables "indépendantes" et $a_i = a_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i = 1,\ldots,n$, sont n fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, on a

$$df = a_1dx_1 + \ldots + a_ndx_n \iff \begin{cases} f = f(x_1,\ldots,x_n) \\ a_i = \partial f/\partial x_i,\ i = 1,\ldots,n \end{cases}$$

Exemple 13 Calculer df pour $f(x,y) = x^4y^2+e^{y^3}$. En déduire les dérivées partielles $(\partial f/\partial x)$ et $(\partial f/\partial y)$.

Solution.

$$\begin{aligned} df &= d(x^4y^2+e^{y^3}) \\ &= d(x^4y^2) + d(e^{y^3}) \\ &= x^4d(y^2) + y^2d(x^4) + e^{y^3}d(y^3) \\ &= x^4(2ydy) + y^2(4x^3dx) + e^{y^3}(3y^2dy) \\ &= 4x^3y^2\,dx + (2x^4y+3y^2e^{y^3})\,dy \end{aligned}$$

En utilisant (iv), on déduit

$$\begin{cases} \partial f/\partial x = 4x^3y^2 \\ \partial f/\partial y = 2x^4y+3y^2e^{y^3} \end{cases}$$

Exemple 14 Soit $z = z(x,y)$ avec $x = x(r,t)$ et $y = y(r,t)$. Calculer dz en fonction de dr et dt. En déduire $\partial z/\partial r$ et $\partial z/\partial t$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \\ &= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial t}dt\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial t}dt\right) \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)dr + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} \end{cases}$$

Dans cet exemple, on a d'abord exprimé dz en fonction de dx et dy, puis dx et dy en fonction de dr et dt. Ce type de procédure, qui permet de calculer les dérivées partielles de fonctions composées, est appelé différentiation en chaîne .

Exemple 15 Soit $z = x^2y\text{-Log}(x)$ avec $x = u^2+v^2$, $y = u^2-v^2$ et $u = u(t)$ et $v = v(t)$. La quantité z est donc une fonction de la variable t. Calculer dz/dt.

Exemple 16 Soit $z = f(x+ay)$ où f est une fonction d'une variable. Montrer que $(\partial z/\partial y) = a\ (\partial z/\partial x)$.

Solution. On a $z = f(u)$ avec $u = x+ay$. On calcule dz

$$\begin{aligned} dz &= f'(u)\ du \\ &= f'(u)\ (dx + ady) \\ &= f'(x+ay)dx + af'(x+ay)dy \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{cases} \partial z/\partial x = f'(x+ay) \\ \partial z/\partial y = af'(x+ay) \end{cases}$$

On a bien $(\partial z/\partial y) = a\ (\partial z/\partial x)$.

Exemple 17 Un tronc d'arbre augmente de diamètre et de hauteur respectivement de 2 cm et de 10 cm chaque année. A quelle vitesse le volume de bois augmentera-t-il quand l'arbre aura 5 m de haut et 1 m de diamètre?

Solution. Le tronc d'arbre est assimilé à un cylindre de diamètre D et de hauteur H. Son volume V est donné par la formule

$$V = \frac{\pi D^2 H}{4}$$

On cherche dV/dt connaissant dD/dt = 2cm/an et dH/dt = 10cm/an. On a:

$$dV = \frac{\pi}{4}\ (2DHdD + D^2dH) = \frac{\pi}{4}\ (2DH\frac{dD}{dt}dt + D^2\frac{dH}{dt}dt)$$

de quoi on déduit

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}\ (2DH\frac{dD}{dt} + D^2\frac{dH}{dt})$$

et donc

$$(\frac{dV}{dt})_{\substack{D=1 \\ H=5}} = \frac{\pi}{4}\ (10x(0{,}02)+\ 0{,}1) = 0{,}235\ m^3/an$$

Formule d'Euler Le résultat suivant, appelé formule d'Euler, est une application classique de ce genre de calculs.

PROPOSITION 2.3 *Soit* $f(x_1,...,x_n)$ *une fonction homogène de degré* k *. Si les dérivées partielles de* f *sont continues, on a*

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = kf(x_1,\ldots,x_n)$$

Exemple 18 Vérifier la formule d'Euler pour les fonctions suivantes.
(a) $f(x,y) = x^3+y^3$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ (c) $f(x,y) = \exp(y/x)$

Preuve de la Prop.2.3. Soit $m(x_1,...,x_n)$ un point fixé dans le domaine D_f de f. Considérons la fonction de la variable t

$$\varphi(t) = f(u_1,...,u_n) - t^k f(x_1,...,x_n) \quad \text{où} \quad \begin{cases} u_1 = tx_1 \\ \dots \\ u_n = tx_n \end{cases}$$

On a

$$d\varphi = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1,...,u_n)du_1+...+\frac{\partial f}{\partial u_n}(u_1,...,u_n)du_n\right) - kt^{k-1}f(x_1,...,x_n)dt$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(tx_1,...,tx_n)x_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(tx_1,...,tx_n)x_n\right)dt - kt^{k-1}f(x_1,...,x_n)dt$$

Mais, par définition de l'homogénéité (Cf. Ch.2 Déf.3.3), on a aussi $\varphi = 0$ et donc $d\varphi = 0$. On obtient donc

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(tx_1,...,tx_n)dx_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(tx_1,...,tx_n)dx_n\right) = kt^{k-1}f(x_1,...,x_n)$$

Il suffit de substituer 1 à t pour obtenir le résultat désiré.

2.4 Différentiation implicite.

Dans ce paragraphe, on explique comment calculer les dérivées partielles d'une fonction $y = y(x_1,...,x_n)$ solution d'une (ou plusieurs) équations $F(x_1,...,x_n,y) = 0$.

Situation 1: $y = y(x)$ est solution de $F(x,y) = 0$.
On calcule dF en fonction de dx:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}dx\right)$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)dx$$

Mais $F(x,y(x)) = 0$; on a donc $dF = 0$, d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\partial F/\partial x)}{(\partial F/\partial y)}$$

Exemple 19 $y = y(x)$ est une fonction dérivable de x solution de $F(x,y) = 0$. Calculer $y'(x)$ dans les cas suivants.
(a) $F(x,y) = y^3+y-x$ (b) $F(x,y) = x^2+y^2-1$

Situation 2: $z = z(x,y)$ est solution de $F(x,y,z) = 0$; on trouve $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$.

Exemple 20 Calculer les dérivées partielles de $z = z(x,y)$ sachant que z est solution de $z^3+x^2z+y^2z-y = 0$.

Solution. On écrit $0 = d(z^3+x^2z+y^2z-y)$
$= 3z^2dz + x^2dz + 2xzdx + y^2dz + 2yzdy - dy$
$= 2xzdx + (2yz-1)dy + (x^2+y^2+3z^2)dz$

On déduit:

$$dz = \frac{-2xz}{x^2+y^2+3z^2}dx + \frac{1-2yz}{x^2+y^2+3z^2}dy$$

Les variables x et y étant indépendantes, on obtient

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2xz}{x^2+y^2+3z^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-2yz}{x^2+y^2+3z^2}$$

Exemple 21 La fonction de demande D d'un produit dépend du prix P et aussi du revenu Y du consommateur. La fonction d'offre S dépend seulement du prix P. On fait les hypothèses suivantes.

$$\begin{cases} (\partial D/\partial P) < 0 \\ (\partial D/\partial Y) > 0 \\ (dS/dP) > 0 \end{cases}$$

La position d'équilibre du marché est définie par la condition

$$D(P,Y) = S(P)$$

Le prix d'équilibre $P_{éq}$ est solution de cette équation; c'est une fonction de Y. La quantité

$$\frac{dP_{éq}}{dY}$$

mesure l'évolution du prix d'équilibre en fonction du revenu du consommateur. La technique de différentiation implicite conduit à

$$\frac{dP_{éq}}{dY} = \frac{-(\partial D/\partial Y)}{(\partial D/\partial P)-(dS/dP)} > 0$$

Le prix d'équilibre augmente avec le revenu. A une augmentation de ΔY du revenu doit correspondre une augmentation

$$\Delta P_{éq} = \left(\frac{-(\partial D/\partial Y)}{(\partial D/\partial P)-(dS/dP)}\right)\Delta Y$$

du prix pour que soit conservé l'équilibre du marché.

Situation 3: $x = x(z)$ et $y = y(z)$ sont solutions de

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$; on trouve dx/dz et dy/dz.

Exemple 22 Calculer les dérivées de x(z) et y(z) sachant que x et y sont solutions du système

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x+y+z = 1 \end{cases}$$

Solution. On résout le système $\begin{cases} 2xdx+2ydy = 0 \\ dx+dy = -dz \end{cases}$ et on trouve

$$\begin{cases} dx = \dfrac{2y}{2x-2y}dz \\ dy = \dfrac{-2x}{2x-2y}dz \end{cases}$$

2.5 Calculs d'équivalents.

Soit f(x) une fonction d'une variable dérivable au point x_0. On cherche un équivalent de f au voisinage de x_0. Si $f(x_0) \neq 0$, on écrit simplement

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0)$$

Si $f(x_0) = 0$, la question est plus délicate. La Prop.2.4 donne une réponse dans le cas où $f'(x_0) \neq 0$.

PROPOSITION 2.4 Si $f(x_0) = 0$ et $f'(x_0) \neq 0$, on a $f(x) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x-x_0)$.

Preuve. L'identité de la différentielle s'écrit

$$f(x) = f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)o(1)$$

On en déduit

$$\frac{f(x)}{f'(x_0)(x-x_0)} = 1 + o(1) \qquad \text{soit} \qquad f(x) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x-x_0)$$

Exemple 23 Etablir toutes les équivalences usuelles (Cf. Ch.4 §3.2) à partir de la Prop. 2.4.

Exemple 24 (a) Donner un équivalent au voisinage de 2 des fonctions $f(x) = \mathrm{Log}(x)-\mathrm{Log}(2)$ et $g(x) = 2^x-x^2$.
(b) En déduire la limite de $f(x)/g(x)$ quand x tend vers 2.

Exemple 25 La fonction $y(x)$ est solution de $y^3+y-2x = 0$. Donner un équivalent de $y(x)$ quand x tend vers 0.

Solution. La valeur $y(0)$ est solution de $y(0)^3 + y(0) = 0$. Cette équation a pour unique solution $y(0) = 0$. Calculons $y'(0)$. La méthode de différentiation implicite conduit à

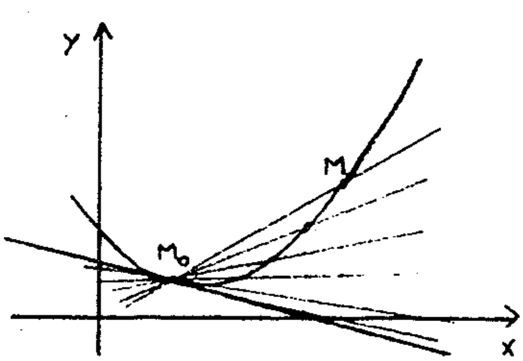
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3y^2+1}$$

On en déduit $y'(0) = 2$, ce qui donne finalement $y(x) \underset{0}{\sim} 2x$.

§3. ESPACES TANGENTS.

3.1 Droite tangente au graphe d'une fonction d'une variable.

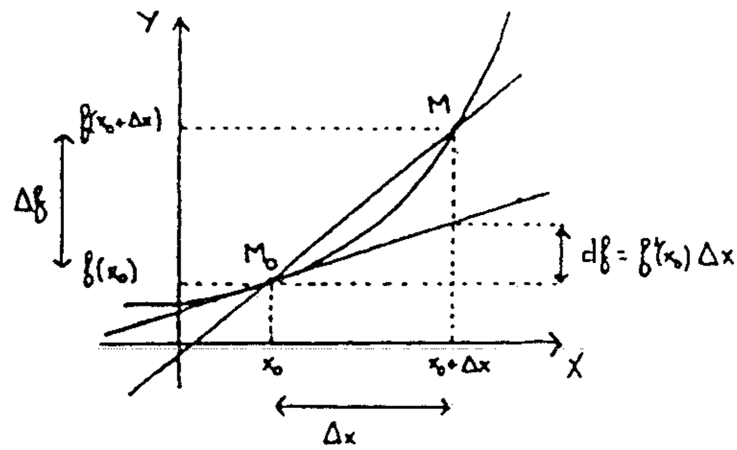
Sécantes et tangentes



Soit $f(x)$ une fonction d'une variable dérivable en x_0. Soit $M_0(x_0,f(x_0))$ le point correspondant sur le graphe G_f de f. On appelle sécante en M_0 au graphe G_f toute droite passant M_0 et un autre point $M(x,f(x))$ du graphe G_f. Quand M se rapproche de M_0, les sécantes (M_0M) tendent vers une droite limite passant par M_0, appelée tangente au graphe G_f en M_0.

Les sécantes (M_0M) et la tangente en M_0 sont des droites passant par M_0; il reste donc, pour déterminer complètement ces droites, à donner leur pente.

	Sécante (M_oM)	Tangente en M_o
Pente:	$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_o)$	$\frac{df}{dx}(x_o) = f'(x_o)$
Equation:	$y-f(x_o) = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_o)(x-x_o)$	$y-f(x_o) = \frac{df}{dx}(x_o)(x-x_o)$



Exemple 1 Déterminer l'équation de la tangente au graphe de $f(x) = e^x$ en $x = 0$ et $x = 1$. (Rép.: $y = x+1$; $y = ex+e$).

Exemple 2 Trouver l'équation de la parabole d'axe vertical ayant une tangente horizontale au point $A(1,0)$ et une tangente au point d'abscisse $x = 0$ parallèle à $y = x$. (Rép.: $y = -x^2/2 + x -1/2$).

Exemple 3 Soit M le point d'ordonnée 7/4 sur la tangente à $y = x^3$ au point $A(1,1)$. Quelle est l'abscisse de M? (Rép.: 5/4).

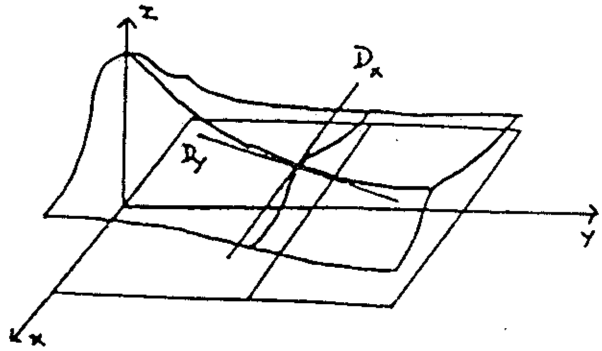
Interprétation géométrique des dérivées partielles d'une fonction f(x,y)

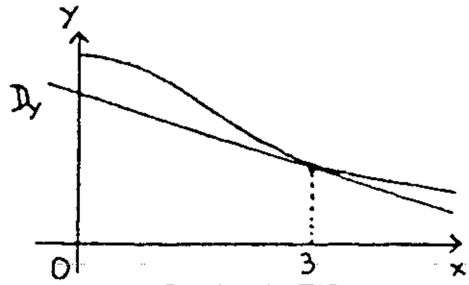
Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables et $m_o(x_o,y_o) \in D_f$. Par définition, les deux dérivées partielles $(\partial f/\partial x)(m_o)$ et $(\partial f/\partial y)(m_o)$ sont les dérivées des fonctions partielles $f(x,y_o)$ et $f(x_o,y)$. Ce sont des fonctions d'une variable dont on obtient le graphe en coupant la surface G_f respectivement par le plan $y = y_o$ et le plan $x = x_o$. On déduit donc de ce qui précède que

$(\partial f/\partial x)(m_o)$ = pente de la tangente en $M_o(x_o,y_o,f(x_o,y_o))$ à la courbe section du graphe G_f par le plan $y = y_o$.

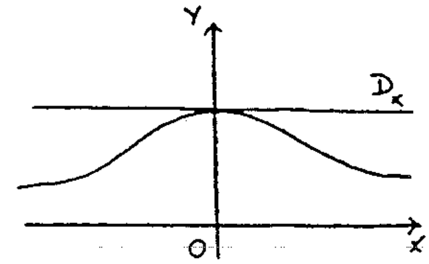
$(\partial f/\partial y)(m_o)$ = pente de la tangente en $M_o(x_o,y_o,f(x_o,y_o))$ à la courbe section du graphe G_f par le plan $x = x_o$.

Exemple 4 "Plaque métallique chauffée à l'origine" (Cf. Ch.2 §1 Exemple 3 et §6.2)





Graphe de T(O,y)
($(\partial T/\partial y)(0,3)$ = pente de D_Y)



Graphe de T(x,3)
($(\partial T/\partial x)(0,3)$ = pente de D_X)

On a $(\partial T/\partial x)(0,3) = 0$ et $(\partial T/\partial y)(0,3) < 0$.

Exemple 5 Trouver l'équation de la tangente au point A(-3,1,25) à la courbe section du paraboloïde elliptique $z = x^2+16y^2$ par le plan $y = 1$. (Rép. $z = -6x+7$).

3.2 Plan tangent au graphe d'une fonction de 2 variables.

Plans sécants Soient f(x,y) une fonction de deux variables et $m_o(x_o,y_o) \in D_f$. Considérons le plan passant par les trois points du graphe G_f

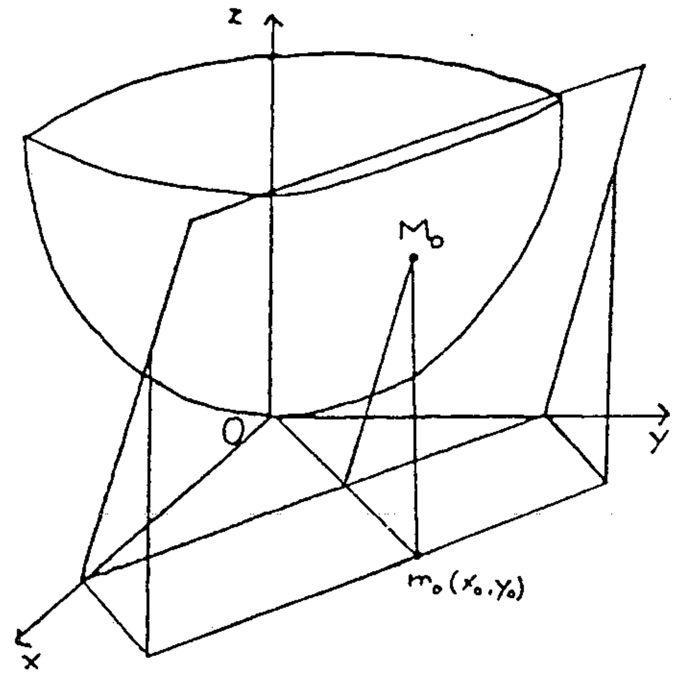
$$\begin{cases} M_o(x_o,y_o,f(x_o,y_o)) \\ M_1(x_o+\Delta x,y_o,f(x_o+\Delta x,y_o)) \\ M_2(x_o,y_o+\Delta y,f(x_o,y_o+\Delta y)) \end{cases}$$

On dit que c'est un plan sécant issu de M_o. Il a pour équation

$$z-f(x_o,y_o) = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_o,y_o)(x-x_o) + \frac{\Delta f}{\Delta y}(x_o,y_o)(y-y_o)$$

[Il suffit pour l'établir de vérifier que les coordonnées des trois points M_o, M_1 et M_2 satisfont cette équation.]

Plan tangent On suppose ici que f a des dérivées partielles continues au point m_o. Quand Δx et Δy tendent vers 0, les plans sécants issus de M_o se rapprochent d'une position limite appelée plan tangent au graphe G_f au point M_o.



On obtient l'équation du plan tangent en faisant tendre Δx et Δy vers 0 dans l'équation des plans sécants:

$$z-f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

et un vecteur normal à ce plan est le vecteur

$$\vec{n} = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),-1)$$

Exemple 6 Trouver l'équation ainsi qu'un vecteur normal du plan tangent au graphe G_f au point M_0 dans les cas suivants.

(a) $f(x,y) = x^2+y^2$ et $m_0 = (0,0), (1,1), (x_0,y_0)$

(b) $f(x,y) = y^2e^x$ et $m_0 = (0,-3)$

Solution. (a) En $m_0(0,0)$: le plan tangent est d'équation $z = 0$ et un vecteur normal est le vecteur $\vec{n} = (0,0,1)$.

En $m_0(x_0,y_0)$: le plan tangent est d'équation

$$z-(x_0^2+y_0^2) = 2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)$$

et un vecteur normal est le vecteur $\vec{n} = (2x_0,2y_0,-1)$.

3.3 Tangente à une ligne de niveau.

DEFINITION 3.1 *Soit* $f(x_1,\dots,x_n)$ *une fonction et* $m_0(a_1,\dots,a_n) \in D_f$ *. Supposons que les dérivées partielles* $\partial f/\partial x_i$, $i = 1,\dots,n$ *, existent toutes au point* m_0 *. On appelle alors gradient de* f *au point* m_0*, le vecteur*

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f(m_o) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(m_o),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(m_o)\right)$$

de composantes les n *dérivées partielles de* f *au point* m_o.

Limitons nous au cas de 2 variables; le vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

est donc un vecteur plan. Avec le gradient, on peut réécrire l'identité de la différentielle la manière suivante:

$$f(x_o+\Delta x,y_o+\Delta y)-f(x_o,y_o) = \overrightarrow{\text{grad}}\ f(x_o,y_o).\ \overrightarrow{\Delta m} + ||\overrightarrow{\Delta m}||\,o(1)$$

où $\overrightarrow{\Delta m} = (\Delta x,\Delta y)$ désigne le vecteur accroissement. Le terme prépondérant dans le membre de droite est le produit scalaire

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x_o,y_o).\ \overrightarrow{\Delta m}$$

des vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x_o,y_o)$ et $\overrightarrow{\Delta m}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Cf. Ch.1 Exercice 25), pour des accroissements $\overrightarrow{\Delta m}$ de même norme, ce terme est maximal quand les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x_o,y_o)$ et $\overrightarrow{\Delta m}$ sont parallèles et de même sens.

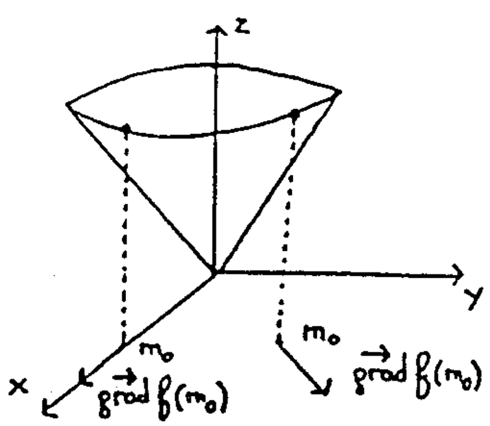
[Rappel (Inégalité de Cauchy-Schwarz): pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a

$$-\,||\vec{u}||\,||\vec{v}|| \leq \vec{u}.\vec{v} \leq ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$$

avec
- égalité à droite ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles et de même sens
- égalité à gauche ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles et de sens opposé.]

On obtient cette propriété géométrique importante du gradient.

PROPOSITION 3.2 *A partir du point* $m_o(x_o,y_o)$, *le vecteur* $\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x_o,y_o)$ ***pointe*** *dans la direction du plan* Oxy *qui indique la ligne de plus grande pente sur le graphe* G_f *au voisinage du point* $M_o(x_o,y_o,f(x_o,y_o))$. *En conséquence, le vecteur* $\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x_o,y_o)$ *est un vecteur orthogonal en* m_o *à la ligne de niveau* $c = f(x_o,y_o)$.

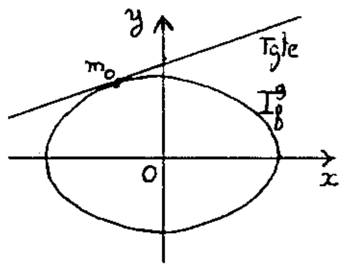


Exemple 7 Soient $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et $m_o(x_o,y_o)$. S'aider de la figure ci-contre pour deviner la direction de $\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x_o,y_o)$. Vérifier son intuition par le calcul.

Exemple 8 Trouver la direction dans laquelle la fonction définie par $f(x,y) = e^x(\cos(y)+\sin(y))$ augmente le plus rapidement au point O(0,0)? Dans quelle direction f décroît-elle le plus rapidement?

De la Prop.3.2, se déduit l'équation de la tangente D_{m_o} en m_o à la ligne de niveau $c = f(x_o,y_o)$. La droite D_{m_o} passe par m_o et le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_o,y_o)$, s'il est non nul, en est un vecteur normal. La droite D_{m_o} a donc pour équation

$$(\,*\,) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o)(x-x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)(y-y_o) = 0$$



Exemple 9 Ecrire l'équation de la tangente au point $m_o(-1,2)$ à la ligne de niveau 9 de la fonction $f(x,y) = x^2+2y^2$.

Solution. La courbe I_f^9 a pour équation $x^2+2y^2 = 9$. On vérifie que le point m_o y appartient: $(-1)^2+2(2)^2 = 9$. Le vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f(-1,2) = (-2,8)$$

est un vecteur normal à I_f^9. On en déduit l'équation de la tangente en m_o:

$$-2(x+1) + 8(y-2) = 0$$

i.e., $$y = \frac{x}{4} + \frac{9}{4}$$

3.4 Tangente à une courbe plane.

Notre but ici est de donner un support théorique rigoureux aux paragraphes précédents. Il nous faut commencer par donner une définition précise de la notion de tangente à une courbe.

DEFINITION 3.3 *Soient* C *une courbe plane,* m_o *un point de* C *et* D *une droite. On dit que la courbe* C *admet la droite* D *pour tangente en* m_o *si*

$$(**) \quad d(m,D) = o(\|\overrightarrow{m_o m}\|) \text{ quand } m \to m_o \text{ en restant sur } C \qquad \text{i.e., ssi} \qquad \lim_{\substack{m\to m_o\\ m\in C}} \frac{d(m,D)}{\|\overrightarrow{m_o m}\|} = 0$$

Il convient d'expliquer l'origine de cette définition. Remarquons d'abord que si (**) a lieu, la droite D passe nécessairement par m_o. En effet, on peut réécrire (**)

$$d(m,D) = \|\overrightarrow{m_o m}\|\ o(1)$$

En faisant tendre m vers m_o, on obtient

$$d(m_o,D) = 0$$

ce qui indique que $m_o \in D$. Rappelons ensuite que la distance $d(m,D)$ d'un point m à une droite D passant par m_o et de vecteur normal $\vec{n}$ est donnée par la formule (Cf. Ch.1 Exercice 36):

$$d(m,D) = \frac{|\vec{n}.\overrightarrow{m_o m}|}{\|\vec{n}\|}$$

Donc, (**) demande que le produit scalaire

$$\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \cdot \frac{\overrightarrow{m_o m}}{\|\overrightarrow{m_o m}\|}$$

tende vers 0 quand m tend vers m_o en restant sur C. Autrement dit, le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal de la limite des sécantes $(m_o m)$.

Conclusion: la droite D apparaît comme la limite des sécantes $(m_o m)$; c'est bien l'idée qu'on se fait de la tangente à la courbe C en m_o.

Nous allons maintenant démontrer le résultat suivant.

THEOREME 3.4 *Soient* C *une courbe plane d'équation* $F(x,y) = 0$ *et* $m_0(x_0,y_0)$ *un point de* C . *On suppose les dérivées partielles de* $F(x,y)$ *continues en* m_0 . *Si* $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(m_0) \neq \vec{0}$, *la courbe* C *admet pour tangente en* m_0 *la droite* D *passant par* m_0 *et de vecteur normal* $\vec{n} = \overrightarrow{\text{grad}}\, F(m_0)$. *La droite* D *est d'équation*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$$

Exemple 10 Ecrire l'équation de la tangente au point $m_0(-1,2)$ à l'ellipse d'équation $x^2+2y^2 = 9$. Comparer avec l'exemple 9.

Exemple 11 (a) Le graphe d'une fonction d'une variable $f(x)$ est un cas particulier de courbe plane. Vérifier que le Th.3.4 redonne dans ce cas les résultats du §3.1.
(b) Les lignes de niveau d'une fonction $f(x,y)$ sont des courbes planes. Vérifier que le Th.3.4 redonne dans ce cas les résultats du §3.3.

Exemple 12 Ecrire l'équation de la tangente au point $m_0(0,\sqrt{2})$ à la courbe $l_f^{1/2}$ de niveau 1/2 de $f(x,y) = (x^4+y^4)/(8-x^2y^2)$.

Solution. On peut appliquer la formule (*) du §3.3 mais il est plus rapide de simplifier l'équation de $l_f^{1/2}$ et d'utiliser le Th.3.4. La courbe $l_f^{1/2}$ est d'équation

$$\frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2} = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^4+2y^4+x^2y^2-8 = 0$$

On applique le Th.3.4 à $F(x,y) = 2x^4+2y^4+x^2y^2-8$: la tangente en $m_0(0,\sqrt{2})$ à $l_f^{1/2}$ est d'équation

$$0(x-0) + 16\sqrt{2}(y-\sqrt{2}) = 0 \qquad \text{i.e.,} \qquad y = \sqrt{2}$$

Exemple 13 Soit C la courbe d'équation $x^2-3y^2 = 6$.
(a) Trouver le/les points $M_0(x_0,y_0)$ sur C où la tangente soit parallèle à la première bissectrice.
(b) Trouver le/les points $M_0(x_0,y_0)$ sur C où la tangente soit orthogonale à la première bissectrice.

Solution.(a) On cherche les points $M_0(x_0,y_0)$ qui vérifient les deux conditions:

$$\begin{cases} x_0^2-3y_0^2 = 6 & \qquad (M \in C) \\ \overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0).(1,1) = 0 & \qquad (\text{tangente//1ère biss.}) \end{cases}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} x_0^2-3y_0^2 = 6 \\ 2x_0-6y_0 = 0 \end{cases}$$

qui a pour solutions les deux points A(3,1) et B(-3,-1).

Preuve du Th.3.4. Ecrivons l'identité de la différentielle entre les points $m_0(x_0,y_0)$ et $m(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$:

$$F(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-F(x_0,y_0) = \overrightarrow{\text{grad}}\, F(m_0).\overrightarrow{m_0m} + \|\overrightarrow{m_0m}\|\ o(1)$$

Si les points m_0 et m sont sur C, on obtient

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(m_0).\overrightarrow{m_0m} + \|\overrightarrow{m_0m}\|\ o(1) = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, F(m_0).\overrightarrow{m_0m}}{\|\overrightarrow{m_0m}\|} = o(1)$$

ou encore, en notant D la droite passant par m_0 et de vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(m_0)$.

$$\frac{d(m,D)}{\|\overrightarrow{m_0m}\|} = o(1)$$

On obtient donc la conclusion désirée à un détail près: il reste à établir qu'il existe des points $m(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ sur C avec Δx et Δy arbitrairement petits, autrement dit que m_0 est un point d'accumulation de C. On peut voir ce dernier point comme une conséquence d'un résultat théorique important: le théorème des fonctions implicites. Nous repoussons au chapitre suivant sa démonstration (Cf. Ch.8 Prop.4.2 ou Exercice 41).

3.5 Plan tangent à une surface.

La section §3.4 se généralise sans difficulté à la dimension supérieure. On obtient la notion de plan tangent à une surface. Nous retiendrons l'analogue du Th.3.4.

THEOREME 3.5 *Soient* S *une surface d'équation* $F(x,y,z) = 0$ et $m_0(x_0,y_0,z_0)$ *un point de* S. *On suppose les dérivées partielles de* $F(x,y,z)$ *continues en* m_0. *Si* $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(m_0) \neq \vec{0}$, *la surface* S *admet pour plan tangent en* m_0 *le plan* P *passant par* m_0 *et de vecteur normal* $\vec{n} = \overrightarrow{\text{grad}}\, F(m_0)$. *Le plan* P *est d'équation*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

Exemple 14 Quelle est le plan tangent à la sphère $x^2+ y^2+z^2= 1$ au point $m_0(0,0,1)$? Vérifier que le Th.3.5 donne un résultat conforme à l'intuition.

Exemple 15 Donner un vecteur normal et une équation du plan tangent à la surface d'équation $ye^{xy}+z^2 = 0$ au point $m_0(0,-1,1)$.

Exemple 16 Le graphe d'une fonction de deux variables f(x,y) est un cas particulier de surface dans $\mathbf{R}^3$. Vérifier que le Th.3.5 redonne dans ce cas les résultats du §3.2.

Exemple 17 Trouver le/les points sur le paraboloïde $z = 1-x^2-3y^2$ où le plan tangent soit parallèle au plan P d'équation $4x+6y+z = 3$.

Solution. Soit $M_o(x_o,y_o,z_o)$ un point du paraboloïde. Un vecteur normal au plan P_o tangent en M_o est donné par $\vec{n_o} = (2x_o,6y_o,1)$. Un vecteur normal du plan P est le vecteur $\vec{n} = (4,6,1)$. Les plans P_o et P sont parallèles ssi les vecteurs $\vec{n_o}$ et $\vec{n}$ sont proportionnels. À cause de leur 3ème composante, s'ils sont proportionnels, ils doivent être égaux. Ce qui donne $x_o = 2$, $y_o = 1$ et $z_o = 1\text{-}2^2\text{-}3.1^2$; i.e., un point solution: $M_o(2,3,-6)$.

Sous les hypothèses du Th.3.5, on appelle **normale à S en m_o** la droite passant par m_o et parallèle au vecteur $\vec{\text{grad}}\, F(m_o)$. La normale coupe perpendiculairement le plan tangent en m_o.

Exemple 18 Montrer que les normales à la sphère S: $x^2+y^2+z^2 = 1$ passent toutes par l'origine.

Solution. Soit $m_o = (x_o,y_o,z_o)$ un point quelconque sur S. La normale à S en m_o est portée par le vecteur

$$\vec{n} = (x_o,y_o,z_o)$$

et passe par m_o. Elle est donc d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_o+tx_o \\ y = y_o+ty_o \\ z = z_o+tz_o \end{cases}$$

Pour $t = -1$, on obtient l'origine.

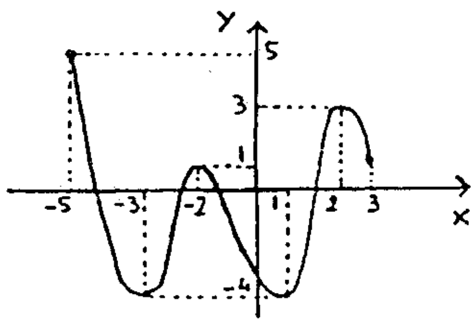
CHAPITRE 8

OPTIMISATION. CONVEXITE

§1. EXTREMA RELATIFS.

On s'intéresse ici aux extrema relatifs d'une fonction, c'est-à-dire, aux points m_0 du domaine où f prend une valeur qui soit extrémale, i.e, maximale ou minimale, au voisinage de m_0.

1.1 Définitions.

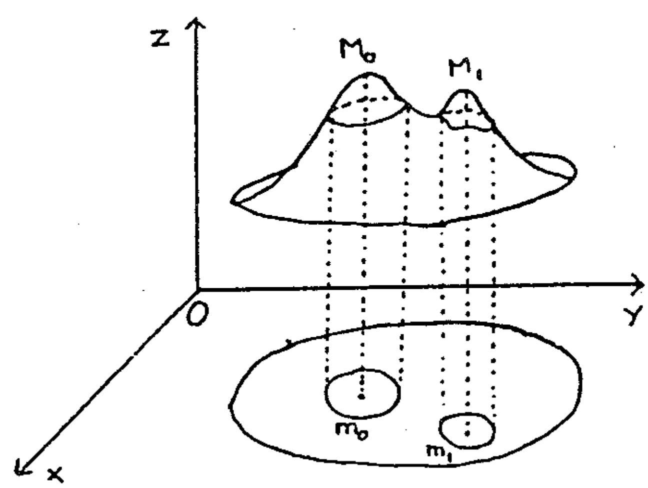


Exemple 1 Soit f la fonction dont le graphe est représenté ci-contre.
• La fonction f a un minimum relatif en 1 et -3 qui vaut -4. La valeur -4 est aussi le minimum absolu de f.
• La fonction f a trois maxima relatifs: +1 atteint en -2, +3 atteint en 2 et 5 atteint en -5. Le maximum absolu de f est +5.

Précisons la notion d'extremum relatif pour les fonctions de plusieurs variables.

DEFINITION 1.1 *Soient* $f(x_1,...,x_n)$ *une fonction et* $m_0 \in D_f$. *On dit que* $f(m_0)$ *est un maximum (resp. minimum) relatif de* f *s'il existe une boule* $B(m_0,r)$ *de rayon* $r > 0$ *où* f *ne prenne que des valeurs* $\leq f(m_0)$ *(resp.* $\geq f(m_0)$*).*

Exemple 2 La fonction f dont le graphe est représenté ci-dessous a deux maxima relatifs.



Dans les paragraphes suivants, nous donnons des résultats qui permettent de déterminer les extrema relatifs d'une fonction f qui sont intérieurs au domaine D_f. La théorie développée dans les paragraphes suivants ne dit rien sur ce qui se passe à la frontière du domaine. En particulier, elle ne permet de rien conclure quant aux éventuels **extremas absolus** de f, i.e., les valeurs maximales ou minimales de f sur tout le domaine D_f.

Exemple 3 A partir de leur graphe, étudier les extrema, relatifs et absolus, des fonctions suivantes.

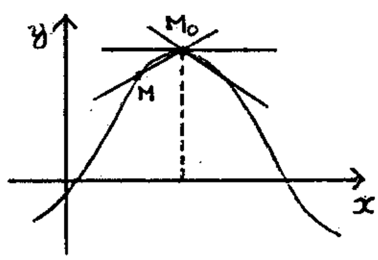
(a) $f(x,y) = x^2+y^2$ (b) $f(x,y) = 1-\sqrt{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$ (d) $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3-\sqrt{x^2+y^2}$

1.2 Les théorèmes fondamentaux.

THEOREME 1.2 *Soient* $f(x)$ *une fonction et* x_0 *un point intérieur au domaine* D_f. *Si* f *a un extremum relatif en* x_0 *et si* f *est dérivable en* x_0, *alors* $f'(x_0) = 0$.

Géométriquement, le Th.1.2 signifie qu'en un extremum relatif de f intérieur à D_f, la tangente au graphe G_f est horizontale.



Preuve. Supposons par exemple, comme sur la figure ci-contre que f ait un maximum relatif en x_0. Les sécantes (M_0M) ont une pente ≥ 0 pour M à gauche de M_0 et une pente ≤ 0 pour M à droite de M_0. La pente de la tangente, qui est la limite des sécantes, est donc à la fois ≤ 0 et ≥ 0: elle est nulle.

Attention! La réciproque du Th.1.2 est fausse: ce n'est pas parce que $f'(x_0) = 0$ qu'il y a nécessairement un extremum relatif en x_0. (Contre-exemple: $f(x) = x^3$ avec $x_0 = 0$).

(*) Pour qu'il y ait extremum relatif en x_0, il faut en plus de $f'(x_0) = 0$, que le graphe G_f se situe localement du même côté de la tangente en x_0, c'est-à-dire que le graphe "ne traverse pas" sa tangente en x_0.

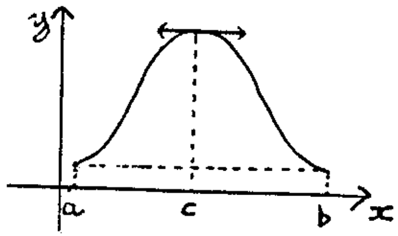
THEOREME 1.3 (Théorème des accroissements finis) _ *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* [a,b] *et dérivable sur*]a,b[. *Alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$$

Note. Ce résultat est souvent énoncé avec $b = a+h$. La conclusion devient: il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $f(a+h)-f(a) = hf'(a+\theta h)$

On va déduire le Th.1.3 du résultat suivant.

THEOREME 1.4 (Théorème de Rolle) _ *Soit* φ *une fonction continue sur un intervalle* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$. *Si* $\varphi(a) = \varphi(b)$ *alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que* $\varphi'(c) = 0$.



Le Théorème de Rolle est géométriquement plus intuitif que le Th.1.3: si $\varphi(a) = \varphi(b)$, le graphe de φ doit passer par un extremum, où la dérivée s'annule.

Preuve du Th.1.4. D'après le Th.2.12 du Ch.6, la fonction φ a un maximum et un minimum absolus sur $[a,b]$. Si l'un des deux est atteint sur $]a,b[$, c'est un extremum relatif intérieur à D_φ et le Th.1.2 s'applique. S'ils sont tous deux atteints aux bornes de $[a,b]$, alors, à cause de l'hypothèse $\varphi(a) = \varphi(b)$, la fonction φ est nécessairement constante. La dérivée φ' est alors nulle en tout point $c \in]a,b[$.

Preuve du Th.1.3. On introduit la fonction

$$\varphi(x) = (b-a)(f(x)-f(a)) - (x-a)(f(b)-f(a)).$$

La fonction φ vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'après le Th.1.4, il existe c dans $]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or, on a

$$\varphi'(x) = (b-a)f'(x) - (f(b)-f(a)).$$

L'égalité $\varphi'(c) = 0$ conduit donc à

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c).$$

Note. Nous avons déduit le Th.1.3 du Th.1.4. Notons qu'inversement le Th.1.4 correspond au cas particulier du Th.1.3 où $f(a) = f(b)$.

Le théorème des accroissements finis est un résultat fondamental. Il implique en particulier l'énoncé suivant.

COROLLAIRE 1.5 *Soit* f *une fonction dérivable sur un intervalle* I .
(a) *Si* $f'(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in I$, *alors la fonction est croissante sur* I.
(b) *Si* $f'(x) \leq 0$ *pour tout* $x \in I$, *alors la fonction est décroissante sur* I.
(c) *Si* $f'(x) = 0$ *pour tout* $x \in I$, *alors la fonction est constante sur* I.

Le corollaire 1.5 réduit donc l'étude de la monotonie d'une fonction f à celle du signe de sa dérivée f'.

Exemple 4 Retrouver en utilisant le Cor.1.5, les propriétés de monotonie des fonctions usuelles.

Preuve du Cor.1.5. (a) Soient a et b dans I tels que $a < b$. D'après le Th.1.3, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$. Si f' ne prend que des valeurs positives, on obtient

$$f(b)-f(a) \geq 0.$$

Les preuves de (b) et (c) sont similaires.

Attention! Il est important dans le Cor.1.5 que I soit un intervalle. La fonction $x \to 1/x$ par exemple est de dérivée $-1/x^2 \leq 0$ mais n'est pas décroissante sur son domaine $\mathbf{R}^*$. Elle est décroissante sur les intervalles $\mathbf{R}^*_+$ et $\mathbf{R}^*_-$.

1.3 Méthode pratique d'étude des variations d'une fonction d'une variable.

Supposons donnée une fonction f dérivable sur un domaine D. On obtient le sens de variation de f en étudiant le signe de la dérivée f':

- f croît sur les sous-intervalles de D où $f' \geq 0$.
- f décroît sur les sous-intervalles de D où $f' \leq 0$.

Il est d'usage de présenter les résultats dans un tableau appelé tableau de variations de f. La première ligne correspond à la droite réelle des x; on y indique les bornes du domaine, les points de changement de signe de f' et d'éventuelles autres valeurs remarquables. On reporte dans la seconde ligne le signe de f' en fonction des intervalles obtenus et en troisième ligne le sens de variation de f correspondant.

Les points où il y a un extremum relatif sont parmi les solutions de l'équation $f'(x) = 0$. On appelle **point stationnaire** tout nombre réel x solution de cette équation. Les extrema relatifs de f sont donc parmi les points stationnaires de f. On sait que la réciproque est fausse. La condition, dite **du premier ordre**, $f'(x_0) = 0$, est une condition nécessaire mais non suffisante pour qu'il y ait un extremum relatif en x_0.

Un point stationnaire x_0 intérieur à D_f donne effectivement lieu à un extremum relatif si la dérivée f' change de signe en x_0. Plus précisément, le Cor.1.5 indique que:

- si f' passe de - à + en x_0, alors il y a un minimum relatif en x_0; localement, le graphe G_f reste au dessus de sa tangente en x_0.

• si f' passe de + à - en x_0, alors il y a un maximum relatif en x_0; localement, le graphe G_f reste au dessous de sa tangente en x_0.

• si f' s'annule sans changer de signe en x_0, alors il n'y a pas d'extremum relatif en x_0; localement, le graphe G_f traverse sa tangente.

Dans la pratique, l'examen du tableau de variations suffit donc pour décider s'il y a extremum relatif en un point stationnaire.

Exemple 5 Etudier la fonction $f(x) = \mathrm{Log}(x)/x$.

Solution. La fonction f est définie, continue, dérivable sur $D_f = \mathbf{R}^*_+$.
Les limites aux bornes de D_f sont données par

$$\lim_{x \to 0^+} \mathrm{Log}(x)/x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{Log}(x)/x = 0^+$$

On en déduit que les droites $x = 0$ et $y = 0$ sont asymptotes du graphe G_f.
La dérivée de f vaut:

$$f'(x) = \frac{1-\mathrm{Log}(x)}{x^2}$$

La fonction Log est croissante; on obtient donc

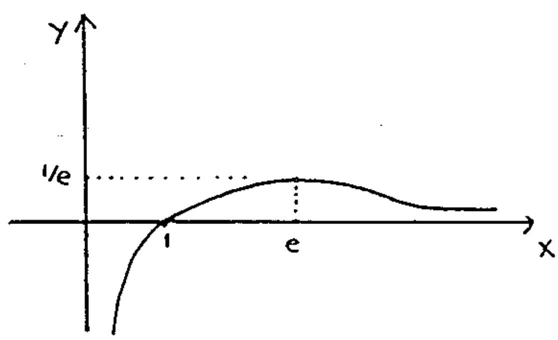
$1-\mathrm{Log}(x) > 0$ ssi $1 > \mathrm{Log}(x)$ ssi $e > x$

$1-\mathrm{Log}(x) < 0$ ssi $e < x$

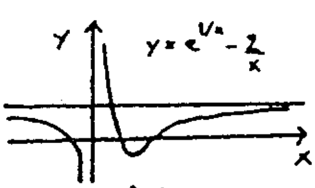
D'où le tableau de variations:

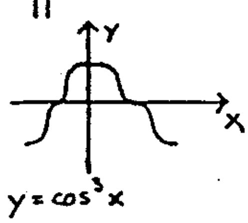
x	0		e		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	-	
f(x)	‖ $-\infty$	↗	$1/e$	↘	0

et le graphe G_f



Il y a un maximum relatif en $x = e$.





Exemple 6 Etudier les fonctions
(a) $f(x) = e^{1/x} - \frac{a}{x}$ $(a \in \mathbf{R})$ (b) $f(x) = \cos^3(x)$

Note. Le point le plus important de ce genre d'exercices est bien sûr l'étude du signe de la dérivée f'.

Existence d'extrema (conditions suffisantes)

Nous terminons par une discussion <u>théorique</u> de la condition "f' change de signe en x_0". En une variable, cela ne présente d'intérêt que pour des exemples assez pathologiques (Cf. Exemple 7). Par contre, c'est une bonne introduction au cas de plusieurs variables.

Deux types de conditions garantissent le changement de signe de f'.

$\boxed{1}$ <u>Conditions locales</u>.

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \text{ et } f''(x_0) \neq 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{extremum relatif en } x_0}$$

On appelle **condition du second ordre** la condition de gauche; c'est une condition suffisante pour qu'il y ait extremum relatif en x_0.

[**Preuve**. On a

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

Pour Δx voisin de 0, la quantité $f'(x_0+\Delta x)/\Delta x$ est du signe de $f''(x_0)$. Si $f''(x_0) > 0$ par exemple, on obtient:

$$\begin{cases} f'(x_0+\Delta x) > 0 \text{ si } \Delta x > 0 \\ f'(x_0+\Delta x) < 0 \text{ si } \Delta x < 0 \end{cases}$$

La dérivée f' change donc de signe en x_0; il y a un extremum relatif en x_0. (Dans le cas considéré, c'est un minimum relatif; c'est un maximum relatif dans le cas $f''(x_0) < 0$).]

$\boxed{2}$ <u>Conditions globales</u>.

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \text{ et } f'(x) \text{ monotone} \\ \text{sur un voisinage de } x_0 \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{extremum relatif en } x_0}$$

[**Preuve**. f' s'annule en x_0 et est monotone sur un voisinage de x_0; elle change donc nécessairement de signe en x_0.]

Remarque. Si f est deux fois dérivable, la condition "f'(x) monotone sur un voisinage de x_0" équivaut à "f"(x) de signe constant sur un voisinage de x_0".

Pour des raisons qui deviendront claires au §2, la condition de gauche est aussi appelée **condition de convexité**. C'est une autre condition suffisante pour qu'il y ait extremum relatif en x_0. Dans la pratique, il est rare qu'elle ne soit pas satisfaite et qu'il faille recourir à la condition locale pour montrer qu'il y a extremum relatif en un point x_0. Voici cependant un exemple.

Exemple 7 Soit $f(x) = 3x^4\sin(1/x) - x^2$.
(a) Montrer que f se prolonge en une fonction dérivable sur **R**.
(b) Montrer que f a un maximum relatif en x = 0.
(c) Montrer que f' est continue en 0 mais n'est monotone sur aucun voisinage de 0 (on montrera que f" n'a de signe constant sur aucun voisinage de 0).

1.4 Conditions du premier ordre (plusieurs variables).

THEOREME 1.6 *Soient* $f(x_1,...,x_n)$ *une fonction et* $m_0(a_1,...,a_n)$ *un point intérieur au domaine* D_f. *Si* f *a un extrémum relatif en* m_0 *et si* f *admet des dérivées partielles en* m_0, *alors*

$$(*) \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\ f(m_0) = \vec{0}$$

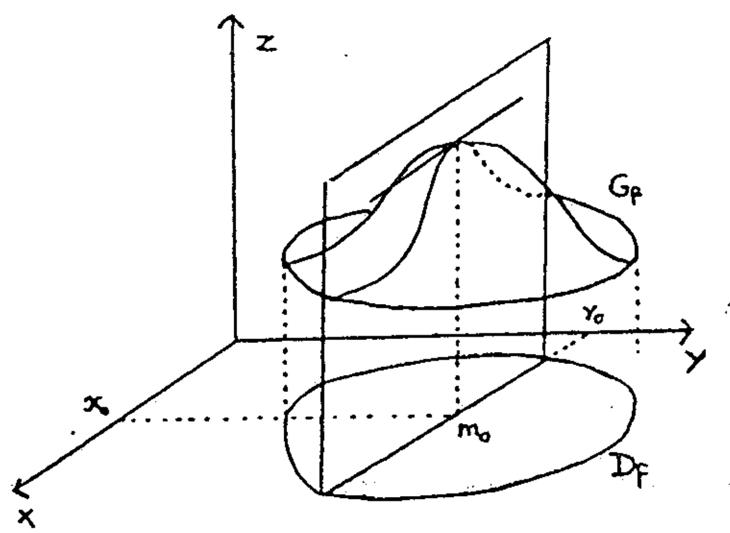
c'est-à-dire,

$$(*\text{bis}) \qquad \begin{cases} (\partial f/\partial x_1)(a_1,...,a_n) = 0 \\ \quad\vdots \\ (\partial f/\partial x_n)(a_1,...,a_n) = 0 \end{cases}$$

Preuve. Supposons, comme sur la figure, que f a un maximum relatif en m_0. La fonction partielle $f(x_1,a_2,...,a_n)$ a alors un maximum relatif en a_1. Sa dérivée en a_1 est donc nulle, c'est-à-dire:

$$(\partial f/\partial x_1)(a_1,...,a_n) = 0$$

On procède pareillement pour toutes les autre dérivées partielles.



On appelle **condition du premier ordre** la condition (*) du Th.1.6 et **point stationnaire** (ou critique) tout point m_0 intérieur au domaine D_f qui satisfait cette condition.

Nous nous concentrons désormais sur le cas de 2 variables. D'après le Th.1.6, un point $m_0(x_0,y_0)$ où il y a extremum relatif est nécessairement un point stationnaire. Chercher les points stationnaires constitue donc la première étape de l'étude des extrema relatifs d'une fonction f: il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} (\partial f/\partial x)(x,y) = 0 \\ (\partial f/\partial y)(x,y) = 0 \end{cases}$$

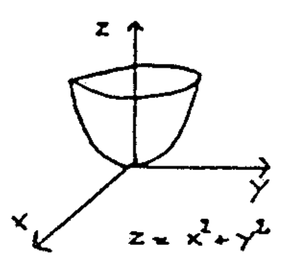
Exemple 8 Trouver les points stationnaires de $f(x,y) = x^2y - \frac{x^2}{2} - y^2$
Rép. O(0,0), A(1,1/2), B(-1,1/2)

Attention! La réciproque du Th.1.6 est fausse: comme en une variable, la condition du premier ordre ne garantit pas l'existence d'un extremum en m_o. Nous donnons des contre-exemples au paragraphe §1.5. Géométriquement, la condition $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(m_o) = \vec{0}$ signifie que le plan tangent au graphe G_f en $M_o(x_o,y_o,f(x_o,y_o))$ est horizontal.

(**) Pour qu'il y ait extremum relatif en m_o, il faut en plus de $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(m_o) = 0$, que le graphe G_f se situe localement du même côté du plan tangent en m_o.

Notre objectif dans la seconde partie de ce chapitre sera de donner, comme en une variable, des critères pratiques permettant de décider si un point stationnaire donne lieu à un extremum relatif.

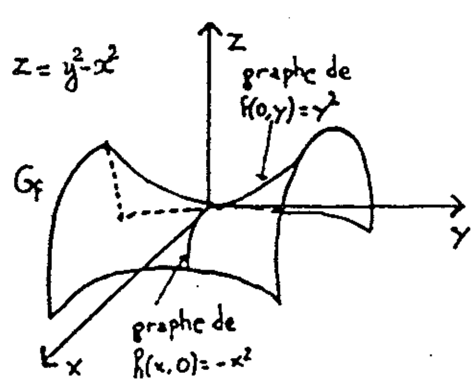
1.5 Points stationnaires d'une fonction de 2 variables: exemples types.



Exemple 9 $f(x,y) = x^2+y^2$. L'origine O(0,0) est le seul point stationnaire. C'est un minimum relatif (et même absolu).

Exemple 10 $f(x,y) = -x^2-y^2$. L'origine O(0,0) est le seul point stationnaire. C'est un maximum relatif (et même absolu).

Exemple 11 $f(x,y) = y^2-x^2$. L'origine O(0,0) est le seul point stationnaire. Ce n'est pas un maximum relatif car la fonction partielle $f(0,y) = y^2$ a un minimum en 0. Ce n'est pas non plus un minimum relatif car la fonction partielle $f(x,0) = -x^2$ a un maximum en 0. On dit qu'il y a un **col** ou un **point selle** en O.



Plus généralement, nous dirons qu'il y a col ou point selle en un point stationnaire $m_o(x_o,y_o)$ s'il existe deux sections verticales du graphe G_f présentant l'une, un maximum relatif en m_o et l'autre un minimum relatif.

1.6 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 est un raffinement de l'identité de la différentielle, qui peut être considérée comme la formule de Taylor-Young à l'ordre 1. Cette formule sera généralisée et démontrée au chapitre suivant.

THEOREME 1.7 (a) *Soit* $f(x)$ *une fonction deux fois dérivable en un point* x_0 *intérieur au domaine* D_f. *Alors*

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2 o(1)$$

où $o(1)$ *désigne un terme qui tend vers* 0 *quand* Δx *tend vers* 0.

(b) *Soient* $f(x,y)$ *une fonction de deux variables et* m_0 *un point intérieur au domaine* D_f. *On suppose que les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur un voisinage de* m_0. *Alors*

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\right] +$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(\Delta y)^2\right]$$

$$+ ((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)o(1)$$

où $o(1)$ *désigne un terme qui tend vers* 0 *quand* $(\Delta x,\Delta y)$ *tend vers* $(0,0)$.

Classiquement; on note:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = r(x_0,y_0) = r \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) = s(x_0,y_0) = s \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = t(x_0,y_0) = t \end{cases}$$

La formule de Taylor à l'ordre 2 en deux variables s'écrit alors:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) =$$
$$f(x_0,y_0) + df_{m_0}(\overrightarrow{\Delta m}) + \frac{1}{2}\left[r(\Delta x)^2+2s\Delta x\Delta y+t(\Delta y)^2\right]$$
$$+ o(\|\overrightarrow{\Delta m}\|^2).$$

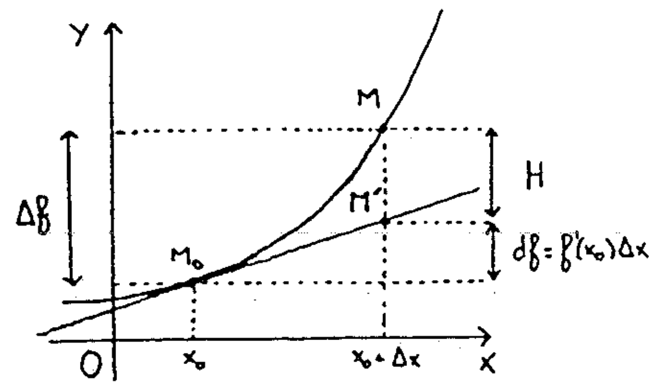
où $\overrightarrow{\Delta m} = (\Delta x,\Delta y)$ désigne le vecteur accroissement.

Interprétation géométrique Une variable. Désignons les points d'abscisse $x_0+\Delta x$ sur le graphe G_f et sur la tangente à G_f en $M_0(x_0,f(x_0))$ respectivement par M et M'. Ces sont les points de coordonnées

$$M(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x)) \quad \text{et} \quad M'(x_0+\Delta x,f(x_0)+f'(x_0)\Delta x)$$

Notons H l'écart vertical entre M et M', i.e.,

$$H = f(x_0+\Delta x)-(f(x_0)+f'(x_0)\Delta x)$$



D'après l'identité de la différentielle, la quantité H est un $o(\Delta x)$. C'est-à-dire, l'erreur commise quand on identifie les points M et M', est négligeable devant Δx. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 donne un équivalent de H:

$$H = \frac{1}{2} f''(x_0)(\Delta x)^2+o((\Delta x)^2)$$

Exemple 12 Donner une nouvelle démonstration de l'implication $(f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0) \Rightarrow$ extremum relatif en x_0.

Solution. Le point x_0 est un point stationnaire. Il s'agit maintenant de vérifier la condition (*) de §1.2, i.e., que le graphe G_f reste localement du même côté de la tangente en x_0. Cela revient à montrer que H a un signe constant sur un voisinage de x_0. Or d'après la formule de Taylor-Young, on a:

$$H = \frac{1}{2} f''(x_0)(\Delta x)^2 \; (1+o(1))$$

Pour Δx assez petit, $1+o(1) > 0$ et H est donc du signe de $f''(x_0)$.

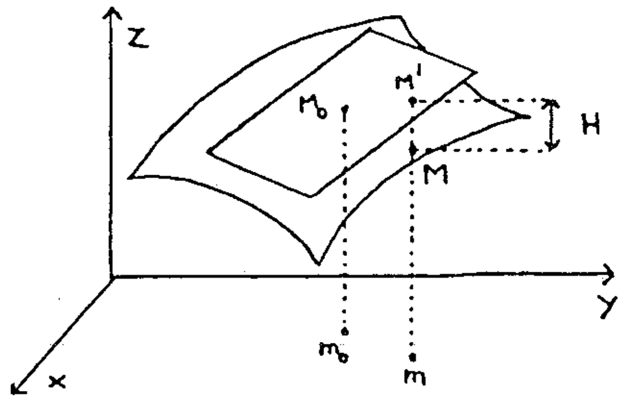
Deux variables. Notons P le plan tangent à G_f au point $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ et m le point de D_f de coordonnées $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$. Considérons alors les points au dessus de m sur le graphe G_f et sur P; désignons les respectivement par M et M'. Ce sont les points de coordonnées

$$M\left(x_0+\Delta x\ ,\ y_0+\Delta y\ ,\ f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\right)$$

$$M'\left(x_0+\Delta x\ ,\ y_0+\Delta y\ ,\ f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\right)$$

Notons H l'écart vertical entre M et M', i.e.,

$$H = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - \left(f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y \right)$$



D'après l'identité de la différentielle, la quantité H est un $o(\|\overrightarrow{\Delta m}\|)$. C'est-à-dire, l'erreur commise quand on identifie les points M et M', est négligeable devant $\|\overrightarrow{\Delta m}\|$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 donne une estimation plus précise de H. On a:

$$H = \frac{1}{2}\left[r(\Delta x)^2 + 2s\Delta x\Delta y + t(\Delta y)^2\right] + o(\|\overrightarrow{\Delta m}\|^2)$$

1.7 Conditions du second ordre (2 variables).

Nous donnons ici un critère permettant de décider, pour chaque point stationnaire, s'il s'agit d'un maximum relatif, d'un minimum relatif ou d'un col. Ce résultat ne s'applique qu'aux fonctions de 2 variables.

THEOREME 1.8 *Soient* $f(x,y)$ *une fonction de deux variables et* $m_0(x_0,y_0)$ *un point stationnaire de* f. *On suppose que les dérivées partielles d'ordre 2 de* f *existent et sont continues sur un voisinage du point* m_0. *On calcule la quantité* s^2-rt *au point* m_0.

- *si* $s^2-rt < 0$, *alors il y a un extremum relatif en* m_0.
  - *maximum relatif si* $r < 0$
  - *minimum relatif si* $r > 0$
- *si* $s^2-rt > 0$, *alors il y a un col en* m_0.
- *si* $s^2-rt = 0$, *ce théorème ne permet pas de conclure.*

Exemple 13 Vérifier que le Th.1.8 donne bien les conclusions observées dans les exemples types du §1.5.

Exemple 14 Déterminer la nature des points stationnaires de $f(x,y) = x^2y - \frac{x^2}{2} - y^2$.

Solution. On sait (Cf. Exemple 8) qu'il y a 3 points stationnaires: O(0,0), A(1,1/2), B(-1,1/2). On calcule les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

$$\begin{cases} \partial^2 f/\partial x^2 = 2y-1 \\ \partial^2 f/\partial x\partial y = 2x \\ \partial^2 f/\partial y^2 = -2 \end{cases}$$

Au point O(0,0). On obtient

$$\begin{cases} r = -1 \\ s = 0 \\ t = -2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad s^2-rt = -2$$

Il y a donc un extremum relatif en O(0,0). Comme $r = -1 < 0$, c'est un maximum relatif.

Au point A(1,1/2). On obtient

$$\begin{cases} r = 0 \\ s = 2 \\ t = -2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad s^2-rt = 4$$

Il y a un col en A(1,1/2).

Au point A(-1,1/2). On obtient

$$\begin{cases} r = 0 \\ s = -2 \\ t = -2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad s^2-rt = 4$$

Il y a un col en A(-1,1/2).

Exemple 15 Etudier les extrema relatifs de $f(x,y) = x^4+y^4-2(x-y)^2$.

Rép. 3 points stationnaires: O(0,0), $A(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. Minimum relatif en A et B. Le Th.1.8 ne permet pas de conclure pour l'origine O(0,0).

Remarque. Quand $s^2-rt = 0$, le Th.1.8 ne permet de rien conclure quant à la nature du point stationnaire m_0. Tout peut arriver: extremum relatif, col ou autre chose.

Exemple 16 Vérifier que, pour chacune des fonctions f suivantes, l'origine est un point stationnaire où $s^2-rt = 0$. Tracer le graphe de f. En déduire la nature du point stationnaire.
(a) $f(x,y) = x^4+y^4$ (b) $f(x,y) = x^4-y^4$ (c) $f(x,y) = y^3$

Preuve du Th.1.8. Par hypothèse, le point m_0 est un point stationnaire de f. Il s'agit maintenant de regarder si le graphe G_f se situe localement du même côté du plan tangent en m_0. Cela revient à étudier si l'écart vertical

$$H = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - \left(f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y \right)$$

qui ici vaut simplement

$$H = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0),$$

a un signe constant, pour $\overrightarrow{\Delta m} = (\Delta x, \Delta y)$ petit en norme. D'après la formule de Taylor-Young, on a

$$H = \frac{1}{2}\left[r(\Delta x)^2+2s\Delta x\Delta y+t(\Delta y)^2\right] + o(||\overrightarrow{\Delta m}||^2)$$

La suite de la démonstration serait facile s'il n'y avait pas le terme $o(||\overrightarrow{\Delta m}||^2)$. En effet, il n'est pas difficile de déterminer le signe de la quantité trinômiale

$$T = \frac{1}{2}\left[r(\Delta x)^2+2s\Delta x\Delta y+t(\Delta y)^2\right]$$

On écrit

$$T = \frac{r}{2}\left[(\Delta x+\frac{s}{r}\Delta y)^2 + \frac{rt-s^2}{r^2}(\Delta y)^2\right]$$

D'où

• si $s^2-rt < 0$, T est du signe de r; il y a extremum relatif, maximum si $r < 0$ et minimum si $r > 0$.

• si $s^2-rt > 0$, T n'a pas de signe constant; il est positif pour certaines directions de l'accroissement $\overrightarrow{\Delta m}$ et négatif pour d'autres. Il y a un col en m_0.

Malheureusement, la présence du terme $o(||\overrightarrow{\Delta m}||^2)$ complique un peu la démonstration. Nous expliquons comment on peut procéder dans le cas "$s^2-rt < 0$ et $r > 0$". Les deux autres cas sont similaires.

On choisit un nombre réel $\alpha > 0$ assez petit pour que les deux nombres $r' = r-\alpha$ et $t' = t-\alpha$ soient de même signe que r et t et que $s^2-r't' < 0$ (C'est la continuité de la fonction $(r,s,t) \to s^2-rt$ qui rend ce choix possible). Le raisonnement ci-dessus montre que la quantité trinômiale

$$T' = \frac{1}{2}\left[r'(\Delta x)^2+2s\Delta x\Delta y+t'(\Delta y)^2\right]$$

est positive. Mais on a

$$H = T' + \frac{\alpha}{2}((\Delta x)^2+(\Delta y)^2) + o(||\overrightarrow{\Delta m}||^2)$$

On déduit donc

$$H \geq (\frac{\alpha}{2} + o(1))\ ||\overrightarrow{\Delta m}||^2$$

Pour des accroissements $\overrightarrow{\Delta m} = (\Delta x, \Delta y)$ assez petits en norme, on aura donc

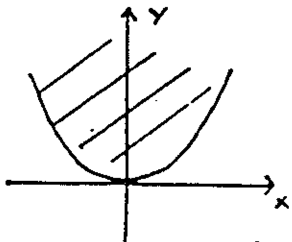
$$H \geq 0$$

§2. CONVEXITE.

2.1 Ensembles et fonctions convexes.

DEFINITION 2.1 *Un sous-ensemble* C *de* **R**, $\mathbf{R}^2$ *ou* $\mathbf{R}^3$ *est dit convexe s'il a la propriété suivante: pour tous points* A et B *dans* C , *le segment* [A,B] *est inclus dans* C.

Exemple 1 Les sous-ensembles convexes de **R** sont les intervalles. $\mathbf{R}^*$ n'est pas convexe. Les seuls sous-ensembles de **R** convexes et finis sont l'ensemble vide et les singletons.

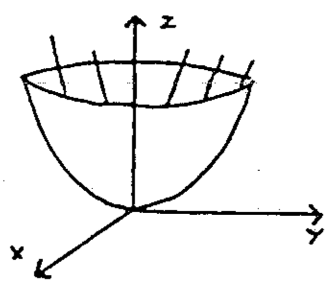


Epigraphe de $x \mapsto x^2$

Exemple 2 Les disques, les intérieurs d'ellipses, de triangles sont convexes. La parabole $y = x^2$ n'est pas convexe, mais la partie du plan au dessus de la parabole $y = x^2$ est convexe.

Exemple 3 Les boules sont convexes. La partie de l'espace $\mathbb{R}^3$ au dessus du paraboloïde $z = x^2+y^2$ est convexe.

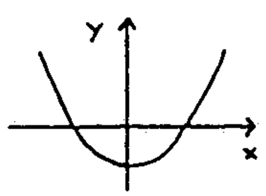
DEFINITION 2.2 *On appelle* ***épigraphe*** *d'une fonction* f *d'une variable (resp. de deux variables) la partie du plan* $\mathbb{R}^2$ *(resp. de l'espace* $\mathbb{R}^3$*) située au dessus du graphe de* f*. L'épigraphe de* f *est donc défini par l'inéquation* $y \geq f(x)$ *(resp.* $z \geq f(x,y)$ *).*
Une fonction f *est dite convexe si son épigraphe est convexe et concave si* $-f$ *est convexe.*



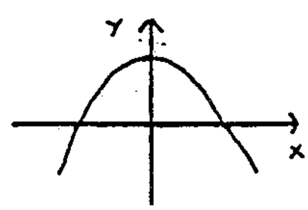
Epigraphe de $(x,y) \mapsto x^2+y^2$

Exemple 4 Les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2$ sont respectivement convexe et concave. Les fonctions affines $x \to ax+b$ sont à la fois convexes et concaves.

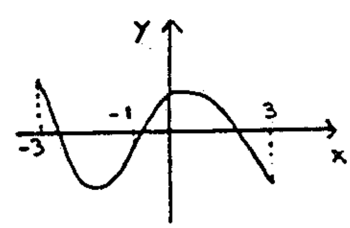
Géométriquement, une fonction est convexe si la courbure de son graphe est dirigée vers les y positifs et concave si elle est dirigée vers les y négatifs.



f convexe

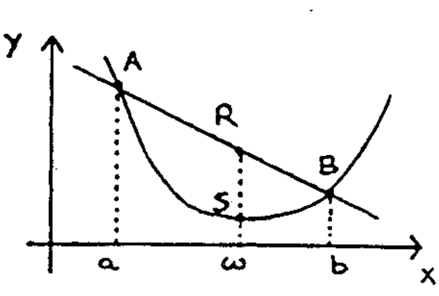


f concave



f convexe sur $[-3,-1]$,
concave sur $[-1,3]$
f change d'inflexion en -1

2.2 Sécantes et convexité.



Soit $f(x)$ une fonction convexe sur un intervalle I. Soient a et b dans I tels que $a < b$. Considérons les points du graphe G_f correspondant $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$. On observe qu'entre A et B, le graphe G_f se situe toujours en dessous de la sécante (AB). On va traduire cette observation. Il s'agit d'exprimer le fait que, pour tout $\omega \in [a,b]$ le point S est au dessous du point R (Cf. figure ci-contre).

Le nombre ω est entre a et b; on peut donc l'écrire

$$\omega = a + t(b-a) \quad \text{i.e.,} \qquad \omega = (1-t)a + tb$$

où le paramètre t est dans l'intervalle [0,1].
Les coordonnées du point S sont donc

$$S((1-t)a+tb, f((1-t)a+tb))$$

On obtient ensuite celles du point R en écrivant l'équation de la sécante (AB).

$$y-f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Le point R est de coordonnées

$$R((1-t)a+tb, (1-t)f(a)+tf(b))$$

En écrivant que l'ordonnée de S est inférieure à celle de R, on obtient le résultat suivant.

PROPOSITION 2.3 *Une fonction* $f(x)$ *définie sur un intervalle* I *est convexe ssi entre deux points quelconques du graphe de* f*, la sécante joignant ces deux points se situe toujours au dessus du graphe* G_f*, c'est-à-dire ssi, pour tous* a, b *dans* I *et tout* $t \in [0,1]$*, on a*

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b).$$

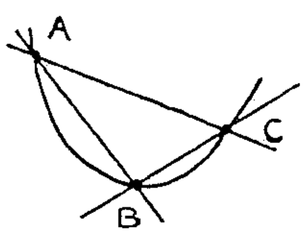
Remarques (1) Une fonction $f(x)$ est concave si pour tous a, b dans I et tout $t \in [0,1]$, on a

$$f((1-t)a+tb) \geq (1-t)f(a)+tf(b)$$

Les fonctions affines sont les seules fonctions qui soient à la fois convexes et concaves (Cf. Exercice 43).

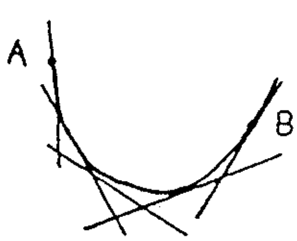
(2) La Prop.2.3 reste valable pour une fonction de 2 variables. Il faut juste remplacer l'intervalle I par un domaine convexe C de $\mathbf{R}^2$ et voir a et b comme des points de ce domaine; i.e., $a = a(x_1,y_1)$, $b = b(x_2,y_2)$ et $(1-t)a+tb$ est le point de coordonnées $((1-t)x_1+tx_2,(1-t)y_1+ty_2)$. En fait, la convexité en 2 variables se ramène à la convexité en une variable. En effet, il résulte de la définition que

(*) Une fonction $f(x,y)$ est convexe ssi pour tous a, e dans $\mathbf{R}^2$, la fonction d'une variable $\varphi(t) = f(a+te)$ est convexe.



(3) La condition de la Prop.2.3 peut aussi se formuler de la façon suivante. Une fonction f est convexe si pour tous points distincts A, B, C sur le graphe G_f apparaissant dans cet ordre de gauche à droite, on a

(**) pente de (AB) $\leq$ pente de (AC) $\leq$ pente de (BC)



(4) La caractérisation ci-dessus est importante; on peut notamment en déduire les propriétés suivantes des fonctions convexes.

(a) Si la fonction f est convexe et dérivable, les pentes des tangentes au graphe G_f vont en croissant entre deux points a et b tels que $a \leq b$ (Cf. Exercice 23).

(b) Une fonction convexe (ou concave) sur un intervalle I est nécessairement continue en tout point intérieur à I (Cf. Exercice 24); aux bornes de l'intervalle, il peut y avoir ou ne pas y avoir continuité.

(c) Un minimum relatif d'une fonction convexe est automatiquement un minimum absolu (Cf. Exercice 25).

2.3 Critère de convexité (une variable).

La condition de la Prop.2.3 est difficile à vérifier. Dans la pratique, on utilise les critères de ce paragraphe pour étudier la convexité des fonctions d'une variable.

THEOREME 2.4 *Une fonction* f *dérivable sur un intervalle* I *est convexe ssi sa dérivée* f' *est croissante sur* I.

Preuve. ($\Rightarrow$) La condition "f' croissante" est l'exacte traduction de la propriété des tangentes observée plus haut (§2.2 Remarque (4) (a)).

($\Leftarrow$) Soient a et b dans I tels que $a \leq b$ et $t \in [0,1]$. Il s'agit de montrer que

$$f((1-t)a+tb) - (1-t)f(a) - tf(b) \leq 0$$

Considérons le terme de gauche comme une fonction $\Phi(b)$ de b. On a

$$\Phi'(b) = t\,[f'((1-t)a+tb) - f(b)]$$

La dérivée f' étant croissante par hypothèse, on a $\Phi'(b) \leq 0$. On en déduit que la fonction Φ est décroissante. En particulier

$$\Phi(b) \leq \Phi(a) = 0.$$

On déduit du Th.2.4 le très important critère suivant.

COROLLAIRE 2.5 *Soit* f *une fonction deux fois dérivable. Alors* f *est convexe sur les intervalles où* $f'' \geq 0$ *et concave sur les intervalles où* $f'' \leq 0$.

Exemple 5 Etudier la convexité des fonctions usuelles.

En un point x_0 où la dérivée seconde **f" s'annule en changeant de signe**, la courbure du graphe G_f change de côté. On dit que x_0 est un **point d'inflexion**.

Exemple 6 Etudier la convexité des fonctions suivantes. Tracer leur graphe.
(a) $f(x) = x^3-3x$ (b) $f(x) = x^4-6x^2+12$ (c) $f(x) = \mathrm{Log}(x)/x$

Solution.(c) Nous avons étudié cette fonction plus haut (§1 Exemple 5). Pour la convexité, on calcule f":

$$f''(x) = \frac{(2\mathrm{Log}(x)-3)}{x^3}$$

La fonction f est donc concave sur $]0,e^{3/2}]$ et convexe sur $[e^{3/2},+\infty[$. Le point $A(e^{3/2},3/(2e^{3/2}))$ est un point d'inflexion.

Attention! Il n' y a pas nécessairement de point d'inflexion en un point x_0 où la dérivée seconde f" s'annule sans changer de signe (Contre-exemple: $f(x) = x^4$ et $x_0 = 0$).

Le graphe d'une fonction convexe se situe en dessous des sécantes mais au dessus des tangentes. De façon précise, on a

PROPOSITION 2.6 *Soit* f *une fonction convexe dérivable sur un intervalle* I. *Alors pour tout* $x_0 \in I$, *le graphe* G_f *se situe au dessus de la tangente à* G_f *en* x_0.

Preuve. La tangente à G_f en x_0 a pour équation

$$y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Il s'agit donc de montrer que la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0))$$

est ≥ 0 sur I. La dérivée de φ vaut

$$\varphi'(x) = f'(x)-f'(x_0)$$

On déduit de la croissance de f' (Th.2.4) que $\varphi'(x)$ est ≤ 0 si $x \leq x_0$ et ≥ 0 si $x \geq x_0$; la fonction φ a donc un minimum en x_0. C'est-à-dire,

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) = 0 \text{ pour tout } x \in I.$$

Le graphe d'une fonction se situe donc au dessus de ses tangentes sur les intervalles où f est convexe et au dessous sur les intervalles où f est concave. En un point d'inflexion, le graphe traverse sa tangente.

En combinant maintenant la Prop.2.6 avec l'énoncé (*) de §1.2, on obtient

COROLLAIRE 2.7 *Soient* f *une fonction convexe dérivable sur un intervalle* I *et* x_0 *un point stationnaire de* f. *Si* f *est convexe (resp. concave) au voisinage de* x_0, *alors* f *a un minimum (resp. un maximum) en* x_0.

En fait, ce résultat n'est pas nouveau. Nous retrouvons en effet le second type de condition, que nous avons appelée globale, sous laquelle on peut conclure à l'existence d'un extremum relatif en présence d'un point stationnaire (Cf. §1.3 $\boxed{2}$).

2.4 Critère de convexité (deux variables).

Du Th.2.4 et de la Rem. (2) du §2.2, on déduit le résultat suivant.

THEOREME 2.8 *Soit* f(x,y) *une fonction possédant des dérivées partielles continues sur un domaine convexe* C *du plan. Alors la fonction* f *est convexe ssi pour tous points* m_1 *et* m_2 *dans* C, *on a*

$$(df_{m_2}-df_{m_1})(\overrightarrow{m_2m_1}) \geq 0$$

Preuve. D'après l'énoncé (*) de §2.2 et le Th.2.4, une fonction f(x,y) est convexe sur C ssi pour tout $a(x_0,y_0) \in C$ et $\vec{e} = (u,v)$, la fonction de la variable t

$$\varphi(t) = f(a+t\vec{e}) = f(x_0+tu,y_0+tv)$$

est de dérivée croissante. On a

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+tu,y_0+tv)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+tu,y_0+tv)v = df_{m(t)}(\vec{e})$$

où m(t) désigne le point de coordonnées (x_0+tu,y_0+tv).
La dérivée $\varphi'(t)$ est croissante ssi pour t_1 et t_2 quelconques, le taux d'accroissement

$$\frac{df_{m(t_2)}(\vec{e})-df_{m(t_1)}(\vec{e})}{t_2-t_1} = \frac{1}{(t_2-t_1)^2}(df_{m(t_2)}-df_{m(t_1)})((t_2-t_1)\vec{e})$$

est positif. On termine la démonstration en posant $m_1 = m(t_1)$ et $m_2 = m(t_2)$ et en remarquant que

$$(t_2-t_1)\vec{e} = (\overrightarrow{m_2m_1})$$

Note. L'intérêt du Th.2.8 est que la condition de convexité qui y est donnée est intrinsèque: elle est valable pour n'importe quel nombre de variables. En particulier, pour une fonction d'une variable f(x), elle s'écrit plus simplement

$$(f'(x_2)-f'(x_1))(x_2-x_1) \geq 0,$$

ce qui est l'exacte traduction de la croissance de f'.

De ce paragraphe, nous retiendrons surtout le critère suivant.

THEOREME 2.9 *Soit* f(x,y) *une fonction définie sur un domaine convexe* C. *On suppose que les dérivées partielles d'ordre* 2

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

sont continues sur C.

(a) *La fonction* f *est* $\boxed{\text{CONVEXE}}$ *sur* C *ssi*

(*) *le trinôme* $rU^2 + 2sU + t$ *est toujours positif*

c'est-à-dire, ssi

(* bis) $\boxed{s^2-rt \leq 0,\ r \geq 0,\ t \geq 0}$ en tout point de C.

(b) *La fonction* f *est* $\boxed{\text{CONCAVE}}$ *sur* C *ssi*

(*) *le trinôme* $rU^2 + 2sU + t$ *est toujours négatif*

c'est-à-dire, ssi

(* bis) $\boxed{s^2-rt \leq 0,\ r \leq 0,\ t \leq 0}$ en tout point de C.

Preuve du Th.2.9. D'après le début de la preuve précédente, f est convexe ssi la fonction de t

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+tu,y_0+tv)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+tu,y_0+tv)v$$

est croissante, i.e., si la dérivée seconde φ'' est positive. Or, on a

$$\varphi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+tu,y_0+tv)u^2 +$$

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+tu,y_0+tv)uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+tu,y_0+tv)v^2$$

i.e.,

$$\varphi''(t) = ru^2 + 2suv + tv^2 = v^2(rU^2 + 2sU + t)$$

où r, s et t sont pris au point de coordonnées (x_0+tu,y_0+tv) et où on a posé $U = u/v$.

Exemple 7 Etudier la convexité des fonctions suivantes.
(a) $f(x,y) = \mathrm{Log}(y-x^2)$ (b) $f(x,y) = \exp(x^2+y)$

Solution. (a) La fonction f est définie sur $D_f = \{ m(x,y) \mid y > x^2 \}$. C'est un domaine convexe du plan (car c'est l'épigraphe de $x \to x^2$). La fonction f admet sur D_f des dérivée partielles d'ordre 2 continues. Un petit calcul montre que

$$r = \frac{-2y-2x^2}{(y-x^2)^2} \quad s = \frac{2x}{(y-x^2)^2} \quad t = \frac{-1}{(y-x^2)^2}$$

On obtient ensuite

$$s^2-rt = \frac{2x^2-2y}{(y-x^2)^2}$$

C'est une quantité négative quand m(x,y) varie dans D_f. Comme r et t sont ≤ 0 sur D_f, la fonction f est concave.

En deux variables on a le même type de résultats qu'en une variable quant à la position du graphe par rapport aux plans tangents.

PROPOSITION 2.10 *Soit* f *une fonction convexe admettant des dérivées partielles continues sur un domaine convexe* C. *Alors pour tout* $m_0(x_0,y_0) \in C$, *le graphe* G_f *se situe au dessus du plan tangent à* G_f *en* m_0.

Preuve. On se ramène au cas d'une variable en introduisant la fonction

$$\varphi(t) = f(m_0+t\vec{e}) = f(x_0+tu,y_0+tv)$$

où $\vec{e} = (u,v)$ désigne un vecteur quelconque. C'est une fonction convexe. D'après la Prop.2.6, on a

$$\varphi(t) \geq \varphi(0) + \varphi'(0)t$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+tu, y_0+tv)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+tu, y_0+tv)v$$

L'inégalité précédente devient donc

$$f(x_0+tu, y_0+tv) \geq f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)tu + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)tv$$

Cette inégalité est le résultat désiré.

Il est maintenant facile de combiner la Prop.2.10 avec l'énoncé (**) du §1 pour obtenir

COROLLAIRE 2.11 *Soient* f *une fonction admettant des dérivées partielles continues sur un domaine convexe* C *et* m_0 *un point stationnaire de* f. *Si* f *est convexe (resp. concave) au voisinage de* m_0, *alors* f *a un minimum relatif (resp. un maximum relatif) en* m_0.

§3. METHODE DE LAGRANGE.

3.1 Le résultat principal.

La méthode de Lagrange permet d'appréhender les **problèmes d'extrema avec contrainte.** Ces problèmes se posent ainsi:

• f(x,y) et g(x,y) étant donnés, trouver les extrema (relatifs) de f(x,y) quand x et y sont liés par la contrainte g(x,y) = 0.

Exemple 1 Trouver le maximum du produit de 2 nombres réels de somme égale à 12 (f(x,y) = xy et g(x,y) = x+y-12).

ou, de façon équivalente:

• f(x,y) et g(x,y) étant donnés, trouver les extrema (relatifs) de f(x,y) quand le point m(x,y) varie sur la courbe C d'équation g(x,y) = 0.

Exemple 2 Trouver les points les plus proches de l'origine sur la droite x+y = 1 (f(x,y) = x^2+y^2 et g(x,y) = x+y-1).

Le résultat principal de la méthode de Lagrange est le suivant. Nous reviendrons au paragraphe §4 sur sa démonstration qui est une des applications du théorème des fonctions implicites (Cf. §4.2).

THEOREME 3.1 *Soit $m_o(x_o,y_o)$ un point. On suppose que les dérivées partielles de f et de g existent et sont continues sur un voisinage du point m_o et que $\overrightarrow{\text{grad}}\ g(x_o,y_o) \neq \vec{0}$. Si $m_o(x_o,y_o)$ est un extremum relatif de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 0, alors*

(*) *les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x_o,y_o)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\ g(x_o,y_o)$ sont parallèles.*

La méthode de Lagrange commence donc par la résolution du système de 2 équations à 2 inconnues

$$\begin{cases} \text{Condition } (*) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

où on exprime la condition (*) sous l'une des deux formes suivantes:

(* bis) il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o) = \lambda\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_o,y_o) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o) = \lambda\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_o,y_o) \end{cases}$

(* ter) le déterminant $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o) & \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_o,y_o) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_o,y_o) \end{vmatrix}$ est nul.

On appelle point stationnaire du problème tout point $m_o(x_o,y_o)$ solution de ce système. Attention! Comme pour les problèmes d'extrema libres (i.e., sans contrainte), un point stationnaire n'est pas nécessairement une solution du problème.

Exemple 3 Résoudre les problèmes posés dans les exemples 1 et 2.

Solution. (Ex.1) Il s'agit de trouver le maximum de f(x,y) = xy sous la contrainte x+y = 12. Posons g(x,y) = x+y-12. On a

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}\ f = (y,x) \\ \overrightarrow{\text{grad}}\ g = (1,1) \end{cases}$$

Les points stationnaires du problème sont solutions du système

$$\begin{cases} y-x = 0 \\ x+y-12 = 0 \end{cases}$$

On trouve un seul point stationnaire: le point A(6,6).

Montrons que c'est effectivement la solution du problème. Ici, on peut se ramener en une variable en résolvant en y dans la contrainte: il s'agit en fait d'étudier la fonction $f(x,12-x) = 12x-x^2$. En x = 6, ce trinôme a bien un maximum.
Conclusion: le produit de deux nombres de somme égale à 12 est maximal (= 36) quand ces nombres sont égaux à 6.

Lagrangien Dans la pratique, il est commode d'introduire la fonction

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

qu'on appelle fonction de Lagrange ou lagrangien. Les trois dérivées partielles de $L(x,y,\lambda)$ valent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y}-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -g(x,y) \end{cases}$$

On voit que la nullité de ces trois dérivées partielles correspond exactement aux trois conditions vues plus haut qui doivent être satisfaites par un point stationnaire du problème. Autrement dit, la recherche des points stationnaires du problème de l'optimisation de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$ est équivalente à la recherche des points stationnaires de la fonction de Lagrange $L(x,y,\lambda)$. L'utilisation du lagrangien ramène donc un problème d'extrema avec contrainte à 2 variables à un problème d'extrema libres à 3 variables.

Notes 1) Ce sont les solutions en (x,y) du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} ;$$

qui nous intéressent en premier lieu; on peut donc éliminer λ entre les deux premières équations et se ramener ainsi à un système d'inconnues (x,y). Pour certaines questions cependant (voir plus bas), il peut être utile de retrouver ensuite le coefficient λ (qu'on appelle coefficient de Lagrange).

2) On peut écrire la lagrangien sous la forme $f(x,y)+\lambda g(x,y)$, ce qui revient à changer λ en $-\lambda$. Cela n'affecte pas le résultat en (x,y). En revanche, il est essentiel de bien écrire la contrainte sous la forme $g(x,y) = 0$.

Exemple 4 Un exemple classique en Economie est celui du calcul des fonctions de demande. Pour des prix p et q de deux biens X et Y et un revenu R donnés, les demandes x et y en X et Y résultent de la maximisation de l'utilité $U(x,y)$ sous la contrainte de budget $px+qy = R$.

Prenons par exemple $U(x,y) = x^2y$, $p = 1$, $q = 2$ et $R = 5$. Le problème consiste à optimiser $U(x,y)$ sous la contrainte $x+2y = 5$. On écrit qu'en un point stationnaire, le lagrangien

$$L(x,y,\lambda) = U(x,y) - \lambda(px+qy)$$

c'est-à-dire, ici

$$L(x,y,\lambda) = x^2y - \lambda(x+2y-5)$$

a ces trois dérivées partielles nulles. D'où le système

$$\begin{cases} 2xy-\lambda = 0 \\ x^2-2\lambda = 0 \\ x+2y-5 = 0 \end{cases}$$

dont la solution est

$$x = \frac{10}{3} \quad y = \frac{5}{6} \quad \lambda = \frac{50}{9}$$

On vérifie, en procédant, par exemple comme dans l'exemple 3, que cette solution correspond à un maximum. L'utilité maximale est

$$U_0 = (\frac{10}{3})^2 x (\frac{5}{6}) = 2(\frac{5}{3})^3$$

Interprétation du coefficient λ. Dans les calculs précédents, λ n'est qu'un intermédiaire de calcul. On peut cependant lui attribuer une signification. Reprenons les données numériques de l'exemple précédent mais en remplaçant le revenu $R = 5$ par $R = 5+\varepsilon$. C'est-à-dire, on fait bouger légèrement la contrainte en remplaçant $g(x,y) = 0$ par $g(x,y)-\varepsilon = 0$ pour $\varepsilon > 0$ petit.

Le système à résoudre devient

$$\begin{cases} 2xy-\lambda = 0 \\ x^2-2\lambda = 0 \\ x+2y-(5+\varepsilon) = 0 \end{cases}$$

dont la nouvelle solution est

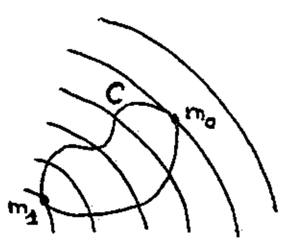
$$x = \frac{10+2\varepsilon}{3} \; ; \; y = \frac{5+\varepsilon}{6} \; ; \; \lambda = 2(\frac{5+\varepsilon}{3})^2 \qquad \text{avec} \quad U_0(\varepsilon) = 2(\frac{5+\varepsilon}{3})^3$$

On remarque sur cet exemple que

$$\frac{\partial U_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \lambda$$

Il s'agit d'un fait général. Le coefficient de Lagrange λ s'interprète comme la dérivée de la fonction objectif à optimiser par rapport au niveau de la contrainte (Cf. Exercice 44).

Interprétation géométrique du Th.3.1.



Le vecteur $\overrightarrow{grad} \, f(x_0,y_0)$ est un vecteur normal en m_0 à la ligne de niveau de f, i.e., la ligne de niveau l_f^c où $c = f(x_0,y_0)$. Le vecteur $\overrightarrow{grad} \, g(x_0,y_0)$ est un vecteur normal à la tangente en m_0 à la courbe C d'équation $g(x,y) = 0$.

Le Th.3.1 dit qu'un point m_0 solution du problème est nécessairement un point où la ligne de niveau et la courbe C sont tangentes.

3.2 Etude de la nature des points stationnaires.

En dehors de la situation de l'exemple 3 où on peut résoudre en y ou en x dans la contrainte $g(x,y) = 0$, la seconde partie du problème, qui consiste à déterminer la nature des points stationnaires du problème, peut être délicate; il n'y a pas de méthode générale simple. Voici deux exemples.

Exemple 5 On s'intéresse aux extrema de $f(x,y) = y$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$ où $g(x,y) = y^3+y+x^2$.
(a) Montrer que O(0,0) est le seul point stationnaire du problème.
(b) Montrer que $g(x,y) = 0$ définit implicitement $y(x)$.

(c) En utilisant la technique de différentiation implicite, calculer $y'(x)$ et $y''(x)$.
(d) Montrer que l'origine est un maximum de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

Solution. (a) ne pose pas de problèmes.
(b) La cubique $y \to y^3+y$, de dérivée $3y^2+1 > 0$, est bijective. Il en résulte que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'équation $y^3+y = -x^2$ a une unique solution $y(x)$.
(c) De $dg = 3y^2dy+dy+2xdx = 0$, on déduit

$$y'(x) = \frac{-2x}{3y^2+1}$$

et

$$y''(x) = \frac{-2(3y^2+1)+12xyy'}{(3y^2+1)^2}$$

(d) Le problème revient à étudier les extrema de $y(x)$. Le nombre réel $x = 0$ est le seul point stationnaire de $y(x)$, et $y(0) = 0$. Les calculs faits en (c) donnent $y'(0) = 0$ et $y''(0) = -2 < 0$. La fonction $y(x)$ a donc un maximum relatif en $x = 0$ qui vaut $y(0) = 0$.

Remarques. (1) La méthode est comparable à celle de l'exemple 3: on cherche à résoudre $g(x,y) = 0$ en y. Mais ici, on n'a pas résolu explicitement cette équation. On ne l'a fait qu'implicitement.

(2) En toute généralité, la question (b) est difficile. Heureusement, il existe un résultat général qui garantit que, sous certaines conditions, l'équation $g(x,y) = 0$ définit "localement" y en fonction de x. Ce résultat est le théorème des fonctions implicites (Cf. §4). Moyennant ce résultat, la méthode de l'exemple 5 se généralise sans difficultés (Cf. §4.2 Remarque)[1].

Exemple 6 Etudier les extrema de $f(x,y) = x^2+8y$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$ où $g(x,y) = x^2+y^2-25$.

Solution. On calcule $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, g$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}\, f = (2x,8) \\ \overrightarrow{\text{grad}}\, g = (2x,2y) \end{cases}$$

On trouve les points stationnaires du problème en résolvant le système

$$\begin{cases} x(y-4) = 0 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases}$$

Il y en a quatre:

$$m_1(0,5) \qquad m_2(0,-5) \qquad m_3(3,4) \qquad m_4(-3,4).$$

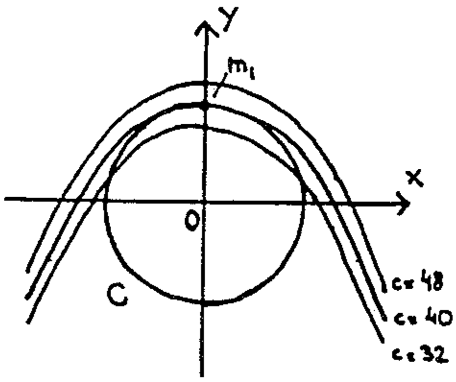
Les valeurs correspondantes de f sont

$$f(0,5) = 40 \qquad f(0,-5) = -40 \qquad f(3,4) = f(-3,4) = 41$$

Donc, si f a un maximum (resp. minimum) sur le cercle d'équation $x^2+y^2 = 25$, ce ne peut être que 41 (resp. -40).

Pour conclure que ce sont effectivement un maximum et un minimum, il suffit donc de savoir que f a un maximum et un minimum sur le cercle C(O,5). Or, cela résulte du Th.2.12 du Ch.6: la fonction f,

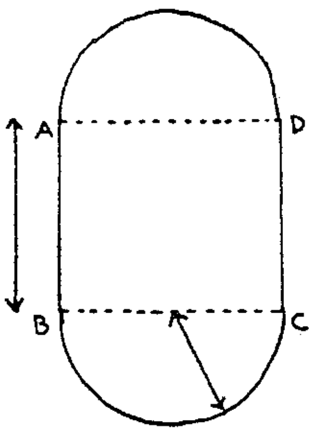
[1] Le théorème des fonctions implicites garantit en outre que la fonction $y(x)$ est dérivable (nous avons omis ce point dans l'exemple 5).



continue sur l'ensemble fermé et borné C(O,5), a un maximum et un minimum.

[**Note**. Dans cet exemple, c'est grâce à un théorème d'existence qu'on a pu montrer que les points stationnaires m_2, m_3 et m_4 donnaient lieu à des extrema.]

Mais il reste le cas du point m_1 : ce n'est évidemment pas un extremum absolu du problème, mais est-ce un extremum relatif? On peut résoudre cette question graphiquement. On trace d'une part la courbe contrainte C: $x^2+y^2 = 25$, d'autre part, quelques lignes de niveau de f, dont celle passant par le point m_1. On observe alors que, quand on se déplace sur la courbe C au voisinage du point m_1, les valeurs correspondantes de f augmentent quand on s'approche de m_1 et diminuent quand on s'en éloigne. Le point m_1 correspond donc à un maximum relatif de f sous contrainte $g(x,y) = 0$.



Exemple 7 Retrouver graphiquement les conclusions de l'exemple précédent pour les points m_2, m_3 et m_4.

Exemple 8 Le contour de la figure ci-contre, formée d'une partie rectangulaire ABCD de longueur AB = x et de 2 demi-cercles de rayon y, représente une piste d'athlétisme. Sachant qu'une piste d'athlétisme fait 400 m de long, trouver les valeurs de x et y pour lesquelles la surface rectangulaire soit maximale.

Terminons par un résultat un peu plus général qui sous les bonnes hypothèses, permet de conclure rapidement. Soient $m_0(x_0,y_0)$ un point stationnaire et λ_0 le coefficient de Lagrange associé. Nous disons que si le lagrangien $L(x,y,\lambda_0)$ est convexe (resp. concave) comme fonction de x et y,

— ce qui est le cas par exemple si f(x,y) est convexe (resp. concave) et g(x,y) est linéaire (i.e., de la forme ax+by+c) —

si alors le point m_0 est automatiquement un minimum relatif (resp. maximum relatif) de f sous la contrainte g = 0.

[**Preuve**. supposons $L(x,y,\lambda_0)$ convexe par exemple. Alors, d'après le Cor.2.11, la fonction $L(x,y,\lambda_0)$ a un minimum relatif en m_0. C'est-à-dire, pour tout m(x,y) dans un voisinage V de m_0, on a

$$f(x,y)-\lambda_0 g(x,y) \geq f(x_0,y_0)-\lambda_0 g(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)$$

On en déduit que pour tout m(x,y) à la fois dans V et sur la courbe contrainte $g(x,y) = 0$, on a

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0).]$$

3.3 Généralisation (n variables).

Le Th.3.1 se généralise au cas où f et g sont des fonctions de n variables.

THEOREME 3.2 *Soit* $m_0(a_1,...,a_n)$ *un extremum relatif de* $f(x_1,...,x_n)$ *sous la contrainte* $g(x_1,...,x_n) = 0$. *On suppose que les dérivées par-*

tielles de f *et de* g *existent et sont continues sur un voisinage du point* m_o *et que* $\overrightarrow{\text{grad}}\, g(m_o) \neq \vec{0}$. *Alors*

(**) *les vecteurs* $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(m_o)$ *et* $\overrightarrow{\text{grad}}\, g(m_o)$ ***sont parallèles.***

Exemple 9 Déterminer les extrema de $f(x,y,z) = xyz$ sous la contrainte $g(x,y,z) = 0$ où $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-12$.

Solution. On calcule $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, g$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}\, f = (yz,zx,xy) \\ \overrightarrow{\text{grad}}\, g = (2x,2y,2z) \end{cases}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, g$ sont parallèles ssi les trois déterminants

$$\begin{vmatrix} yz & xz \\ x & y \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} yz & xy \\ x & z \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} xz & xy \\ y & z \end{vmatrix}$$

sont nuls. Les points stationnaires sont solutions du système

$$\begin{cases} z(y^2-x^2) = 0 \\ y(z^2-x^2) = 0 \\ x(z^2-y^2) = 0 \\ x^2+y^2+z^2-12 \end{cases}$$

On trouve 14 points stationnaires:

$(\pm 2\sqrt{3},0,0)$; $(0,0,\pm 2\sqrt{3})$; $(0,0,\pm 2\sqrt{3})$ et $(\pm 2,\pm 2,\pm 2)$

En calculant les valeurs correspondantes de f, on trouve que le maximum et le minimum, s'ils existent, valent respectivement +8 et -8. On montre qu'ils existent effectivement en procédant comme dans l'exemple 6.

Lagrangiens généralisés

La notion de lagrangien se généralise. Les conditions nécessaires du Th.3.2 correspondent à la nullité des n+1 dérivées partielles de la fonction

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda) = f(x_1,\ldots,x_n)-\lambda g(x_1,\ldots,x_n).$$

Plus généralement, supposons que l'on cherche à optimiser une fonction $f(x_1,\ldots,x_n)$ sous plusieurs contraintes

$$g_1(x_1,\ldots,x_n) = 0, \ldots , g_p(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

(où $1 \leq p \leq n-1$).

Dans cette situation, on introduit la fonction

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_p) = f(x_1,\ldots,x_n) - \sum_{i=1}^{p}\lambda_i g_i(x_1,\ldots,x_n)$$

On peut montrer que les solutions du problème sont nécessairement solutions du système obtenu en annulant les n+p dérivées partielles du lagrangien $L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$.

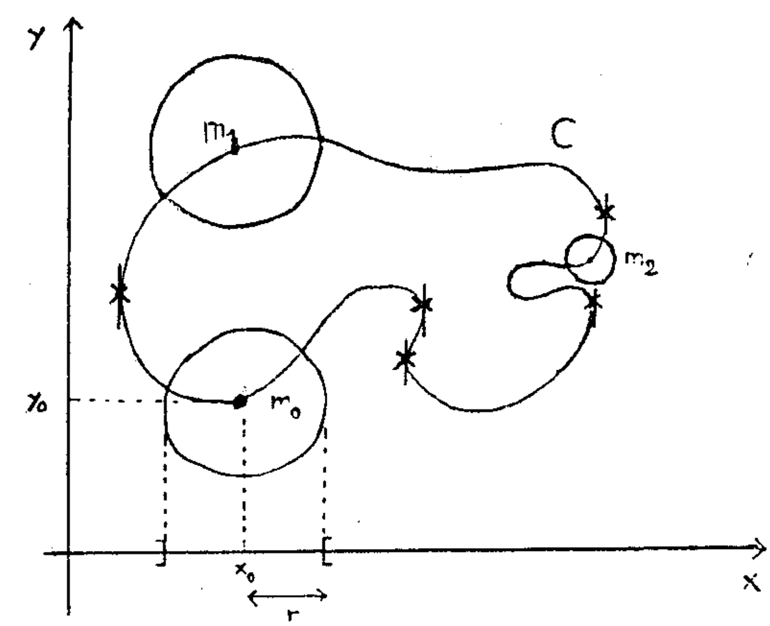
On peut également envisager que certaines des contraintes soient définies par une inégalité $g_i(x_1,\ldots,x_n) \geq 0$. Le problème peut aussi se résoudre à l'aide d'un lagrangien, mais il faut faire intervenir des conditions supplémentaires (e.g., conditions de Kuhn et Tucker).

§4. THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES.

En plusieurs endroits, nous avons mentionné ce résultat important. Notre objectif dans cette section est d'en donner un énoncé précis, d'en expliquer le sens et d'en fournir plusieurs applications.

4.1 Enoncé du résultat.

Considérons la courbe plane C représentée ci-dessous. Elle ne satisfait pas le test des verticales. Si $F(x,y) = 0$ est l'équation de la courbe C, cette équation ne définit donc pas implicitement $y(x)$, i.e., y en fonction de x.



Maintenant posons nous la même question, mais en nous restreignant à un voisinage d'un point de la courbe. Autrement dit, quels sont les points m_0 de la courbe C pour lesquels

(*) Il existe une boule $B(m_0,r)$ de rayon $r > 0$ telle que

- la partie de la courbe contenue dans $B(m_o,r)$ satisfasse le test des verticales, ou, de façon équivalente
- l'équation $F(x,y) = 0$ avec la restriction $m_o(x,y) \in B(m_o,r)$ définisse implicitement $y(x)$.

Les points m_o, m_1 sur la figure ont cette propriété. En fait, presque tous les points de la courbe l'ont, même si pour certains points comme m_2, il faille prendre r assez petit. Quand un point m_o a la propriété (*), on dit que l'équation $F(x,y) = 0$ définit implicitement $y(x)$ au voisinage de m_o.

Il existe cependant cinq points sur la courbe C qui n'ont pas cette propriété. Tous sont des points où la tangente à C est verticale, c'est-à-dire, d'après le paragraphe §3.4 du Ch.7, des points où la dérivée partielle $\partial f/\partial y$ est nulle. Il s'agit d'un fait général.

THEOREME 4.1 *Soient* $F(x,y)$ *une fonction de deux variables et* $m_o(x_o,y_o)$ *un point tel que* $F(x_o,y_o) = 0$ *. On suppose que* F *a ses dérivées partielles* $\partial F/\partial x$ *et* $\partial F/\partial y$ *continues en* m_o *et que*

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(x_o,y_o) \neq 0$$

Alors l'équation $F(x,y) = 0$ *définit implicitement* $y(x)$ *au voisinage de* m_o *. C'est-à-dire, il existe* $r > 0$ *et une fonction* $y(x)$ *définie sur l'intervalle* $I =]x_o-r,x_o+r[$ *vérifiant*

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ m(x,y) \in B(m_o,r) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = y(x) \\ x \in I \end{cases}$$

De plus, la fonction $y(x)$ *est continue et dérivable sur* I *et*

$$y'(x) = -\frac{(\partial F/\partial x)(x,y(x))}{(\partial F/\partial y)(x,y(x))}$$

Remarques. 1) On sait depuis le paragraphe §2.4 du Ch.7 comment trouver la dérivée d'une fonction $y(x)$ solution d'une équation $F(x,y) = 0$. Le point essentiel du Th.4.1 n'est pas la dernière formule, mais l'existence d'une fonction $y(x)$ dérivable qui paramètre localement les points de la courbe $F(x,y) = 0$.

2) On peut échanger les rôles de x et de y: une courbe C d'équation $F(x,y) = 0$ définit implicitement $x(y)$ au voisinage de tout point $m_o(x_o,y_o)$ où la dérivée partielle $\partial f/\partial x$ est non nulle, i.e., où la tangente n'est pas horizontale.

3) Attention! En un point m_o où $(\partial f/\partial y)(m_o) = 0$, il peut arriver que l'équation $F(x,y) = 0$ définisse localement $y(x)$. Dans le Th.4.1, la condition $(\partial f/\partial y)(m_o) \neq 0$ est une condition suffisante mais pas nécessaire.

4) Le théorème des fonctions implicites est un résultat intuitif. Il n'en existe pourtant pas de démonstration simple. Nous l'admettrons.

Exemple 1 Vérifier le Th.4.1 dans le cas du cercle $x^2+y^2 = 1$.

Solution. La dérivée partielle $\partial(x^2+y^2-1)/\partial y = 2y$ est nulle en deux points du cercle: les points $m_1(1,0)$ et $m_2(-1,0)$. En tous les autres points du cercle, le cercle est localement le graphe d'une fonction.

Exemple 2 Déterminer les points de la courbe d'équation

$$y^2 = x^3+3x^2+2x$$

où le Th.4.1 s'applique.

4.2 Applications.

Le résultat suivant manquait pour que la preuve du Th.3.4 du Ch.7 soit complète.

PROPOSITION 4.2 *Soient* C *une courbe plane d'équation* $F(x,y) = 0$ *et* $m_0(x_0,y_0)$ *un point de* C *. On suppose les dérivées partielles de* $F(x,y)$ *continues en* m_0 *. Si* $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(m_0) \neq \vec{0}$ *, alors le point* m_0 *est un point d'accumulation de* C *.*

Preuve. Par hypothèse, au moins une des deux composantes du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(m_0)$ est non nulle. Quitte à échanger x et y, on peut supposer que $(\partial F/\partial y)(m_0) \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites s'applique donc: il existe $r > 0$ et une fonction $y(x)$ définie sur l'intervalle $I =]x_0-r,x_0+r[$ vérifiant

$$(*) \quad \begin{cases} F(x,y) = 0 \\ m(x,y) \in B(m_0,r) \end{cases} \iff \begin{cases} y = y(x) \\ x \in I \end{cases}$$

Montrer que le point m_0 est un point d'accumulation de C consiste à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, la boule $B(m_0,\varepsilon)$ coupe la courbe C en au moins un point autre que m_0. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' = \min(\varepsilon,r)$. La fonction $y(x)$ étant continue en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|x-x_0| < \alpha \Rightarrow |y(x)-y_0| < \varepsilon'/2$$

Posons $\alpha' = \min(\alpha,\varepsilon'/2)$. Considérons x quelconque tel que $0 < |x-x_0| < \alpha'$. Alors le point $m(x,y(x))$ est sur C et dans la boule $B(m_0,\varepsilon)$. En effet, on a $F(x,y(x)) = 0$ d'après (*) et $d(m_0,m) < \varepsilon$ d'après la suite d'inégalités:

$$\begin{aligned} d(m_0,m) &= \sqrt{|x-x_0|^2+|y(x)-y_0|^2} \\ &< \sqrt{\alpha'^2+(\varepsilon'/2)^2} \\ &< \sqrt{(\varepsilon'/2)^2+(\varepsilon'/2)^2} = \varepsilon'/\sqrt{2} < \varepsilon' < \varepsilon \end{aligned}$$

Note. On propose en exercice (Exercice 41) une seconde démonstration de la Prop.4.2 qui n'utilise pas le théorème des fonctions implicites.

Nous expliquons maintenant comment le théorème de Lagrange (Th.3.1) se déduit du Th.4.1.

Preuve du Th.3.1. Soit $m_0(x_0,y_0)$ un extremum relatif d'une fonction f(x,y) sous une contrainte g(x,y) = 0. On suppose que $\overrightarrow{\text{grad}}$ $g(m_0)$ est non nulle. Quitte à échanger x et y, on peut supposer que $(\partial g/\partial y)(m_0) \neq 0$. D'après le Th.4.1, il existe r > 0 tel que l'équation g(x,y) = 0 définit implicitement y(x) sur la boule $B(m_0,r)$. Il faut alors remarquer que dire que m_0 est un extremum relatif de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 0 revient à dire que x_0 est un extremum relatif de la fonction d'une variable f(x,y(x)). D'après la Th.1.2, sa dérivée doit être nulle en x_0. Cette dérivée vaut:

$$(**) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))y'(x)$$

En utilisant la formule donnant y'(x), on obtient que cette dérivée est nulle en x_0 ssi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(m_0)\frac{\partial g}{\partial y}(m_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(m_0)\frac{\partial g}{\partial x}(m_0) = 0$$

ce qui signifie exactement que les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}\, g(m_0)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(m_0)$ sont parallèles.

Remarque. Le théorème des fonctions implicites a permis de ramener un problème à deux variables liées en un problème en une variable: on a appliqué le Th.1.2 à la fonction d'une variable f(x,y(x)). On peut aussi lui appliquer les résultats du §1.3 qui donnent des conditions sous lesquelles un point stationnaire donne effectivement lieu à un extremum relatif. On obtient ainsi un critère pour qu'un point $m_0(x_0,y_0)$ vérifiant la condition de Lagrange (*) soit effectivement un extremum de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 0: il suffit que la dérivée seconde de la fonction f(x,y(x)), qu'on obtient en dérivant l'expression (**) ci-dessus, soit non nulle en x_0. (Revoir §3 Exemple 5 pour une illustration concrète).

4.3 Généralisation (n variables).

Le théorème des fonctions implicites se généralise au cas des fonctions de n variables.

THEOREME 4.3 *Soient* $F(x_1,\dots,x_n)$ *une fonction de n variables et* $m_0(a_1,\dots,a_n)$ *un point tel que* $F(a_1,\dots,a_n) = 0$ *. On suppose que* F *a ses dérivées partielles* $\partial F/\partial x_1,\dots,\partial F/\partial x_n$ *continues en* m_0 *et que*

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)(a_1,\dots,a_n) \neq 0$$

Alors l'équation $F(x_1,\dots,x_n) = 0$ *définit implicitement* x_1 *en fonction de* $x_2, \dots, x_n$ *au voisinage de* m_0*. De plus, la fonction* $x_1(x_2,\dots,x_n)$ *est continue et a des dérivées partielles continues (qui se calculent par la méthode de différentiation implicite* (Cf. Ch.7 §2.4)).

CHAPITRE 9

DEVELOPPEMENTS LIMITES

§1. DEFINITIONS

1.1 Motivation.

On sait que les fonctions sin(x) et x sont équivalentes au voisinage de 0, mais que peut-on dire a priori de l'ordre de grandeur de la différence sin(x)-x, combien valent les limites

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3} \ ?$$

La seule connaissance de l'équivalence $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ ne suffit pas pour répondre à ces questions. La différence entre deux fonctions équivalentes peut avoir n'importe quel ordre de grandeur. On verra par exemple que

$$\sin(x)-x \underset{0}{\sim} -x^3/6 \quad \text{mais} \quad \mathrm{Log}(1+x)-x \underset{0}{\sim} -x^2/2$$

Les développements limités sont des approximations plus précises que les équivalents; ils permettent de répondre au type de questions posées ci-dessus. L'équivalence $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ correspond au développement limité d'ordre 1 de la fonction sin au voisinage de 0, qu'on écrit:

$$\sin(x) = x + o(x)$$

Le développement limité d'ordre 3 est l'approximation plus précise suivante

$$\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^3),$$

qu'on peut écrire aussi, plus formellement,

$$(*) \qquad \sin(x) = 0.x^0 + 1.x^1 + 0.x^2 - \frac{1}{6}.x^3 + o(x^3),$$

et qu'il faut comprendre comme ceci: la fonction sin(x) et le polynôme $x-x^3/6$ de degré 3 sont égaux, à un terme négligeable devant x^3 au voisinage de 0 près. En particulier, on obtient

$$\sin(x)-x = -x^3/6 + o(x^3) \underset{0}{\sim} -x^3/6,$$

ce qui donne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3} = -1/6$$

Remarque (Analogie avec l'approximation des nombres réels). Soit α un nombre réel quelconque. Pour tout entier n positif, α possède un développement décimal (par défaut) à la précision "n chiffres après la virgule". Par exemple, $\pi = 3,14159...$ est le développement décimal à la précision "5 chiffres après la virgule" du nombre π. Ce développement décimal s'écrit plus formellement (comparer à (*))

$$\pi = 3.10^{0} + 1.10^{-1} + 4.10^{-2} + 5.10^{-4} + 9.10^{-5} + \varepsilon.10^{-5}$$
$$\text{où } 0 < \varepsilon < 1$$

Quand on s'arrête à la première décimale non nulle, on obtient l'ordre de grandeur ou "un équivalent" du nombre réel. Ainsi le nombre π est "équivalent" à 3, le nombre $\alpha = 2\sqrt{2}\text{-}e$ à 0,1. D'une certaine manière, les développements limités d'ordre n peuvent être considérés comme l'analogue pour les fonctions des développements décimaux à la précision "n chiffres après la virgule" pour les nombres réels.

1.2 Définitions.

DEFINITION 1.1 *Soit* f(x) *une fonction définie au voisinage de* 0. *On appelle développement limité d'ordre* n (DL_n en abrégé) *de* f *au voisinage de* 0 *l'écriture*

$$f(x) = a_0+a_1x+...+a_nx^n + o(x^n)$$

où $o(x^n)$ *désigne une fonction négligeable devant* x^n *au voisinage de* 0.

Note. Rappelons (Cf. Ch.4 §3.4) qu'une fonction f(x) est négligeable devant x^n si $f(x)/x^n$ tend vers 0. Le terme $o(x^n)$ peut donc être aussi noté

$x^n o(1)$ (i.e., x^n multiplié par une fonction tendant vers 0)

ou encore,

$x^n\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$.

Exemple 1 Le DL_3 de e^x est donné par

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Le DL_4 de sin(x) est donné par

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Noter que le coefficient de x^4 est nul; les parties polynômiales des DL_3 et DL_4 de la fonction sin sont les mêmes.

Exemple 2 Soit f une fonction continue en 0. Montrer que si f a un DL_1, alors f est dérivable en 0. Combien vaut f'(0)?

Une fonction donnée n'admet pas nécessairement de développement limité d'ordre n donné. Par exemple, si f n'est pas dérivable en 0, f n'a pas de DL_1 (Cf. Exemple 2). Par contre, on voit facilement que si f admet un DL_n, alors celui-ci est unique

(Cf. Exercice 30). Cela permet de montrer par exemple que les développements limités des fonctions paires (resp. impaires) ne comportent que des puissances paires (resp. impaires).

Exemple 3 Les DL_2, DL_3, DL_4 et DL_5 de cos(x) sont respectivement donnés par

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

Comme les limites et les équivalents, les développements limités au voisinage de 0 sont une notion locale: ils ne donnent des informations sur le comportement de la fonction qu'au voisinage de 0.

Troncature d'un DL

Exemple 4 Ecrire les développements limités d'ordre 0, 1, 2, 3 de e^x, sachant que celui d'ordre 4 est donné par

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

De façon générale, si n et p sont deux entiers tels que n > p, un DL_n est plus précis qu'un DL_p. On obtient un DL_p à partir d'un DL_n en "tronquant" ce dernier à l'ordre p, c'est-à-dire en négligeant dans le DL_n toutes les puissances d'exposant > p. En effet, ces termes sont négligeables devant x^p et peuvent donc être rentrés dans le terme $o(x^p)$.

§2. CALCUL DES DEVELOPPEMENTS LIMITES

2.1 Formule de Taylor-Young.

Soit f(x) une fonction définie au voisinage de 0. Si f est continue en 0, on a

$$f(x) = f(0) + o(1)$$

Si f est dérivable en 0, on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$$

Enfin, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (Cf. Ch.8 Th.1.7), si f est 2 fois dérivable en 0 (et si 0 est intérieur à D_f), on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)$$

Sous les bonnes hypothèses de dérivabilité (très souvent satisfaites dans la pratique), on obtient donc facilement, grâce à ces formules, les développements limités d'ordre 0, 1 et 2 d'une fonction f donnée.

La formule de Taylor-Young à l'ordre n généralise ces formules; elle fournit un développement limité d'ordre n de la fonction f.

THEOREME 2.1 (Formule de Taylor-Young) — *Soit* f(x) *une fonction* n *fois dérivable sur un voisinage de* x_0. *Alors, on a*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

Nous établirons cette formule comme conséquence d'un résultat ultérieur (Cf. Th.2.5).

Exemple 1 En utilisant la formule de Taylor-Young pour $x_0 = 0$, écrire le DL_4 de e^x et le DL_3 de Log(1+x).

2.2 Développements limités usuels.

La formule de Taylor-Young fournit les développements limités suivants au voisinage de 0.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \begin{cases} o(x^{2k+1}) \\ o(x^{2k+2}) \end{cases}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \begin{cases} o(x^{2k}) \\ o(x^{2k+1}) \end{cases}$$

$$tg(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$Log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

<u>En particulier</u>:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

Exemple 2 Déterminer un DL_3 de $1/\sqrt{1-x}$ et un DL_5 de sin(2x).

Solution. On écrit $1/\sqrt{1-x} = (1-x)^{-1/2}$ et on utilise le développement limité de $(1+x)^{\alpha}$ pour $\alpha = -1/2$ et n = 3.

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

Cette formule est une égalité vraie pour tout x; on peut y remplacer x par -x. On obtient

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

Pour sin(2x), on procède de façon analogue et on trouve

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)$$

Exemple 3 Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cos(x)-2+x^2}{x^4}$

Solution. On a $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$. On en déduit que

$2\cos(x) = 2 - x^2 + \dfrac{x^4}{12} + o(x^4)$ (Noter que $2o(x^4)$ reste un $o(x^4)$)

ce qui donne

$$2\cos(x)-2+x^2 = \frac{x^4}{12} + o(x^4) \underset{0}{\sim} \frac{x^4}{12}$$

[Le raisonnement qui donne cette dernière équivalence est le suivant:

$$\frac{x^4}{12} + o(x^4) = \frac{x^4}{12} + x^4 o(1) = \frac{x^4}{12}(1+12o(1)) = \frac{x^4}{12}(1+o(1))$$

On obtient donc bien que le quotient

$$\frac{x^4/12 + o(x^4)}{x^4/12}$$

tend vers 1 quand x tend vers 0.]

Conclusion: la limite cherchée est 1/12.

Note. Une des difficultés de ce type d'exercice peut être de choisir à quel ordre il faut faire le développement limité. On vérifiera que dans l'exemple précédent, l'ordre 4 était l'ordre minimum qui permettait de conclure.

Exemple 4 Trouver un équivalent en 0 de $\sqrt{1+x} - 1 - \dfrac{x}{2}$

2.3 Règles combinatoires.

Soient f(x) et g(x) deux fonctions admettant les DL_n suivants:

$$f(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n + o(x^n)$$
$$g(x) = b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n + o(x^n)$$

PROPOSITION 2.2 (Somme de DL) — *La fonction somme* f+g *admet le* DL_n *donné par*

$$(f+g)(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\ldots+(a_n+b_n)x^n + o(x^n)$$

Exemple 5 Déterminer le DL_3 de $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$.

Exemple 6 Avec les notations ci-dessus, écrire le DL_n des fonctions $f(x)+f(-x)$ et $f(x)-f(-x)$. Commenter. Application: Déterminer le DL_4 de $\mathrm{Log}((1+x)/(1-x))$.

PROPOSITION 2.3 (Produit de DL) — *La fonction produit* fg *admet un* DL_n *qu'on obtient en effectuant le produit des* DL_n *de* f *et de* g, *i.e., le produit* $(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n)$ *et en ne conservant que les termes de degré* $\leq n$. *C'est-à-dire,*

$$(fg)(x) = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\ldots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots a_nb_0)x^n + o(x^n)$$

Exemple 7 Déterminer les DL_3 et DL_4 de $(x^3+x^2-1)\sin(x)$.
Réponse. $(x^3+x^2-1)\sin(x) = -x + \frac{7}{6}x^3 + x^4 + o(x^4)$

Exemple 8 Déterminer le DL_5 de $\sin(x)\cos(x)$. Comparer avec l'exemple 2.

PROPOSITION 2.4 (Composition de DL) — *Si* $g(0) = 0$ (i.e., $b_0 = 0$), *la fonction composée* fog *admet un* DL_n *qu'on obtient, en développant l'expression*

$$a_0 + a_1(b_1x+\ldots+b_nx^n) + \ldots + a_n(b_1x+\ldots+b_nx^n)^n,$$

en regroupant les termes de même degré et en ne conservant que les termes de degré $\leq n$.

Dans la pratique, on dispose les calculs comme suit.

$$f(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \ldots + a_nu^n + o(u^n)$$

$$g(x) = b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n + o(x^n)$$

Le terme constant b_0 est nul; on peut donc faire $u = g(x)$ dans le DL_n de f.

$$\begin{cases} u = b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n + o(x^n) & (1) \\ u^2 = \ldots & (2) \\ u^3 = \ldots & (3) \\ \quad\vdots & \\ u^n = \ldots & (n) \end{cases}$$

$$(f\circ g)(x) = a_0 + a_1(1) + a_2(2) + \ldots + a_n(n) \quad + o(x^n)$$
$$= \ldots$$

Dans ces calculs, on ne conserve que les termes de degré $\leq n$. D'autre part, on calcule $(g(x))^3$ en effectuant le produit $(g(x))^2 g(x)$ (et non pas en développant le cube de $g(x)$), $(g(x))^4$ en effectuant le produit $(g(x))^3 g(x)$, etc...

Exemple 9 Déterminer le DL_3 de $\sqrt[3]{x^2+x+1}$.

Solution. On écrit

$$\sqrt[3]{x^2+x+1} = (1+(x+x^2))^{1/3}$$

On peut appliquer la Prop.2.4 à $f(u) = (1+u)^{1/3}$ et $g(x) = x+x^2$.

$$(1+u)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + \frac{5}{81}u^3 + o(u^3)$$

Le terme constant dans $g(x) = x+x^2$ est nul. On pose $u = x+x^2$.

$$\begin{cases} u = x+x^2 \\ u^2 = x^2+2x^3 + o(x^3) \\ u^3 = x^3 + o(x^3) \end{cases}$$

On obtient donc

$$\sqrt[3]{x^2+x+1} = 1 + \frac{1}{3}(x+x^2) - \frac{1}{9}(x^2+2x^3) + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3)$$
$$= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{13}{81}x^3 + o(x^3)$$

Exemple 10 Déterminer le DL_7 de e^{-x^2}.

On calcule un développement limité d'un quotient f/g en considérant ce quotient comme un produit: $f/g = f \times (1/g)$.

Exemple 11 Retrouver le DL_3 de $tg(x)$.

Signalons les erreurs suivantes qui sont fréquentes.

- combiner des développements limités qui ne sont pas du même ordre.
- appliquer la règle de composition avec $g(0) \neq 0$
- utiliser le DL_n de $(1+x)^\alpha$ avec α non constant.

Exemple 12 Déterminer le DL_3 de $f(x) = \exp(1+x+x^2)$.

Solution. On écrit

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3)$$

mais on ne peut pas l'appliquer à $u = 1+x+x^2$ dont le terme constant n'est pas nul. On procède comme ceci:

$$f(x) = \exp(1)\ \exp(x+x^2)$$
$$= e(1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3))$$

où $u = x+x^2$ (cette fois, le terme constant dans u est nul). On a

$$\begin{cases} u = x+x^2 \\ u^2 = x^2+2x^3+o(x^3) \\ u^3 = x^3+o(x^3) \end{cases}$$

D'où finalement

$$\begin{aligned} f(x) &= e(1 + (x+x^2) + \frac{1}{2}(x^2+2x^3) + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &= e + ex + \frac{3e}{2}x^2 + \frac{7e}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Exemple 13 Déterminer le DL_4 de $f(x) = (1+x)^x$.

Solution. On n'utilise pas le développement de $(1+x)^\alpha$. On écrit plutôt

$$f(x) = \exp(x\text{Log}(1+x))$$

puis

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + o(u^4)$$

avec

$$\begin{aligned} u = x\text{Log}(1+x) &= x(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)) \\ &= x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

On calcule u, u^2, u^3 et u^4.

$$\begin{cases} u = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \\ u^2 = x^4 + o(x^4) \\ u^3 = o(x^4) \\ u^4 = o(x^4) \end{cases}$$

Cela donne

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4) + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Les Prop.2.2, 2.3 et 2.4 sont des conséquences des propriétés des o(...) (Cf. Ch.4 §3.4). Nous laissons leur démonstration en exercice.

Intégration de DL Terminons ce paragraphe par la règle suivante, dite d'intégration des développements limités.

THEOREME 2.5 *Soit* f(x) *une fonction dérivable au voisinage de* 0. *Si la dérivée* f'(x) *admet le* DL_n

$$f'(x) = a_0+a_1x+...+a_nx^n + o(x^n),$$

alors la fonction f *admet un* DL_{n+1}, *donné par*

$$f(x) = f(0) + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + ... + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

On peut donc intégrer terme à terme un développement limité; on n'oubliera pas la constante d'intégration f(0). Par contre, en toute généralité, on ne peut pas dériver un développement limité (Cf. Exercices 18 et 19).

Exemple 14 Retrouver en utilisant la Th.2.5, le DL_n de $Log(1+x)$.

Exemple 15 Déterminer le DL_n de $Arctg(x)$.

Solution. En intégrant

$$(Arctg(x))' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^p x^{2p} + o(x^{2p+1})$$

on obtient

$$Arctg(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + ... + \frac{(-1)^p}{2p+1}x^{2p+1} + o(x^{2p+2})$$

(La constante d'intégration vaut ici $Arctg(0) = 0$).

La formule de Taylor-Young (Th.2.1) est une conséquence facile du Th.2.5. La démonstration du Th.2.5 s'appuie, elle, sur le théorème des accroissements finis (Ch.8 Th.1.3). Nous la proposons en exercice à la fin de ce chapitre (Cf. Exercice 17).

Preuve du Th.2.1 à partir du Th.2.5. Soit f une fonction admettant une dérivée n-ième en 0. On sait que si une fonction φ est dérivable en 0, elle admet un DL_1, donné par

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + o(x)$$

Appliquons cela à $f^{(n-1)}$. On obtient

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(0) + f^{(n)}(0)x + o(x)$$

En "intégrant" une fois, on obtient

$$f^{(n-2)}(x) = f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)x + f^{(n)}(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

En intégrant n-1 fois, on obtient

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + ... + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Il peut être avantageux de tirer parti d'une équation satisfaite par une fonction f pour déterminer les coefficients de son développement limité.

Exemple 16 Soit $f(x) = tg(x)$.
(a) Montrer que sur son domaine de définition, la fonction f vérifie l'équation

$$f' = 1+f^2.$$

En utilisant cette équation, calculer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f'''(0)$ et retrouver le DL_3 de $tg(x)$.

2.3 Développements limités au voisinage de x_o.

DEFINITION 2.6 (a) *Soit* $f(x)$ *une fonction définie au voisinage d'un nombre réel* x_o. *On appelle développement limité d'ordre* n *de* f *au voisinage de* x_o *l'écriture*

$$f(x) = a_o + a_1(x-x_o) + ... + a_n(x-x_o)^n + o((x-x_o)^n)$$

où $o((x-x_0)^n)$ *désigne une fonction négligeable devant* $(x-x_0)^n$ *au voisinage de* x_0.

(b) *Soit* $f(x)$ *une fonction définie au voisinage* de $+\infty$ *(ou* $-\infty$*). On appelle développement limité d'ordre* n *de* f *au voisinage de* ∞ *l'écriture*

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_n}{x^n} + o(\frac{1}{x^n})$$

où $o(1/x^n)$ *désigne une fonction négligeable devant* $1/x^n$ *au voisinage de* $+\infty$ (ou $-\infty$).

Pour $x_0 = 0$, on retrouve la définition de développement limité au voisinage de 0 que nous avons étudiée jusque là. Dans la pratique, on se ramène toujours à ce cas-là en posant $t = x-x_0$ au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et $t = 1/x$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

Exemple 17 Pour chacune des fonctions données ci-dessous, déterminer un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0.

(a) $f(x) = \exp(x^2-1)$; $x_0 = 1$, $n = 2$.

(b) $f(x) = (x+7)/(2x-3)$; $x_0 = -1$, $n = 2$

(c) $f(x) = 1/tg(x) - \cos(x)$; $x_0 = \pi/2$, $n = 3$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x - 1/(2x)$; $x_0 = +\infty$, $n = 3$

Solution. (a) On pose $t = x-1$ soit $x = t+1$. On obtient

$$f(x) = \exp(x^2-1) = \exp((t+1)^2-1) = \exp(t^2+2t)$$

On détermine un DL_2 de $\exp(t^2+2t)$ au voisinage de 0:

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

Pour $u = t^2+2t$, on obtient

$$\exp(t^2+2t) = 1 + (t^2+2t) + \frac{1}{2}(4t^2) + o(t^2) = 1+2t+3t^2 + o(t^2)$$

Il reste à remplacer t par (x-1) pour obtenir le développement limité souhaité.

$$f(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

(b) On trouve $f(x) = -\frac{6}{5} - \frac{17}{25}(x+1) - \frac{34}{125}(x+1)^2 + o((x+1)^2)$

(c) On trouve $f(x) = -\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^3 + o((x-\frac{\pi}{2})^3)$

(d) On pose $t = 1/x$ soit $x = 1/t$. On obtient

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{t^2}+1} - \frac{1}{t} - \frac{t}{2} = \frac{1}{t}(\sqrt{1+t^2} - 1 - \frac{1}{2}t^2)$$

On détermine un DL_4 du terme entre parenthèses au voisinage de 0:

$$\sqrt{1+t^2} - 1 - \frac{1}{2}t^2 = (1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4 + o(t^4)) - 1 - \frac{1}{2}t^2$$
$$= -\frac{1}{8}t^4 + o(t^4)$$

On obtient le DL_3 de f(x) en divisant par t et en remplaçant t par 1/x.

$$f(x) = -\frac{1}{8x^3} + o(\frac{1}{x^3}).$$

Notes 1) La division par t fait chuter d'une unité l'ordre d'un développement limité. Il faut donc, au début d'un calcul de développement limité, prévoir de telles divisions et ajuster l'ordre du calcul en conséquence.

2) On peut également utiliser la formule de Taylor-Young pour déterminer un développement limité au voisinage d'un nombre réel x_o. Mais cette méthode s'avère dans la plupart des cas beaucoup moins économique que celle que nous avons indiquée.

§3 APPLICATIONS

3.1 Calculs d'équivalents et de limites.

Le résultat suivant généralise un argument déjà utilisé (voir en particulier §2 Exemple 3 [...]). Dans son énoncé, x_o désigne un nombre réel quelconque, $+\infty$ ou $-\infty$.

PROPOSITION 3.1 *Si une fonction* f *a un* DL_n *au voisinage de* x_o, *alors* f(x) *est équivalent au voisinage de* x_o *au premier terme non nul de ce développement limité. C'est-à-dire, si*

$$f(x) = a_p(x-x_o)^p+...+a_n(x-x_o)^n + o((x-x_o)^n) \ \textit{avec} \ a_p \neq 0,$$

alors

$$f(x) \underset{x_o}{\sim} a_p(x-x_o)^p$$

(avec la convention que, pour $x_o = \infty$ ou $-\infty$, $x-x_o$ désigne la quantité $1/x$).

Exemple 1 Déterminer un équivalent de f(x) au voisinage du point x_o indiqué.

(a) $f(x) = \cos(x^2) - (\cos(x))^2 \quad ; x_o = 0$

(b) $f(x) = \exp(x^2-1) + 1 - 2x \quad ; x_o = 1$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x - \frac{1}{2x} \quad ; x_o = +\infty$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x} \quad ; x_o = +\infty$

Solution. (a) On fait un DL_2 de f(x). On a

$$\begin{cases} \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ (\cos(x))^2 = 1 - x^2 + o(x^2) \\ \cos(x^2) = 1 + o(x^2) \end{cases},$$

ce qui donne

$$f(x) = x^2 + o(x^2) \text{ et donc } f(x) \underset{0}{\sim} x^2$$

(b) On sait (Cf. §2 Exemple 17) que

$$\exp(x^2-1) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(x^2-1)+1-2x \\ &= [1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2] + [1-2((x-1)+1)] + o((x-1)^2) \\ &= 3(x-1)^2 + o((x-1)^2) \end{aligned}$$

et donc que

$$f(x) \underset{1}{\sim} 3(x-1)^2$$

(d) Cherchons un développement limité d'ordre 1 de f(x) au voisinage de $+\infty$. On pose $t = 1/x$ soit $x = 1/t$. On obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t}} - \sqrt[3]{\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t}} \\ &= \frac{1}{t}\Big[(1+t^2)^{1/3} - (1-t^2)^{1/3}\Big] \\ &= \frac{1}{t}\Big[(1 + \frac{1}{3}t^2 + o(t^2)) - (1 - \frac{1}{3}t^2 + o(t^2))\Big] \\ &= \frac{2}{3}t + o(t) \\ &= \frac{2}{3x} + o(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

D'où finalement

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3x}$$

Exemple 2 Déterminer la limite de f au point indiqué.

(a) $f(x) = \dfrac{\cos(x^2) - (\cos(x))^2}{x^2}$; $x_0 = 0$

(b) $f(x) = \dfrac{\exp(x^2-1)+1-2x}{(x-1)^2}$; $x_0 = 1$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{tg(x)} - \cos(x)$; $x_0 = \pi/2$

(d) $f(x) = (1+tg(x))^{1/\sin(x)}$; $x_0 = 0$

(e) $f(x) = (\dfrac{\sin(x)}{x})^{3/x^2}$; $x_0 = 0$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{e^x - e^{\sin(x)}}{x-\sin(x)}}$; $x_0 = 0$

(g) $f(x) = Log(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2})$; $x_0 = 0$

(h) $f(x) = (3.2^{1/x}-2.3^{1/x})^x$; $x_0 = +\infty$

Solution (a) On sait (Exemple 1 (a) ci-dessus) que $f(x) \underset{0}{\sim} x^2$. La limite cherchée vaut donc 1

(d) On a $f(x) = \exp(\dfrac{Log(1+tg(x))}{\sin(x)})$. Mais on a

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x \text{ et } Log(1+tg(x)) \underset{0}{\sim} tg(x) \underset{0}{\sim} x$$

ce qui donne

$$\frac{Log(1+tg(x))}{\sin(x)} \underset{0}{\sim} 1$$

La limite cherchée est donc e. Nous n'avons pas eu besoin de développements limités.

(e) On a $f(x) = \exp(\frac{3}{x^2} \operatorname{Log}(\frac{\sin(x)}{x}))$. On part d'un DL_3 de sin(x):

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

On en déduit

$$\sin(x)/x = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

et donc que

$$\operatorname{Log}(\sin(x)/x) = \operatorname{Log}(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{6}x^2.$$

On obtient finalement

$$\frac{3}{x^2} \operatorname{Log}(\frac{\sin(x)}{x}) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}$$

La limite cherchée vaut $1/\sqrt{e}$.

(h) On écrit

$$\operatorname{Log}(f(x)) = x \operatorname{Log}\left[3e^{\operatorname{Log}(2)/x} - 2e^{\operatorname{Log}(3)/x}\right]$$

et on fait un DL_1 en $+\infty$ du terme entre crochets:

$$3e^{\operatorname{Log}(2)/x} - 2e^{\operatorname{Log}(3)/x} = 1 + \frac{\operatorname{Log}(8/9)}{x} + o(\frac{1}{x})$$

On obtient $\operatorname{Log}(f(x)) \underset{+\infty}{\sim} \operatorname{Log}(8/9)$. La limite cherchée vaut 8/9.

Les développements limités au voisinage de $+\infty$ sont souvent d'une grande utilité pour l'étude des suites réelles.

Exemple 3 Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n>0}$ et donner un équivalent simple de u_n. La série de terme u_n converge t-elle?

(a) $u_n = (4\sqrt[n]{3} - 3\sqrt[n]{4})^n$

(b) $u_n = \sin(n/(n^2+1)) - 1/n$

(c) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2-3n} - \sqrt[3]{n^3-n^2}}{n}$

Solution. (a) En faisant comme dans l'exemple 2(h) ci-dessus, on montre que la suite $(u_n)_{n>0}$ converge vers $3^4/4^3$. La suite $(u_n)_{n>0}$ ne tend pas vers 0, donc la série de terme u_n diverge.

(b) On fait un développement limité en $+\infty$ de $\sin(n/n^2+1)$. En posant $t = 1/n$, on obtient:

$$\begin{aligned}\sin(n/(n^2+1)) &= \sin(t/(1+t^2)) \\ &= \sin(t(1-t^2+o(t^2)) \\ &= \sin(t-t^3+o(t^3)) \\ &= (t-t^3) - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \\ &= t - \frac{7}{6}t^3 + o(t^3) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{7}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

On déduit que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{7}{6n^3}$$

La suite $(u_n)_{n>0}$ tend vers 0. La série de référence de Riemann de terme $1/n^3$ converge. Donc la série de terme u_n est convergente.

(c) $$(n^2-3n)^{1/2} - (n^3-n^2)^{1/3} = n[(1-\frac{3}{n})^{1/2}-(1-\frac{1}{n})^{1/3}]$$
$$= n(-\frac{3}{2n}+\frac{1}{3n}+o(\frac{1}{n}))$$
$$\underset{+\infty}{\sim} -\frac{7}{6}$$

La suite $(u_n)_{n>0}$, équivalente à $-7/6n$, tend vers 0. La série de Riemann en $1/n$ diverge. Donc la série de terme u_n est divergente.

Remarque. On n'oubliera pas qu'on ne recourt aux développements limités que quand les équivalents ne sont pas suffisamment précis. En effet, les développements limités, s'ils sont plus précis, sont d'un emploi beaucoup plus lourd. Il s'agit donc dans un premier temps d'estimer jusqu'où on aura besoin des développements limités et où l'emploi des équivalents ou même des résultats élémentaires sur les limites sera suffisant. Par exemple, pour trouver la limite d'un rapport f/g pour lequel il y a forme indéterminée, en général, on ne calcule pas un développement limité de f/g, mais un développement limité de f et de g, qui donnent un équivalent de f et de g et donc un équivalent de f/g. C'est aussi dans la première partie du travail qu'on choisit l'ordre de calcul des développements limités. Il n'y a pas de méthode générale; on essaie seulement d'anticiper au mieux les calculs que l'on va faire par la suite.

3.2 Asymptotes obliques.

Rappelons que la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote du graphe G_f d'une fonction $f(x)$ en $+\infty$ si on a

$$(*) \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b) = 0$$

Nous avons vu au Ch.4 (§4.2) comment déterminer a et b quand ils existent. Nous voulons ici indiquer une seconde méthode.

La condition (*) s'écrit aussi

$$f(x) = ax+b+o(1)$$

ou encore

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + o(\frac{1}{x})$$

Les nombres a et b sont donc les coefficients du développement limité d'ordre 1 de $f(x)/x$ au voisinage de $+\infty$. Et nous allons voir que si on pousse jusqu'à l'ordre 2 le développement limité, on obtient de surcroît la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Exemple 4 Etudier les branches infinies de $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.

Solution. On fait un développement limité d'ordre 2 de

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+1}{x^2-x}$$

au voisinage de $+\infty$. On pose $t = 1/x$ soit $x = 1/t$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1/t^2 + 1}{1/t^2 - 1/t} = \frac{1+t^2}{1-t}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= (1+t^2)(\frac{1}{1-t}) \\ &= (1+t^2)(1+t+t^2+o(t^2)) \\ &= 1+t+2t^2 + o(t^2) \\ &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})\end{aligned}$$

ce qui donne

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x})$$

On en déduit que la droite $y = x+1$ est asymptote de G_f au voisinage de $+\infty$. Le signe de $f(x)-(x+1)$ au voisinage de $+\infty$ nous donne la position de la courbe par rapport à son asymptote. D'après la dernière égalité, on a

$$f(x)-(x+1) = \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x}) = \frac{2}{x}(1+o(1))$$

Pour x assez grand, $1+o(1) > 0$; en particulier, pour x assez grand, $f(x)-(x+1)$ est du signe de $2/x$.

Conclusion: la courbe se situe au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Les mêmes calculs montrent que $y = x+1$ est également asymptote de G_f au voisinage de $-\infty$. Mais en $-\infty$, la courbe se situe en dessous de son asymptote; en effet, $f(x)-(x+1) = 2/x + o(1/x)$ est négatif au voisinage de $-\infty$.

Une étude complète des branches infinies de f ne doit pas oublier l'asymptote verticale $x = 1$ au voisinage de 1^+ et de 1^-.

Méthode pratique De façon générale, la procédure à suivre est la suivante.

- On détermine un développement limité d'ordre 2 de $f(x)/x$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$):

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$

- On réécrit cette formule sous la forme

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{x} + o(\frac{1}{x})$$

- On conclut que la droite $y = ax+b$ est asymptote du graphe G_f et que

en $+\infty$	G_f est au dessus de $y = ax+b$	si $c > 0$
	G_f est au dessous de $y = ax+b$	si $c < 0$
en $-\infty$	G_f est au dessous de $y = ax+b$	si $c > 0$
	G_f est au dessus de $y = ax+b$	si $c < 0$

Si $c = 0$, on ne peut pas conclure, il faut pousser le développement limité de $f(x)/x$ à un ordre supérieur.

Exemple 5 Utiliser la méthode ci-dessus pour déterminer les asymptotes obliques des fonctions suivantes. Comparer avec l'exemple 12 du §4 du Ch.4.

(a) $f(x) = x+\sqrt{x^2-x+2}$ (b) $f(x) = xe^{1/x}$

Exemple 6 Déterminer les asymptotes obliques des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2+1}$ (c) $f(x) = \sqrt{2x^2+x}$

(b) $f(x) = (2x+1+\frac{1}{x})\, e^{1/x}$ (d) $f(x) = \sqrt[4]{x^4+x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x}$

Solution. (b) On a, en posant $t = 1/x$

$$\begin{aligned} f(x)/x &= (2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})\, e^{1/x} \\ &= (2 + t + t^2)\, e^t \\ &= (2 + t + t^2)(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)) \\ &= 2 + 3t + 3t^2 + o(t^2) \\ &= 2 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}) \end{aligned}$$

On obtient donc

$$f(x) = 2x + 3 + 3/x + o(1/x)$$

On conclut que $y = 2x+3$ est asymptote du graphe G_f en $+\infty$ et en $-\infty$ et que le graphe G_f se situe au dessus de son asymptote en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$.

(c) Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{2x^2+x}}{x} = \frac{\sqrt{2x^2+x}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{2 + \frac{1}{x}}$$

D'où, en posant $t = 1/x$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \sqrt{2+t} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{t}{2}} \\ &= \sqrt{2}\,(1 + \frac{1}{2}(\frac{t}{2}) - \frac{1}{8}(\frac{t}{2})^2 + o(t^2)) \\ &= \sqrt{2}\,(1 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{32}t^2 + o(t^2)) \\ &= \sqrt{2}\,(1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{32x^2} + o(\frac{1}{x^2})) \end{aligned}$$

et donc

$$f(x) = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{32x} + o(\frac{1}{x})$$

La droite $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}/4$ est asymptote; le graphe G_f se situe en dessous de son asymptote.

Il faut faire attention dans cet exemple: les calculs diffèrent suivant que l'on est en $+\infty$ ou en $-\infty$. En effet, au voisinage de $-\infty$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{2x^2+x}}{x} = \frac{\sqrt{2x^2+x}}{-\sqrt{x^2}} = -\sqrt{2+\frac{1}{x}}$$

On obtient donc

$$f(x) = -\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{32x} + o(\frac{1}{x})$$

La droite $y = -\sqrt{2}x - \sqrt{2}/4$ est asymptote; le graphe G_f se situe en dessous de son asymptote.

Exemple 7 Faire une étude complète de la fonction $f(x) = 2x+\sqrt{x^2-9}$.

Solution. La fonction f est définie sur $D_f =]-\infty,-3] \cup [3,+\infty[$. Elle est continue sur son domaine. Elle est dérivable sur $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$. Sur cet intervalle, la dérivée f'(x) vaut

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2-9} + x}{\sqrt{x^2-9}}$$

En 3, le taux d'accroissement vaut

$$\Delta f/\Delta x = 2 + \frac{\sqrt{6\Delta x+(\Delta x)^2}}{\Delta x} \underset{0^+}{\sim} \sqrt{\frac{6}{\Delta x}}$$

Ce taux tend vers $+\infty$ quand Δx tend vers 0^+. La fonction n'est donc pas dérivable en 3. Un calcul similaire fournit la même conclusion pour le point -3.

Le signe de la dérivée est celui de l'expression $2\sqrt{x^2-9} + x$. Il faut distinguer deux cas.

1er cas: $x < -3$ (i.e., partie négative du domaine)

On a

$$2\sqrt{x^2-9} + x < 0$$

ssi $2\sqrt{x^2-9} < -x = |x|$

ssi $4(x^2-9) < x^2$

ssi $x^2 < 12$ ssi $-2\sqrt{3} < x < -3$

2ème cas: $x > 3$ (i.e., partie positive du domaine)

On a

$$2\sqrt{x^2-9} + x < 0 \qquad \text{(somme de deux termes positifs)}$$

On en déduit le tableau de variations

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-3		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	‖	//////////	‖	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$-3\sqrt{3}$	↘	-6	//////////	6	↗	$+\infty$

Il y deux branches infinies, en $+\infty$ et en $-\infty$. On a

$$\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} = 2 + \left(1 - \dfrac{9}{x^2}\right)^{1/2} & \text{en } +\infty \\ \dfrac{f(x)}{x} = 2 - \left(1 - \dfrac{9}{x^2}\right)^{1/2} & \text{en } -\infty \end{cases}$$

Un calcul rapide fournit le développement limité

$$(1 - \frac{9}{x^2})^{1/2} = 1 - \frac{9}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$

ce qui donne

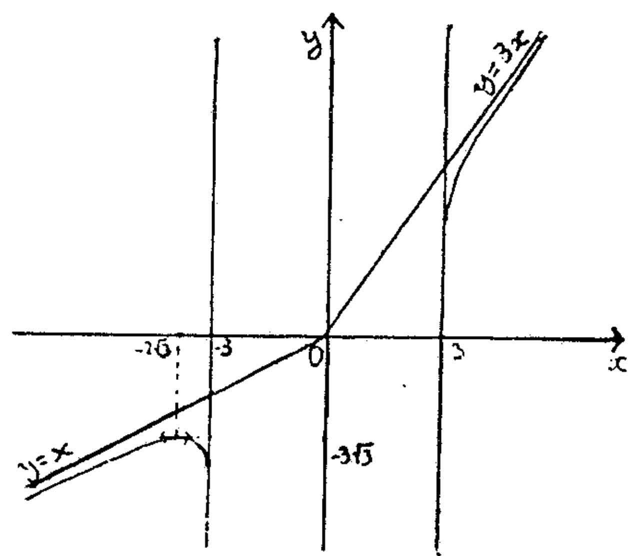
$$\begin{cases} f(x) = 3x - \dfrac{9}{2x} + o(\dfrac{1}{x}) & \text{en } +\infty \\ f(x) = x + \dfrac{9}{2x} + o(\dfrac{1}{x}) & \text{en } -\infty \end{cases}$$

On conclut que:

• la droite $y = 3x$ est asymptote en $+\infty$; le graphe est au dessous de l'asymptote.

• la droite $y = x$ est asymptote en $+\infty$; le graphe est au dessous de l'asymptote.

On peut tracer le graphe de f.



La convexité est donnée par le signe de f"(x).

$$f''(x) = \frac{-9}{(x^2-9)^{3/2}}$$

La fonction f est concave sur chacun des deux intervalles $[-\infty,-3]$ et $[3,+\infty[$.

La fonction f n'est pas injective. Son ensemble image est

$$f(D_f) =]-\infty;-3\sqrt{3}] \cup [6,+\infty[$$

Plus précisément, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x a

$$\begin{cases} 2 \text{ solutions} & \text{si } y < -3\sqrt{3} \\ 1 \text{ solution} & \text{si } y = -3\sqrt{3} \\ 0 \text{ solution} & \text{si } -3\sqrt{3} < y < 6 \\ 1 \text{ solution} & \text{si } y \geq 6 \end{cases}$$

§4 FORMULE DE TAYLOR-LAGRANGE

On connaît la formule de Taylor-Young qui permet d'approcher une fonction f par une fonction polynomiale au voisinage d'un point base x_0. C'est un résultat "local": il ne donne d'informations que pour x tendant vers x_0. Au contraire, la formule de Taylor-Lagrange est un résultat "global"; on l'utilise quand on veut des estimations des valeurs d'une fonction f entre deux points a et b pas forcément voisins.

THEOREME 4.1 (Formule de Taylor-Lagrange) — *Soit* $f(x)$ *une fonction* $n+1$ *fois dérivable et de dérivée* $n+1$ *-ième* $f^{(n+1)}$ *continue sur un intervalle* $[a,b]$. *Alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Pour $n = 0$, on retrouve le théorème des accroissements finis (Cf. Ch.8 Th.1.3) (alors que le cas $n = 0$ de la formule de Taylor-Young correspond à la définition de la dérivée). Une démonstration du Th.4.1 est proposée en exercice (Exercice 28).

Exemple 1 Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$1-x+x^2-x^3 < \frac{1}{1+x} < 1-x+x^2-x^3+x^4$$

Solution. On écrit la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n = 3$ entre 0 et x pour $f(x) = 1/(1+x)$. Les dérivées k-ièmes de f valent

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k\, k!}{(1+x)^{k+1}}$$

On obtient donc

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3 + \frac{x^4}{(1+c)^4} \qquad \text{où } c \in]0,x[.$$

On déduit le résultat demandé de l'inégalité

$$0 < \frac{x^4}{(1+c)^4} < x^4.$$

Exemple 2 Montrer que la série de terme général $1/n!$ $(n \geq 0)$ est convergente, de somme égale au nombre réel e.

Solution. On écrit la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et 1 pour $f(x) = e^x$. Les dérivées k-ièmes de f valent

$$f^{(k)}(x) = e^x$$

On obtient donc

$$e = 1+\frac{1}{2!}+ ... +\frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} \qquad \text{où } c \in]0,1[$$

De l'inégalité

$$0 \leq \frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

on déduit que le terme d'erreur $e^c/(n+1)!$ tend vers 0, i.e., que e est la limite de la suite U_n de terme général

$$U_n = 1+\frac{1}{2!}+ ... +\frac{1}{n!}$$

ce qui par définition, signifie que la série de terme $1/n!$ est convergente, de somme égale à e.

L'identité de la différentielle donne des approximations des valeurs $f(x_0+\Delta x)$ d'une fonction f en des points $x_0+\Delta x$ voisins d'un point base x_0 (Cf. Ch.7 §2.1 et §2.2). La formule de Taylor-Lagrange permet d'obtenir une majoration de l'erreur commise.

Exemple 3 Donner une approximation du nombre réel $\delta = \sqrt{4,0008}$ et donner une majoration de l'erreur commise.

Solution. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre deux nombres a, b tels que $b > a > 0$, s'écrit pour $f(x) = \sqrt{x}$:

$$\sqrt{b} = \sqrt{a} + \frac{(b-a)}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{4c^{3/2}}\frac{(b-a)^2}{2!} \qquad \text{où } c \in]a,b[.$$

Pour $a = 4$ et $b = 4,0008$, on obtient

$$\delta = 2 + 0,0002 - \frac{64.10^{-8}}{8c^{3/2}}$$

Le terme principal de l'approximation est 2,0002. L'erreur peut être encadrée de la façon suivante:

$$10^{-8} < -\frac{64.10^{-8}}{8c^{3/2}} < 0$$

On obtient finalement

$$2,00019999 < \delta < 2,0002.$$