MATHEMATIQUES
ANALYSE

Pierre Dèbes

TOME 1

TABLE DES MATIERES

TOME I

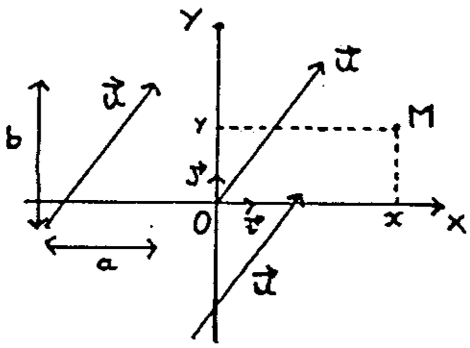
TOME II

CHAPITRE 1

COURBES ET SURFACES

§1. COURBES PLANES.

1.1 Vecteurs du plan.



Le plan, noté $\mathbf{R}^2$, est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$; $\vec{i}$ dirige l'axe Ox des abscisses, $\vec{j}$ l'axe Oy des ordonnées. Dans ce repère, tout point M du plan est repéré par un couple (x,y) de nombres réels: x est son abscisse, y son ordonnée. On note M(x,y) le point repéré.

Un vecteur $\vec{u}$ est la donnée d'un couple (a,b) de nombres réels. On le note $\vec{u} = (a,b)$ ou $\vec{u} = a\vec{i}+b\vec{j}$; a et b s'appellent les composantes de $\vec{u}$. Géométriquement, le vecteur $\vec{u}$ peut être représenté par une flèche de a unités de longueur le long de Ox et de b unités de longueur le long de Oy (l'orientation des axes étant donnée par le sens de $\vec{i}$ et $\vec{j}$). Cette flèche est d'origine quelconque; un vecteur a donc une infinité de représentants géométriques.

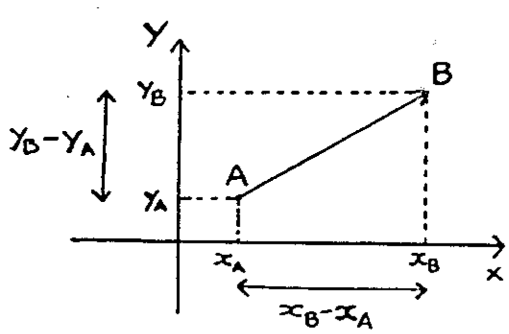
Exemple 1 (a) Les vecteurs de base $\vec{i} = (1,0)$ et $\vec{j} = (0,1)$
(b) Le vecteur nul $\vec{0} = (0,0)$

Milieu de deux points

Le milieu de deux points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ est le point

$$I\left(\frac{1}{2}(x_A+x_B),\frac{1}{2}(y_A+y_B)\right)$$

Vecteur bipoint

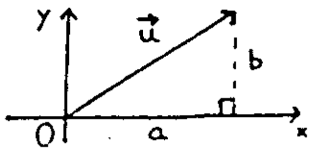


Etant donnés deux points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$, le vecteur bipoint $\vec{AB}$ est le vecteur qui permet d'aller de A jusqu'à B, i.e.,

$$\vec{AB} = (x_B-x_A, y_B-y_A).$$

Remarquer que, si M est le point de coordonnées (x,y), on a $\vec{OM} = (x,y)$. On notera aussi que deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ peuvent être égaux sans que les points A et B soient égaux aux points C et D: en fait, $\vec{AB} = \vec{CD}$ ssi le quadrilatère (ABDC) est un **parallélogramme** (Cf. Exercice 2).

Longueur d'un vecteur



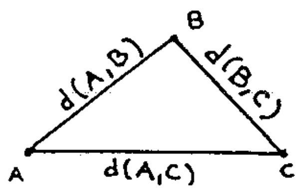
La longueur d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$. Elle est donnée par le théorème de Pythagore:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Distance

Etant donnés deux points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$, la distance entre A et B est notée d(A,B). C'est la longueur du vecteur $\vec{AB}$, d'où la formule

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$



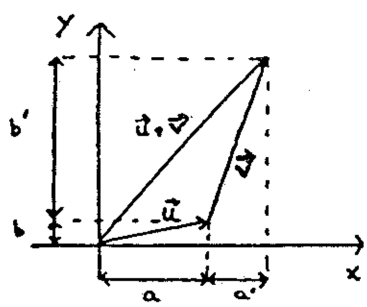
On vérifie que

$$\begin{cases} d(A,B) = d(B,A) & \text{(Symétrie)} \\ d(A,B) = 0 \text{ ssi } A = B & \text{(Séparation)} \\ d(A,C) \le d(A,B)+d(B,C) & \text{(Inégalité du triangle)} \end{cases}$$

Somme de deux vecteurs

Soient $\vec{u} = (a,b)$ et $\vec{v} = (a',b')$; le vecteur somme $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur de composantes $(a+a',b+b')$. Géométriquement, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'ajoutent selon la

LOI DU TRIANGLE

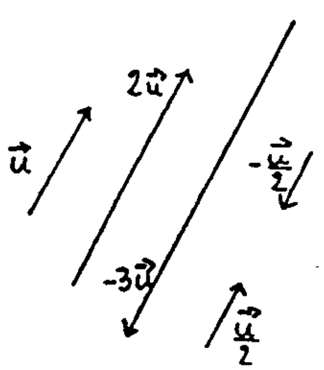


Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est porté par le troisième côté du triangle de côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mis bout à bout.

On obtient comme conséquence la "relation de Chasles":

$$\vec{AB}+\vec{BC} = \vec{AC}.$$

Vecteurs parallèles



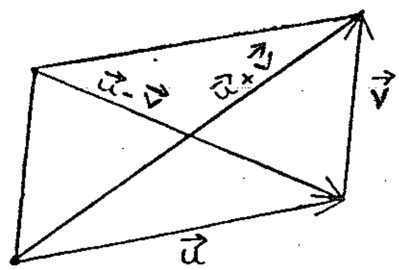
Soient $\vec{u} = (a,b)$ et $k \in \mathbf{R}$ un nombre réel. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur $k\vec{u} = (ka,kb)$. Géométriquement, $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont représentés par deux flèches parallèles, de sens égal ou opposé suivant que $k > 0$ ou $k < 0$ et de longueur $\|\vec{u}\|$ et $\|k\vec{u}\| = |k|\ \|\vec{u}\|$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont dits **parallèles** ou **proportionnels** ou encore **colinéaires.**

Deux vecteurs non nuls $\vec{u} = (a,b)$ et $\vec{v} = (a',b')$ sont donc parallèles s'ils sont multiples l'un de l'autre, i.e., si $\vec{v}$ est de la forme $\vec{v} = k\vec{u}$ pour un certain $k \in \mathbf{R}$.

Exemple 2 $\vec{u} = (3,-2)$, $\vec{v} = (-9,6)$ et $\vec{w} = (-9/2,3)$ sont parallèles car $\vec{v} = -3\vec{u}$ et $\vec{w} = -3/2\vec{u}$

Pour montrer que deux vecteurs ne sont pas parallèles, il est souvent préférable d'utiliser le critère suivant plutôt que la définition. La démonstration est laissée en exercice.

PROPOSITION 1.1 *Deux vecteurs* $\vec{u} = (a,b)$ *et* $\vec{v} = (a',b')$ *sont parallèles ssi* (*) *le déterminant* $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ *est nul, i.e., ssi* $ab'-a'b = 0$



Exemple 3 Les vecteurs $\vec{u} = (2,-3)$ et $\vec{v} = (3,5)$ ne sont pas parallèles car $2.5-3(-3) = 19 \neq 0$.

Exemple 4 Trouver $t \in \mathbf{R}$ tel que $\vec{u} = (12,t)$ et $\vec{v} = (t,3)$ soient parallèles.

La loi du triangle se généralise en loi du parallélogramme qui donne géométriquement la somme et la différence de 2 vecteurs.

LOI DU PARALLELOGRAMMME *Les vecteurs* $\vec{u}+\vec{v}$ *et* $\vec{u}-\vec{v}$ *sont portés par les deux diagonales du parallélogramme de côtés* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

Produit scalaire et orthogonalité

Soient $\vec{u} = (a,b)$ et $\vec{v} = (a',b')$; le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est le nombre réel

$$\vec{u}.\vec{v} = aa' + bb'.$$

On vérifie les propriétés suivantes (Cf. Exercice 25).

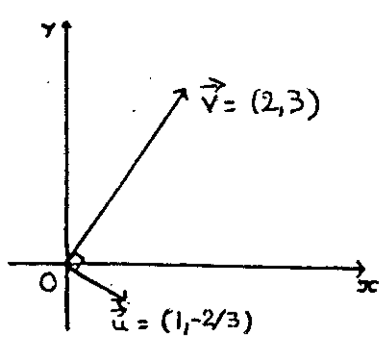
(i) $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

(ii) $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$

(iii) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

(iv) $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2 \geq 0$ (et $= 0$ ssi $\vec{u} = \vec{0}$).

(On dit que le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive).



Le produit scalaire permet de voir si deux vecteurs sont orthogonaux, i.e., si l'angle formé par ces deux vecteurs est un angle droit.

THEOREME 1.2 *Deux vecteurs* $\vec{u} = (a,b)$ *et* $\vec{v} = (a',b')$ *sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul, i.e., ssi* $aa' + bb' = 0$.

Démonstration. La démonstration s'appuie sur le théorème de Pythagore. En effet, formons le triangle de côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$; le troisième côté porte le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi le triangle est rectangle, i.e., ssi

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

soit, grâce à la propriété (iv),

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}$$

En développant cette équation, on aboutit à la formule désirée.

Exemple 5 Les vecteurs $\vec{u} = (3,-2)$ et $\vec{v} = (6,9)$ sont orthogonaux; les vecteurs $\vec{u} = (3,-2)$ et $\vec{v} = (1,2)$ ne le sont pas.

Exemple 6 Trouver $t \in \mathbf{R}$ tel que $\vec{u} = (t,-1)$ et $\vec{v} = (t+2,3)$ soient orthogonaux.

Exemple 7 Un vecteur orthogonal à $\vec{u} = (a,b)$ est, par exemple, le vecteur $\vec{n} = (-b,a)$.

Généralisation. Si θ désigne l'angle formé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut calculer le nombre $\cos(\theta)$ par la formule suivante

$$(*) \qquad \cos(\theta) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

Par exemple, pour $\vec{u} = (2,\sqrt{3})$ et $\vec{v} = (-1,3\sqrt{3})$, on obtient

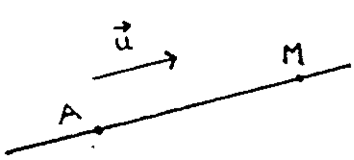
$$\cos(\theta) = \frac{-2+9}{\sqrt{7}\sqrt{28}} = 1/2$$

ce qui correspond à $\alpha = 60° = \pi/3$ radians.
La formule (*) généralise le Th.1.2; en effet, deux vecteurs orthogonaux forment un angle de 90°, de cosinus égal à 0.

1.2 Droites.

Une droite est entièrement déterminée dès que l'on connaît sa direction et l'un de ses points. De façon précise, on la définit comme suit.

DEFINITION 1.3



Soient $A(x_0,y_0)$ *un point et* $\vec{u} = (a,b)$ *un vecteur non nul. La droite* D *passant par* A *et parallèle à* $\vec{u}$, *notée* $D = D(A,\vec{u})$, *est l'ensemble de tous les points* M *du plan tels que les vecteurs* $\vec{AM}$ *et* $\vec{u}$ *soient parallèles. C'est-à-dire;*

$$D = \{ M \in \mathbf{R}^2 \mid \exists\, t \in \mathbf{R} \text{ tq } \vec{AM} = t\vec{u} \}.$$

Le vecteur $\vec{u}$ *est appelé vecteur directeur de* D.

On notera que si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D, alors $2\vec{u}$, $-\frac{1}{2}\vec{u}$, plus généralement tout vecteur non nul parallèle à $\vec{u}$ est également un vecteur directeur de D.

Equation paramétrique

En égalant les composantes des deux termes de l'équation $\vec{AM} = t\vec{u}$, on obtient que les points M(x,y) sur la droite D sont ceux dont les coordonnées sont de la forme

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$$

(i.e., coord. de M = coord. de A + comp. de $t\vec{u}$).

Le système ci-dessus est appelé équation paramétrique de D.

Exemple 8 Déterminer l'équation paramétrique de la droite (AB) passant par les points A(-2,3) et B(3,1). Donner d'autres points sur la droite (AB). Déterminer l'équation paramétrique de la droite orthogonale à (AB) et passant par le milieu des points A et B (Faire une figure).

Equation cartésienne

Soit $\vec{n} = (\alpha,\beta)$ un vecteur orthogonal à D, c'est-à-dire à $\vec{u}$. On dit que $\vec{n}$ est un vecteur **normal** à D. Par exemple, $\vec{n} = (-b,a)$ est un vecteur normal à D. Etre parallèle à $\vec{u}$ est équivalent à être orthogonal à $\vec{n}$. On obtient donc

M(x,y) $\in$ D ssi les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux

ssi $\vec{AM}.\vec{n} = 0$

ssi $\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) = 0$

Cette dernière équation est appelée équation cartésienne de la droite D. On se rappelera que les coefficients de x et y sont exactement les composantes d'un vecteur normal à D.

Exemple 9 Soient A(1,-2) et B(-1,2). Déterminer l'équation cartésienne de la droite D passant par l'origine et orthogonale à (AB), puis son équation paramétrique. Les points suivants sont-ils sur D: E(3,6), F(2,3)? Donner l'équation cartésienne de (AB). Chercher le/les points d'intersection de (AB) et de D.

Exemple 10 Tracer la droite d'équation 2x+3y-5 = 0. Donner un vecteur normal, un vecteur directeur, l'équation paramétrique, les points d'intersection avec les axes.

Exemple 11 Les droites suivantes sont-elles parallèles, orthogonales, égales? Faire une figure.

D_1: $2x-3y+1 = 0$

D_2: $6x+4y-7 = 0$

D_3: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$

D_4: $-4x+6y+m = 0$

Réponses. $D_1 \parallel D_4$, $D_1 = D_4$ ssi m = -2, $D_2 = D_3$, $D_1 \perp D_2$.

Notes 1) Pour produire des points sur une droite, il est plus pratique d'utiliser l'équation paramétrique. En revanche, il faut préférer l'équation cartésienne pour tester l'appartenance d'un point donné à une droite.

2) Deux droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont parallèles, de façon équivalente, si leurs vecteurs normaux sont parallèles. Elles sont égales si en plus elles ont un point en commun. Leurs équations cartésiennes sont alors proportionnelles (mais pas forcément les mêmes).

3) On peut également déterminer l'équation cartésienne d'une droite en "éliminant t dans l'équation paramétrique". Ainsi, pour la droite D_3 de l'exemple 12, on obtient:

$$t = \frac{x-1/2}{2} = \frac{y-1}{-3} \quad \text{ce qui conduit à } -3x-2y+\frac{7}{2} = 0$$

Equation cartésienne normalisée y = px+q et pente d'une droite

Il est très courant de résoudre en y dans l'équation cartésienne d'une droite; on obtient alors son équation cartésienne sous forme normalisée $y = px+q$.

Exemple 12 La droite d'équation $2x+3y-5 = 0$ a pour équation cartésienne normalisée

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

Le nombre réel p s'appelle la pente de la droite D. Il caractérise l'inclinaison de la droite D: entre 2 points distincts de la droite D, les accroissements horizontaux Δx et verticaux Δy sont liés par la relation

$$p = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

En conséquence, on obtient aussi la pente d'une droite en faisant le quotient b/a des composantes d'un vecteur directeur $\vec{u} = (a,b)$ de la droite.

Exemple 13 La première diagonale a pour pente 1, la seconde -1.

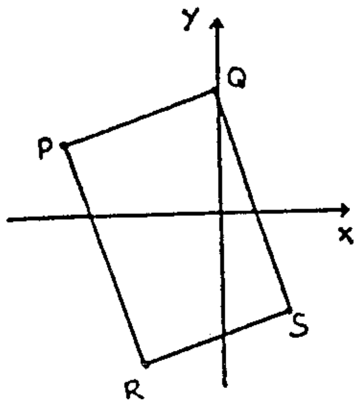
Exemple 14 La droite de pente 2 et passant par A(1,3) a pour équation normalisée $y = 2x+1$. Plus généralement, la droite de pente p et passant par $A(x_0,y_0)$ a pour équation normalisée

$$y-y_0 = p(x-x_0)$$

Exemple 15 Donner un vecteur directeur, un vecteur normal et les points d'intersection avec les axes de la droite d'équation $y = px+q$.

L'équation cartésienne d'une droite peut s'écrire sous une multitude de formes proportionnelles entre elles. Au contraire, l'écriture de l'équation normalisée est unique. Cela fait son intérêt. Deux droites sont égales ssi elles ont exactement la même équation normalisée. Elles sont parallèles ssi elles ont même pente. Elles sont orthogonales ssi le produit de leurs pentes vaut -1 (utiliser l'exemple 15).

Dans ce paragraphe, il faut exclure le cas des droites verticales. Elles sont d'équation cartésienne $x = x_0$ qui ne se résolvent pas en y (y prend des valeurs quelconques). On ne peut donc pas parler d'équation normalisée pour ces droites ni de pente.



Exemple 16 On considère le rectangle (PQSR) ci-contre; on donne les coordonnées des points P et R:

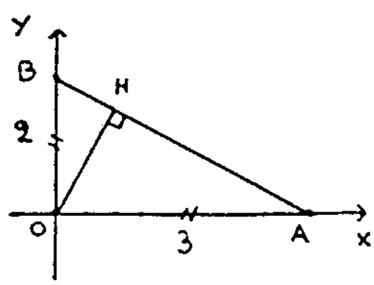
$$P(-2,1) \quad ; \quad R(-1,-2).$$

Donner un vecteur directeur de la droite (PR) puis l'équation de la droite D passant par les milieux respectifs I et J des côtés PR et QS ainsi qu'un vecteur directeur de D.

Solution. $\overrightarrow{PR} = (1,-3)$. La droite D passe par $I(-3/2,-1/2)$ et est orthogonale à (PR); d'où son équation

$$(x+\frac{3}{2})-3(y+\frac{1}{2}) = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{x}{3}$$

Un vecteur directeur de D est $\vec{u} = (1,3)$.



Exemple 17 On considère le triangle OAB ci-contre. Déterminer l'équation de la hauteur D issue de O puis les coordonnées du point d'intersection H des droites D et (AB).

Exemple 18 Représenter graphiquement le domaine de $\mathbf{R}^2$ défini par les inéquations:

$$\begin{cases} 2x+3y < 6 \\ y-x < 0 \\ y > -1 \end{cases}$$

1.3 Courbes planes, coniques.

Courbes planes Les coordonnées (x,y) des points d'une droite D donnée vérifient une équation du type $ax+by+c = 0$. Plus généralement, on appelle courbe plane d'équation $F(x,y) = 0$ l'ensemble de tous les points M(x,y) dont les coordonnées x et y sont liées par la relation $F(x,y) = 0$.

Exemple 19 Le point A(3,2) est un point sur la courbe d'équation $x^2-y^3-1 = 0$ car $3^2-2^3-1 = 0$. Le point B(1,2) n'en est pas un puisque $1^2-2^3-1 = -8 \neq 0$.

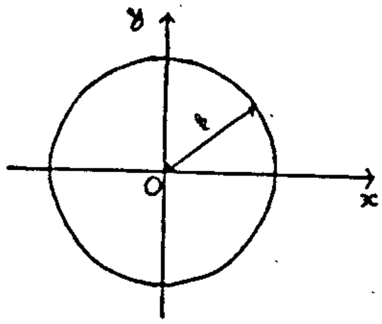
L'équation d'une courbe plane peut s'écrire sous une multitude de formes, équivalentes entre elles.

Exemple 20 La courbe d'équation $x^2-y^3-1 = 0$ a aussi pour équation $x^2-y^3 = 1$ ou $2x^2-2y^3 = 2$ ou encore $(y^3+2)/(x^2+1) = 1$.

Les courbes planes les plus simples après les droites sont celles de degré ≤ 2, i.e., celles dont l'équation est de la forme

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f = 0$$

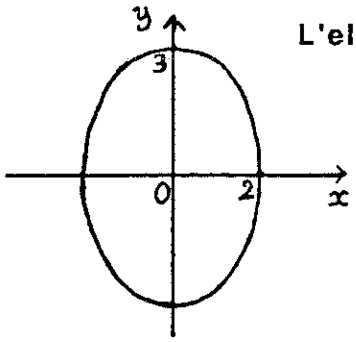
On appelle coniques ces courbes planes. Les exemples type sont les suivants.



Le cercle $C(O,r)$ centré à l'origine et de rayon r, d'équation $x^2+y^2 = r^2$. Le cercle $C(O,r)$ est aussi l'ensemble de tous les points M à distance r de O, i.e., tels que $d(O,M) = r$.

Exemple 21 Représenter graphiquement les ensembles C, I et E définis par

$$\begin{cases} C = C(O,2) \\ I = \{ M(x,y) \mid x^2+y^2 < 4\} \\ E = \{ M(x,y) \mid x^2+y^2 > 4\} \end{cases}$$



$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

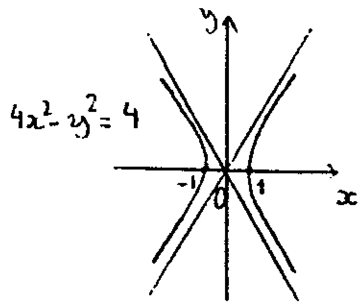
L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ où a et b sont deux nombres réels non nuls.

Exemple 22 Représenter les ellipses d'équation

(a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1$ (b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$

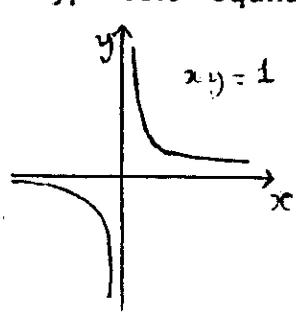
Lorsque $|a| = |b|$, l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ est en fait le cercle $C(O,|a|)$.

Les hyperboles d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$ (ou $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = -1$) où a et b sont deux nombres réels non nuls. Ces courbes sont constituées de deux branches et admettent pour asymptotes les droites d'équation $x/a + y/b = 0$ et $x/a - y/b = 0$



Exemple 23 Représenter les hyperboles $4x^2-y^2 = 1$, $4x^2-y^2 = 4$, $y^2-4x^2 = 4$.

L'hyperbole équilatère d'équation $xy = c$ où $c \in \mathbf{R}^*$. On peut la considérer comme un cas particulier de la famille précédente. On verra qu'elle se déduit de l'hyperbole d'équation $x^2-y^2 = 2c$ par une rotation autour de l'origine d'angle $45° = \pi/4$ radians (Cf. Exemple 33).

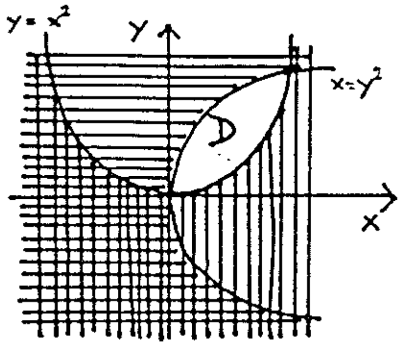


Exemple 24 Représenter les hyperboles $xy = 1$, $xy = 2$, $x^2-y^2 = 2$, $x^2-y^2 = 4$, $xy = -1$ et $xy = -2$.

Les paraboles d'axe vertical d'équation $y = ax^2$ et les paraboles d'axe horizontal d'équation $x = ay^2$ où a est un nombre réel non nul donné.

Exemple 25 Représenter graphiquement le domaine plan D défini par les inéquations

$$\begin{cases} y > x^2 \\ x > y^2 \end{cases}$$



Solution. La parabole $y = x^2$ divise le plan en 2 parties, l'une, notée D_+, où tous les points M(x,y) vérifient $y > x^2$ et l'autre, notée D_-, où tous les points M(x,y) vérifient $y < x^2$. Pour déterminer quelle partie est D_+ et laquelle est D_-, il suffit de "tester" un point quelconque. Prenons le point A(1,2): $2 > 1^2$. Donc la partie qui contient A est la partie D_+. Ensuite, on hachure la partie exclue du domaine, ici D_-. On suit la même procédure pour la seconde inéquation définissant D. Finalement, le domaine D est la partie du plan qui n'a jamais été hachurée. Pour déterminer si les différentes parties du bord sont contenues ou non dans D, on regarde si les inégalités correspondantes sont larges ou strictes.

Intersection de deux courbes Soient C_1 et C_2 deux courbes d'équations respectives $F_1(x,y) = 0$ et $F_2(x,y) = 0$. Les points d'intersection de C_1 et C_2 sont les points M(x,y) dont les coordonnées vérifient simultanément $F_1(x,y) = 0$ et $F_2(x,y) = 0$.

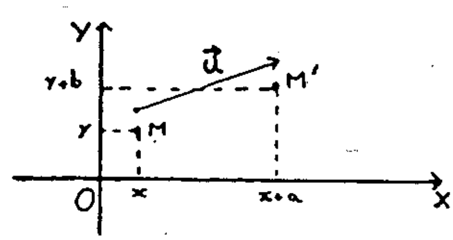
Exemple 26 Déterminer les points d'intersection du cercle C(O,6) et de la première bissectrice.
Réponse. $A(3\sqrt{2},3\sqrt{2})$ et $B(-3\sqrt{2},-3\sqrt{2})$

Exemple 27 Déterminer les points d'intersection de l'ellipse d'équation $x^2 + y^2/4 = 1$ avec les axes de coordonnées, avec le cercle unité. Faire une figure.

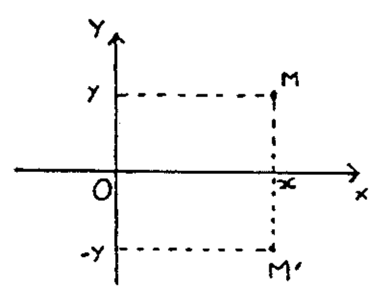
1.4 Transformations du plan.

Par transformation du plan, on entend règle opératoire associant à tout point M un point M' de telle façon que les points M et leurs transformés M' se correspondent de façon biunivoque. On rappelle ici les exemples usuels de transformations du plan.

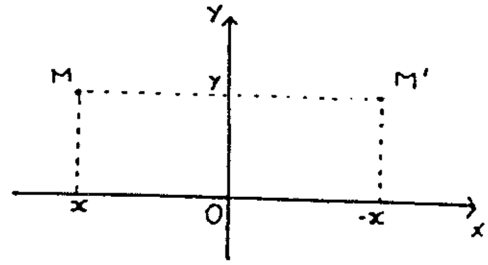
Translation de vecteur $\vec{u}$. $t_{\vec{u}}$: $M(x,y) \rightarrow M'(x+a,y+b)$



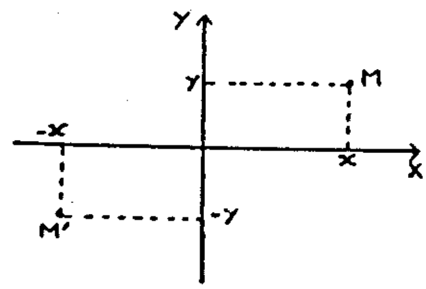
Symétrie par rapport à Ox. $S_{/Ox}$: $M(x,y) \rightarrow M'(x,-y)$



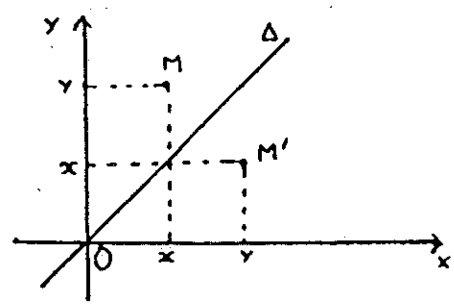
Symétrie par rapport à Oy. $S_{/Oy}$: M(x,y) $\rightarrow$ M'(-x,y)



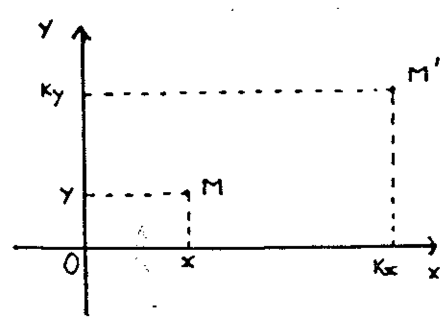
Symétrie par rapport à O. $S_{/O}$: M(x,y) $\rightarrow$ M'(-x,-y)



Symétrie par rapport à la première bissectrice. $S_{/\Delta}$: M(x,y) $\rightarrow$ M'(y,x)



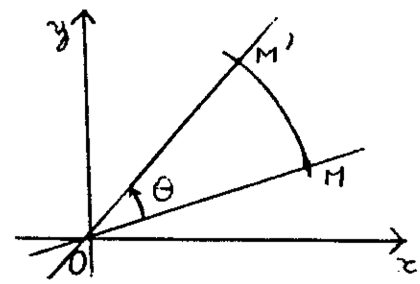
Homothétie de rapport k (k≠0) et de centre O. h_k: M(x,y) $\rightarrow$ M'(kx,ky)



Rotation r_θ d'angle θ autour de O.

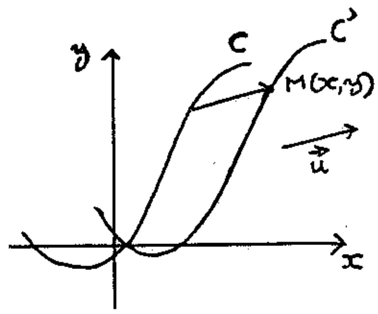
r_θ: $M(x,y) \rightarrow M'(x',y')$

où $\begin{cases} x' = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ y' = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases}$



La transformation inverse de la rotation r_θ est la rotation $r_{-\theta}$ d'angle $-\theta$.

Equation d'une courbe translatée



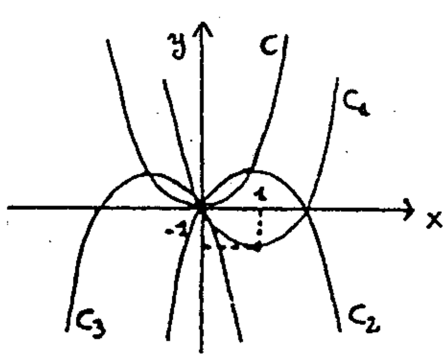
Soient C une courbe plane d'équation $F(x,y) = 0$ et $\vec{u} = (a,b)$ un vecteur. La translatée de C par la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ est une courbe C'. Nous allons donner son équation. Chercher l'équation de C', c'est chercher une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M(x,y) soit sur C'.

Un point M(x,y) est sur C' ssi le point dont il est le translaté est sur C. Ce point est le point de coordonnées (x-a,y-b); il est sur C ssi $F(x-a,y-b) = 0$.

Conclusion: La courbe translatée C' est d'équation

$F(x-a,y-b) = 0.$

Elle se déduit de celle de C en remplaçant x et y par x-a et y-b (et non pas x+a et y+b).



Exemple 28 Donner des règles analogues pour les autres transformations usuelles.

Exemple 29 C est la parabole $y = x^2$. Déterminer les équations des courbes C_1, C_2 et C_3 ci-contre.

Equation canonique des coniques

Exemple 30 La courbe C d'équation $x^2-2x+y^2 = 3$ est une conique. Son équation se met sous la forme $(x-1)^2+y^2 = 4$. La courbe C est donc la courbe translatée du cercle C(O,2) par le vecteur $\vec{u} = (1,0)$, i.e., le cercle centré en A(1,0) et de rayon 2.

Plus généralement, la courbe déduite du cercle C(O,r) par la translation de vecteur $\vec{u} = (x_o,y_o)$ est un cercle; c'est le cercle C(A,r) de centre $A(x_o,y_o)$ et de rayon r. Il est d'équation

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2 = r^2$$

Le cercle C(A,r) est aussi l'ensemble des points M tels que d(A,M) = r.

Exemple 31 L'équation $x^2+y^2+2y = m$ est-elle l'équation d'un cercle? Si oui, préciser le centre et le rayon. Pour quelle valeur de m est-ce l'équation d'un cercle passant par l'origine?

De la même façon, les courbes déduites des coniques type du §1.3 par la translation de vecteur $\vec{u} = (x_o,y_o)$ sont des coniques: des ellipses, des paraboles, des hyperboles. On obtient leur équation en remplaçant dans l'équation de la conique type, x et y resp. par $(x-x_o)$ et $(y-y_o)$; l'équation obtenue est dite canonique.

Exemple 32 Reconnaître les courbes suivantes.
(a) C: $xy+2x-y = 1$ (b) C: $3x^2+6x-3y = 1$ (c) C: $3y^2+6y-x = 1$

Solution. (a) L'équation de C se met sous la forme $(x-1)(y+2) = -1$. On reconnaît l'équation canonique d'une hyperbole équilatère.

On peut montrer que toute conique se déduit d'une conique type du paragraphe §1.3 par une translation, suivie d'une homothétie et d'une rotation.

Exemple 33 Montrer que l'hyperbole équilatère d'équation $xy = c$ se déduit de l'hyperbole H d'équation $x^2-y^2 = 2c$ par la rotation r_θ où $\theta = 45°$.

Solution. Graphiquement, c'est clair. Vérifions le sur les équations. Notons H' la courbe déduite de H par la rotation r_θ où $\theta = 45°$. On obtient l'équation de H' en remplaçant dans $x^2-y^2 = 2c$, les coordonnées (x,y) d'un point m par les coordonnées du point $r_{-\theta}(m)$ (Noter le signe "-"). Ce point $r_{-\theta}(m)$ a pour coordonnées

$$(\cos(-\theta)x-\sin(-\theta)y \ , \ \sin(-\theta)x+\cos(-\theta)y)$$

C'est-à-dire,

$$(\cos(\theta)x+\sin(\theta)y \ , \ -\sin(\theta)x+\cos(\theta)y)$$

soit

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \ , \ \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\right) \text{ (puisque } \theta = 45°\text{).}$$

La substitution dans l'équation de H donne

$$(x+y)^2/2 - (-x+y)^2/2 = 2c$$

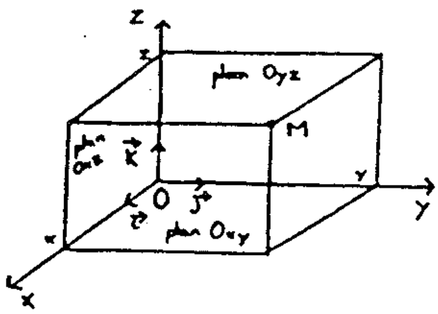
i.e.,

$$2xy = 2c.$$

Conclusion: la courbe H' est bien l'hyperbole équilatère de l'énoncé.

§2. COURBES ET SURFACES DANS L'ESPACE.

2.1 Vecteurs dans l'espace.



L'espace à 3 dimensions, noté $\mathbf{R}^3$, est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; $\vec{i}$ dirige l'axe Ox des abscisses, $\vec{j}$ l'axe Oy des ordonnées et $\vec{k}$ l'axe vertical Oz (ou axe des cotes). Dans ce repère, tout point du plan est repéré par un triplet (x,y,z) de nombres réels: x est son abscisse, y son ordonnée et z sa cote ou troisième coordonnée. On note M(x,y,z) le point repéré. Le plan horizontal Oxy et les deux plans verticaux Oxz et Oyz sont appelés les plans de coordonnées.

Note. x,y et z sont les lettres communément employées pour les coordonnées. Il nous arrivera d'en préférer d'autres en des situations plus spécifiques, par exemple K, L et Q dans un contexte économique.

Un vecteur $\vec{u}$ de composantes (a,b,c), correspond à la donnée d'un triplet (a,b,c) de nombres réels. On le note $\vec{u}$ = (a,b,c) ou $\vec{u} = a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$. Le vecteur $\vec{u}$ = (a,b,c) est représenté géométriquement par une flèche de a unités de longueur le long de Ox, de b unités le long de Oy et de c unités le long de Oz (l'orientation des axes étant donnée par le sens de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$).

Exemple 1 Les vecteurs de base $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ et $\vec{k}(0,0,1)$; le vecteur nul $\vec{0}=(0,0,0)$.

Milieu de 2 points Le milieu de deux points $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ est le point

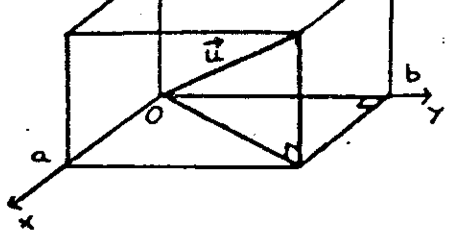
$$I\left(\frac{1}{2}(x_A+x_B),\frac{1}{2}(y_A+y_B),\frac{1}{2}(z_A+z_B)\right).$$

Vecteur bipoint Etant donnés deux points $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$, le vecteur $\vec{AB}$ est le vecteur qui permet d'aller de A jusqu'à B, i.e.,

$$\vec{AB} = (x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A).$$

Longueur d'un vecteur La longueur (ou norme) d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$. Elle est donnée par le théorème de Pythagore (qu'on applique aux deux triangles rectangles indiqués sur la figure ci-contre):

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$



Distance Etant donnés deux points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$, la distance entre A et B est notée d(A,B). C'est la longueur du vecteur $\vec{AB}$, d'où la formule

$$d(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

On vérifie que:

$$\begin{cases} d(A,B) = d(B,A) & \text{(Symétrie)} \\ d(A,B) = 0 \text{ ssi } A = B & \text{(Séparation)} \\ d(A,C) \leq d(A,B)+d(B,C) & \text{(Inégalité du triangle)} \end{cases}$$

Somme de 2 vecteurs Soient $\vec{u} = (a,b,c)$ et $\vec{v} = (a',b',c')$; le vecteur somme $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur de composantes (a+a',b+b',c+c'). Géométriquement, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'ajoutent selon la loi du triangle qui s'énonce comme en dimension 2. La relation de Chasles $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ s'en déduit de la même façon.

Vecteurs parallèles Soient $\vec{u} = (a,b,c)$ et $k \in \mathbf{R}$ un nombre réel. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur $k\vec{u} = (ka,kb,kc)$. Géométriquement, $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont représentés par deux flèches parallèles, de sens égal ou opposé suivant que $k > 0$ ou $k < 0$ et de longueur $||\vec{u}||$ et $||k\vec{u}|| = |k|\,||\vec{u}||$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont dits **parallèles** ou **proportionnels** ou encore **colinéaires.**

Deux vecteurs donnés non nuls $\vec{u} = (a,b,c)$ et $\vec{v} = (a',b',c')$ sont donc parallèles s'ils sont multiples l'un de l'autre, i.e., si $\vec{v}$ est de la forme $\vec{v} = k\,\vec{u}$ pour un certain $k \in \mathbf{R}$.

Exemple 2 $\vec{u} = (2,5,-1)$ et $\vec{v} = (6,15,-3)$ sont parallèles: $\vec{v} = 3\vec{u}$.

Exemple 3 $\vec{u} = (3,-2,4)$ et $\vec{v} = (-6,6,1)$ ne sont pas parallèles car s'ils l'étaient, le coefficient de proportionnalité k serait égal aux trois nombres -6/3, 6/-2, 1/4 à la fois.

Note. De façon générale, on voit que deux vecteurs $\vec{u} = (a,b,c)$ et $\vec{v} = (a',b',c')$ sont parallèles ssi $a'/a = b'/b = c'/c$ ou de façon équivalente, ssi

(*) les 3 déterminants $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$ sont nuls.

Cette dernière condition (qui doit être préférée à la précédente qui n'a pas de sens si l'un des nombres a, b, c est nul), fournit l'analogue de la Prop.1.1.

Exemple 4 Trouver s et $t \in \mathbf{R}$ tels que $\vec{u} = (t,4s,4)$ et $\vec{v} = (s,t,t)$ soient parallèles.

Produit scalaire et orthogonalité

Soient $\vec{u}=(a,b,c)$ et $\vec{v}=(a',b',c')$; le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est <u>le nombre réel</u>

$$\vec{u}.\vec{v} = aa' + bb' + cc'.$$

Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire vérifie les propriétés suivantes (Cf. Exercice 60).

(i) $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

(ii) $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$

(iii) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

(iv) $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2 \geq 0$ (et $= 0$ ssi $\vec{u} = \vec{0}$).

Le Th.2.1 est l'analogue du Th.1.2.

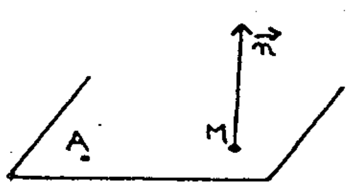
THEOREME 2.1 *Deux vecteurs* $\vec{u}=(a,b,c)$ et $\vec{v}=(a',b',c')$ *sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul, i.e. ssi* $aa' + bb' + cc' = 0$.

Exemple 5 Vérifier que les vecteurs $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (-3,0,1)$ et $\vec{w} = (1,-5,3)$ sont 2 à 2 orthogonaux.

Contrairement à la dimension 2, il existe des vecteurs non proportionnels orthogonaux à un vecteur donné. Cependant, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné sont "dans un même plan".

2.2 <u>Plans</u>.

DEFINITION 2.2 *Soient* $A(x_0,y_0,z_0)$ *un point et* $\vec{n} = (\alpha,\beta,\gamma)$ *un vecteur non nul. Le plan* P *passant par* A *et orthogonal à* $\vec{n}$ *est l'ensemble de tous les points* $M(x,y,z)$ *tels que les vecteurs* $\vec{AM}$ *et* $\vec{n}$ *soient orthogonaux. C'est-à-dire,*



$$P = \{ M \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{AM} \perp \vec{n} \}.$$

$\vec{n}$ *est appelé vecteur normal au plan* P .

Equation cartésienne

En appliquant le Th.2.1, on obtient que les points M(x,y,z) sur le plan P sont ceux dont les coordonnées vérifient

$$\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + \gamma(z-z_0) = 0.$$

Cette équation est appelée équation du plan P. On notera que les coefficients de x, y et z sont exactement les composantes d'un vecteur normal.

Exemple 6 Le plan P passant par le point A(1,2,3) et orthogonal à $\vec{n}=(3,2,1)$ a pour équation $3(x-1)+2(y-2)+(z-3) = 0$, i.e, $3x+2y+z-10 = 0$.

Exemple 7 Les plans horizontaux sont d'équation $z = c$; les plans parallèles au plan yoz sont d'équation $x = a$ et les plans parallèles au plan xoz sont d'équation $y = b$.

Exemple 8 Déterminer l'équation du plan passant P par les 3 points I(1,0,0), J(0,1,0) et K(0,0,1).

Solution. On connait des points du plan P mais il faut déterminer un vecteur normal à P. Un tel vecteur $\vec{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$ est un vecteur qui est à la fois orthogonal à $\vec{IJ}(-1,1,0)$ et $\vec{IK}(-1,0,1)$. Les nombres α, β, γ sont donc solutions du système

$$\begin{cases} -\alpha+\beta = 0 \\ -\alpha+\gamma = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $\alpha = \beta = \gamma$. Par exemple, on peut prendre $\vec{n}=(1,1,1)$; d'où l'équation de P:

$$1(x-1)+1(y-0)+1(z-0) = 0 \quad \text{soit } x+y+z = 1$$

Exemple 9 Les plans suivants sont-ils parallèles, orthogonaux, égaux?

P_1: $-2x - 3y + 4z + 1 = 0$
P_2: $6x + 9y - 8z + 7 = 0$
P_3: $x + 3y/2 - 2z - m = 0$
P_4: $x + 2y + 2z = 0$.

Rép. $P_1 /\!/ P_3$; $P_1 = P_3$ ssi $m = 1/2$; $P_1 \perp P_4$.

Produit vectoriel Dans l'exemple 8, nous avons eu besoin de déterminer un vecteur $\vec{n}$ qui soit orthogonal à deux vecteurs donnés $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Plutôt que de chercher $\vec{n}$ comme nous l'avons fait, on peut prendre pour $\vec{n}$ le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$, est le vecteur

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \right)$$

<u>Règle mnémotechnique</u>: on dispose les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en colonnes dans un tableau

$$\begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{bmatrix}$$

Pour i = 1,2,3, la i-ième composante de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est alors le déterminant 2x2 obtenu en barrant la i-ème ligne du tableau, affecté du signe - pour i = 2 (et du signe + pour i = 1,3).
Noter qu'à la différence du produit scalaire, le produit vectoriel de deux vecteurs est un <u>vecteur</u>.

THEOREME 2.3 *Le produit vectoriel* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *a les propriétés suivantes:*
(i) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *est un vecteur orthogonal aux deux vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
(ii) *Le produit vectoriel* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *est le vecteur nul ssi les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont parallèles.*

Démonstration. (i) On vérifie sans peine que les produits scalaires $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{u}$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{v}$ sont nuls.
(ii) C'est exactement ce que dit la note suivant l'exemple 3 en §2.1.

Exemple 10 Prenons comme dans l'exemple 8, $\vec{u} = (-1,1,0)$ et $\vec{v} = (-1,0,1)$. on trouve alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = (1,1,1)$.

Généralisation. La formule

$$(*) \qquad \cos(\theta) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

donnant le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est également valable dans l'espace à 3 dimensions. On peut obtenir le sinus de θ grâce au produit vectoriel. Précisément, on a (Cf. Exercice 70)

$$(**) \qquad |\sin(\theta)| = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

Exemple 11 Pour $\vec{u} = (-1,1,0)$ et $\vec{v} = (-1,0,1)$, on trouve $\cos(\theta) = 1/2$ et $\sin(\theta) = \sqrt{3}/2$, i.e., $\theta = 60°$.

2.3 Sphères et autres surfaces simples.

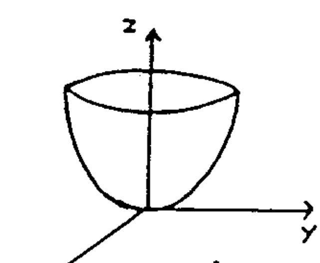
DEFINITION 2.4 *Soient* $A(x_0,y_0,z_0)$ *un point et* $r \geq 0$; *la sphère de centre* A *et de rayon* r, *noté* S(a,r) , *est l'ensemble des points* M *à distance* r *du point* A ; *i.e.,*

$$S(a,r) = \{ M \in R^3 \mid d(A,M) = r\}.$$

Un point M(x,y,z) *est sur la sphère* S(A,r) *ssi ses coordonnées* x,y *vérifient*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2= r^2$$

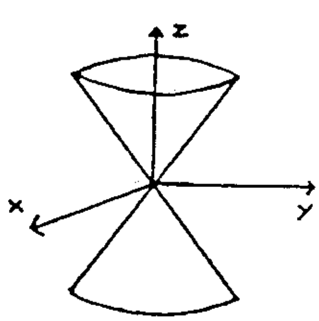
On dit que c'est l'équation de la sphère S(A,r).



$z = x^2+y^2$

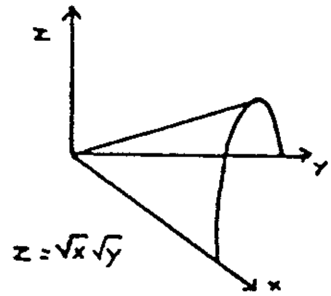
Exemple 12 La sphère S(0,r) centrée au point origine O et de rayon r est d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Plus généralement, on appelle **surface** d'équation F(x,y,z) = 0 l'ensemble de tous les points M(x,y,z) dont les coordonnées x,y,z sont liées par la relation F(x,y,z) = 0.



$z^2 = x^2+y^2$

On vient de donner la forme générale de l'équation d'une sphère. Les plans sont d'équation de la forme ax+by+cz+d = 0. Voici d'autres exemples de surfaces qui reviendront par la suite.



- Le paraboloïde de révolution d'équation $z = a(x^2+y^2)$ $(a \neq 0)$.
- Le double cône de révolution d'équation $z^2 = a(x^2+y^2)$ $(a > 0)$.
- Le "cône de Cobb-Douglas" d'équation $z-\sqrt{xy} = 0$.

[Dans le modèle économique de Cobb-Douglas, la production obtenue Q, la main d'oeuvre employée L et le capital utilisé K sont reliés par une relation du type $Q = \gamma K^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Pour un tel modèle, les points (K,L,Q) sont des points d'une surface conique du type ci-dessus (L'exemple donné correspond à la valeur 1/2 du paramètre α).]

2.4 Courbes dans l'espace.

En général, l'intersection de deux surfaces est une courbe dans l'espace. Une telle courbe est donc définie par 2 équations en x,y,z. Précisément, si S_1 et S_2 sont deux surfaces d'équations respectives $F_1(x,y,z) = 0$ et $F_2(x,y,z) = 0$, la courbe intersection $C = S_1 \cap S_2$ est d'équations

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Exemple 13 La courbe C intersection du double cône de révolution d'équation $z^2-x^2-y^2 = 0$ et d'un plan horizontal $z = c$ est d'équation

$$\begin{cases} z^2-x^2-y^2 = 0 \\ z = c \end{cases} \quad \text{ou, de façon équivalente} \quad \begin{cases} x^2+y^2 = c^2 \\ z = c \end{cases}$$

La courbe C est donc un cercle dans le plan horizontal $z = c$, le cercle centré au point A(0,0,c) et de rayon $|c|$.

Attention! $x^2+y^2 = c^2$ est l'équation d'un cercle dans le plan, mais dans l'espace, c'est l'équation d'une surface, précisément d'un cylindre circulaire.

Exemple 14 Déterminer la courbe C intersection des deux sphères $S(A_1,2)$ et $S(A_2,2)$ où $A_1 = (0,0,1)$ et $A_2=(0,0,-1)$.

Rép. C : $\begin{cases} x^2+y^2 = 3 \\ z = 0 \end{cases}$ = cercle du plan Oxy de centre O, de rayon $\sqrt{3}$.

Exemple 15 Déterminer la courbe C intersection du paraboloïde de révolution $z-x^2-y^2 = 0$ avec les plan verticaux $x = a$ et $y = b$.

2.5 Droites dans l'espace.

Une droite dans l'espace est l'intersection de deux plans non parallèles; une droite peut donc est être définie par 2 équations de plan. On appelle équation cartésienne d'une droite dans l'espace tout système de 2 équations de plan définissant cette droite.

Exemple 16 Les trois axes de coordonnées Ox, Oy, Oz sont respectivement d'équations

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

D'autre part, une droite peut également être définie, comme dans le plan, par un point et un vecteur directeur: si $A(x_0,y_0,z_0)$ est un point et $\vec{u} = (a,b,c)$ un vecteur non nul, la droite $D = D(A;\vec{u})$ passant par A et parallèle à $\vec{u}$ est l'ensemble de tous les points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient parallèles. C'est-à-dire,

$$D = \{ M \in R^2 \mid \exists t \in R \text{ tq } \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \}.$$

Comme en §1, on obtient l'équation paramétrique de D

$$\begin{cases} x = x_0+ta \\ y = y_0+tb \\ z = z_0+tc \end{cases}$$

(i.e., coord. de M = coord. de A + comp. de $t\vec{u}$).

On obtient l'équation cartésienne de D en éliminant t de l'équation paramétrique.

Exemple 17 Déterminer l'équation paramétrique et l'équation cartésienne de la droite (AB) passant par les points A(-2,1,3) et B(2,3,1). Déterminer l'équation du plan médiateur de [A,B], i.e. du plan orthogonal à (AB) et passant par le milieu des points A et B (Faire une figure).

Inversement, pour obtenir l'équation paramétrique d'une droite à partir de son équation cartésienne, on résout le système des 2 équations en considérant l'une des inconnues (x, y ou z) comme un paramètre t.

Exemple 18 Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite D d'équation cartésienne

$$\begin{cases} x+y+z = 3 \\ x+2y-z = 0 \end{cases}.$$

Solution. On pose z = t. Le système conduit à

$$\begin{cases} x = 6-3t \\ y = -3+2t \\ z = t \end{cases}$$

Le point A(6,-3,0) est donc un point de D et $\vec{u} = (-3,2,1)$ un vecteur directeur.

CHAPITRE 2

FONCTIONS. GENERALITES.

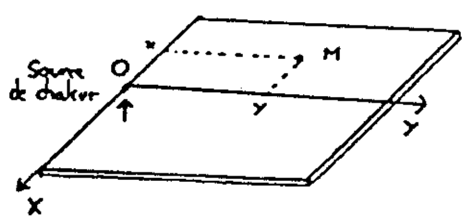
§1. FONCTIONS DE N VARIABLES.

1.1 Définitions et exemples.

La notion de fonction est naturelle: elle apparaît à chaque fois que l'on cherche à décrire quantitativement un phénomène où une quantité mesurable **dépend** ou **est fonction de** un ou plusieurs facteurs mesurables ou **variables.** Si n facteurs $x_1,...,x_n$ interviennent on dit que a est fonction des n variables $x_1,...,x_n$ et on écrit $a = a(x_1,...,x_n)$.

Exemple 1 Les fonctions de la variable "temps" sont nombreuses. Ainsi, la distance l parcourue par une automobile roulant à vitesse constante v dépend de la durée t du trajet; $l = l(t)$ est une fonction de la variable t. Cette dépendance peut être explicitée: pour des unités de temps et de distance bien choisies, on a $l(t) = vt$. De même, une pierre lâchée dans un puits vertical, se trouve, t secondes après, à la profondeur $h = 1/2\ gt^2$ (en mètres pour $g = 9{,}81...$); $h = h(t)$ est également une fonction du temps t.

Exemple 2 La surface s d'un carré est fonction s(l) de la longueur de son côté; en revanche, la surface S d'un rectangle est fonction de 2 variables, sa longueur L et sa largeur l. On a $s = s(l) = l^2$ et $S = S(L,l) = Ll$.



Exemple 3 "Plaque métallique chauffée à l'origine" Une plaque métallique est chauffée en un point O. La température d'un point M de cette plaque dépend de sa position par rapport à O qui est déterminée par les coordonnées x et y de M selon deux axes Ox et Oy tracés sur la plaque. On a donc $T = T(x,y)$ mais la dépendance n'est pas aussi facile à expliciter que dans les exemples précédents.

Exemple 4 Selon la fonction de production de Cobb-Douglas, la production Q s'exprime comme fonction $Q = Q(K,L)$ du capital K et de la main d'oeuvre L selon la formule $Q(K,L) = \gamma K^{\alpha} L^{1-\alpha}$ (où $\alpha \in [0,1]$ et $\gamma \geq 0$).

Dans chacun de ces exemples est mise en évidence une relation entre quantité étudiée et variables où la connaissance des variables détermine la quantité étudiée. Ainsi, la connaissance de la longueur et de la largeur d'un rectangle détermine sa surface. On appelle fonction la correspondance

$$\text{variables} \rightarrow \text{quantité étudiée.}$$

DEFINITION 1.1 *On appelle fonction de* n *variables la donnée* f *d'une correspondance*

$$(x_1,\dots,x_n) \to f(x_1,\dots,x_n) \qquad ((x_1,\dots,x_n) \in E)$$

associant à tout n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ *d'un sous-ensemble* E *de* $\mathbf{R}^n$ *, un unique nombre réel* $f(x_1,\dots,x_n)$ *, appelé valeur de* f *au point* $(x_1,\dots,x_n)$.

La notation suivante est également souvent utilisée pour la fonction f:

$$f: \begin{cases} E \to \mathbf{R} \\ (x_1,\dots,x_n) \to f(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$$

L'ensemble E s'appelle **le domaine de définition** de la fonction f. Très souvent, il n'est donné qu'implicitement dans la définition de f. Ainsi, dans l'exemple 2, E est l'ensemble $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ des couples (L,l) où L et l sont positifs; en effet, longueur et largeur d'un rectangle sont des nombres positifs. Quand aucune contrainte due à la nature du problème n'apparaît, le domaine de définition est l'ensemble de tous les n-uplets $(x_1,\dots,x_n)$ pour lesquels l'expression $f(x_1,\dots,x_n)$ a un sens. C'est le cas notamment quand la fonction f est définie par sa valeur $f(x_1,\dots,x_n)$ en un point générique $(x_1,\dots,x_n)$. Il est alors d'usage de noter D_f le domaine de définition de f .

Exemple 5 La fonction "surface du carré" de l'exemple 2 est la fonction $l \to l^2$ $(l \geq 0)$; son domaine est $\mathbf{R}_+$. Mais la fonction $l \to l^2$ est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Exemple 6 La fonction f définie par $f(x) = 1/x$ a pour domaine l'ensemble $D_f = \mathbf{R}^*$, la fonction $g(x,y) = 1/(x^2+y^2)$ a pour domaine l'ensemble $D_g = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exemple 7 La correspondance

$$x \to \begin{cases} -8 & \text{si } x < -2 \\ x^3 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 8 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

définit une fonction d'une variable. De telles fonctions, définies par différentes expressions sur des domaines disjoints sont dites "définies par morceaux".

Un nombre réel z est une **valeur** prise par la fonction f s'il peut s'écrire sous la forme $z = f(x_1,\dots,x_n)$. **L'ensemble image** de la fonction, noté $f(D_f)$, est l'ensemble de toutes les valeurs prises par la fonction sur le domaine; c'est-à-dire:

$$f(D_f) = \{\, f(x_1,\dots,x_n) \mid (x_1,\dots,x_n) \in D_f \,\}.$$

L'ensemble image est un sous-ensemble de **R**. De façon plus générale, pour I sous-ensemble de D_f, on définit **l'ensemble image de I par f,** noté f(I), comme l'ensemble de toutes les valeurs prises par f sur I; c'est-à-dire:

$$f(I) = \{ f(x_1,\ldots,x_n) \mid (x_1,\ldots,x_n) \in I\}.$$

Exemple 8 L'ensemble image de la fonction $f(x) = x^2$ est l'ensemble de tous les carrés de nombres réels; c'est l'ensemble $\mathbf{R}_+$. L'ensemble image de l'intervalle I = [2,3[est l'ensemble de tous les carrés de nombres réels compris entre 2 et 3 et différents de 3 i.e., f([2,3[) = [4,9[. On obtient de façon analogue f([-2,3[) = [0,9[.

Exemple 9 Soit $f(x,y) = x^2-y^2$. Montrer que $f(D_f) = \mathbf{R}$. Déterminer ensuite l'ensemble f(D(O,1)) image par f du disque unité $D(O,1) = \{ x^2+y^2 \leq 1 \}$.

Solution. Soit $c \in \mathbf{R}$. On a $\begin{cases} c = f(\sqrt{c},0) & \text{si } c \geq 0 \\ c = f(0,\sqrt{-c}) & \text{si } c \leq 0 \end{cases}$

D'où $f(D_f) = \mathbf{R}$. Montrons maintenant que f(D(O,1)) = [-1,1]. Dans le raisonnement précédent, si $|c| \leq 1$, alors les points

$$(\sqrt{|c|},0) \text{ et } (0,\sqrt{|c|})$$

sont dans le disque D(O,1). Cela montre que $f(D(O,1)) \supset [-1,1]$. Montrons inversement que $[-1,1] \supset f(D(O,1))$. Soit $(x,y) \in D(O,1)$. On a $x^2+y^2 \leq 1$; en particulier, $0 \leq x^2 \leq 1$ et $0 \leq y^2 \leq 1$. D'où

$$-1 \leq f(x,y) = x^2-y^2 \leq 1,$$

c'est-à-dire $f(x,y) \in [-1,1]$.

1.2 Représentations du domaine de définition.

Une variable Le domaine de définition d'une fonction d'une variable est un sous-ensemble de **R**; généralement, on peut l'écrire comme une réunion d'intervalles.

Exemple 10 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes:

(a) $f(x) = \sqrt{-x} + 1/\sqrt{2+x}$

(b) $f(x) = \mathrm{Log}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$

(c) $f(x) = \left(\dfrac{1-|x|}{2-|x|}\right)^{1/2}$

(d) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$

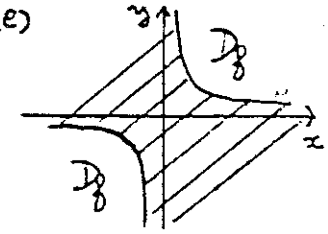
(e) $f(x) = e^{-1/\mathrm{Log}(x)}$

(f) $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$

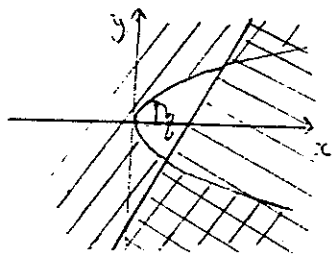
Deux variables Le domaine de définition d'une fonction de 2 variables est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$, i.e., une partie du plan Oxy. En général, c'est graphiquement qu'on en a la meilleure représentation.

Exemple 11 Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes:

(e)



(f)



(a) $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$

(b) $f(x,y) = x/(2x-4y+1)$

(c) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

(d) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}$

(e) $f(x,y) = (xy-1)^{1/2}$

(f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + \sqrt{4-x^2-y^2}$

(g) $f(x,y) = \sqrt{2x-x^2-y^2}$

(h) $f(x,y) = \sqrt{36-4x^2-9y^2}$

(i) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{Log}(y-x+1)}{(4-xy)^{1/2}}$

(j) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{Log}(y-2x+3)}{(x-y^2)^{1/2}}$

1.3 Opérations.

Deux fonctions de n variables s'ajoutent, se multiplient, se divisent de façon naturelle. Si f et g sont deux fonctions de n variables,

• la somme f+g est la fonction

$$(x_1,\dots,x_n) \to f(x_1,\dots,x_n)+g(x_1,\dots,x_n)$$

définie en tous les points $(x_1,\dots,x_n)$ où f et g le sont. On a donc

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

• le produit fg est la fonction

$$(x_1,\dots,x_n) \to f(x_1,\dots,x_n)g(x_1,\dots,x_n)$$

définie en tous les points $(x_1,\dots,x_n)$ où f et g le sont. On a donc

$$D_{fg} = D_f \cap D_g$$

• le quotient f/g est la fonction

$$(x_1,\dots,x_n) \to f(x_1,\dots,x_n)/g(x_1,\dots,x_n)$$

définie en tous les points $(x_1,\dots,x_n)$ où f et g le sont et où $g(x_1,\dots,x_n) \neq 0$. On a donc

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g \setminus \{ (x_1,\dots,x_n) \mid g(x_1,\dots,x_n) = 0 \}$$

Exemple 12 Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition de la fonction f/g où $f(x,y) = xy$ et $g(x,y) = \mathrm{Log}(xy)$.

La composition est une opération un peu plus délicate. La fonction composée fog n'a de sens que si f est une fonction d'une seule variable $u \to f(u)$. La fonction fog est alors la fonction

$$(x_1,\dots,x_n) \to f[g(x_1,\dots,x_n)].$$

On notera que si f et g sont toutes deux des fonctions d'une variable, les deux composées fog et gof sont définies mais sont distinctes.

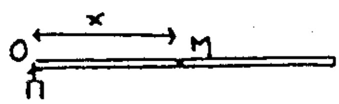
Exemple 13 (a) Soient $f(x) = x+1$ et $g(x) = 2x+1$. Montrer que les fonctions fog et gof sont distinctes.
(b) Soient $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. Montrer que les ensembles D_{fog} et D_{gof} sont distincts.

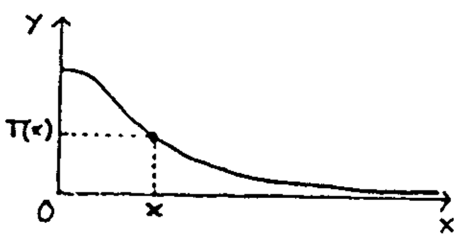
Exemple 14 Soit $f(x) = 1/(1-x)$. Déterminer fof, fofof et de façon générale f^n = fof...of pour n entier positif.

Exemple 16 Soit $f(x,y) = \mathrm{Log}(e^{(x+y)^3}+1)$. La fonction f est composée des fonctions "élémentaires" suivantes: g: $(x,y) \to x+y$, h: $u \to u^3$, j: $v \to e^v$, k: $w \to w+1$ et l: $t \to \mathrm{Log}(t)$. On a f = lokojohog.

§2. GRAPHE D'UNE FONCTION.

2.1 Graphe d'une fonction d'une variable.





Considérons une règle métallique graduée chauffée en l'une de ses extrémités O. La température T d'un point de la règle dépend de sa distance à O, notée x. Il n'est pas facile de donner une formule pour la fonction $T = T(x)$; en revanche, on en a une représentation graphique intuitive assez bonne.

On a obtenu la figure ci-contre en reportant sur le plan $\mathbb{R}^2$ tous les points de coordonnées $(x,T(x))$ pour x variant entre 0 et la longueur de la règle. Le graphe ou courbe représentative d'une fonction quelconque est défini de la même façon.

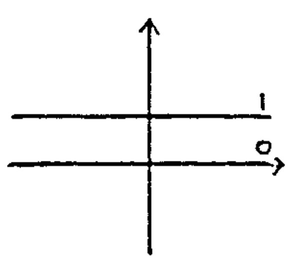
DEFINITION 2.1 *Soit* f *une fonction d'une variable. On appelle graphe de* f *, l'ensemble* G_f *de tous les points du plan* $\mathbb{R}^2$ *de coordonnées* $(a,f(a))$ *où* a *varie dans* D_f *; c'est-à-dire:*

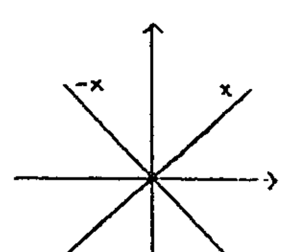
$$G_f = \{ M(a,f(a)) \mid a \in D_f \}$$

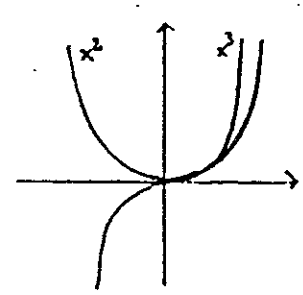
Le graphe G_f *est une courbe plane; elle est d'équation* $y = f(x)$ (avec $x \in D_f$).

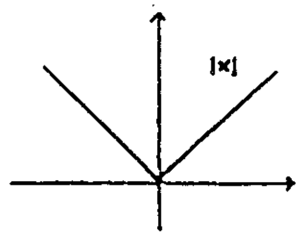
Exemple 1 Graphes des fonctions "simples"

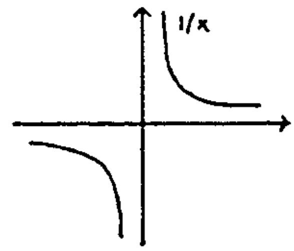
(a) $x \to 0$ et $x \to 1$	(b) $x \to x$ et $x \to -x$
(c) $x \to x^2$ et $x \to x^3$	(d) $x \to \lvert x\rvert$
(e) $x \to 1/x$	(f) $x \to \sqrt{x}$

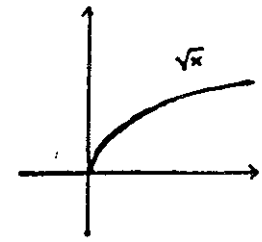












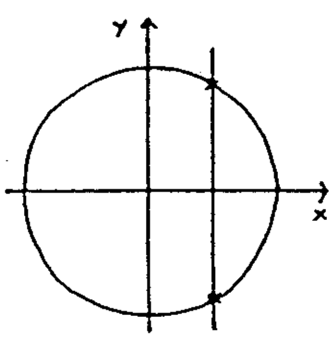
Exemple 2 Le graphe d'une fonction $f(x) = ax+b$ est la courbe d'équation $y = ax+b$; c'est donc la droite de pente a et passant par le point $A(0,b)$. C'est une droite horizontale ssi $a = 0$, i.e., ssi la fonction f est constante.

Exemple 3 Représenter le graphe des fonctions suivantes.
(a) $f(x) = 2x+1$
(b) $g(x) = |x-1|+|x-2|+|2x]$
(c) $h(x) = [x]$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x, i.e., le plus grand entier inférieur à x).

Test des verticales

Soit f une fonction et $a \in D_f$. Le seul point du graphe G_f d'abscisse a est le point de coordonnées $(a,f(a))$. Autrement dit, il ne peut y avoir deux points distincts de même abscisse sur le graphe d'une fonction. Cette propriété, qu'on appelle test des verticales et qui caractérise les graphes de fonctions, peut encore s'énoncer de la façon suivante:

PROPOSITION 2.2 *Une droite verticale ne peut couper le graphe d'une fonction qu'en au plus un point.*

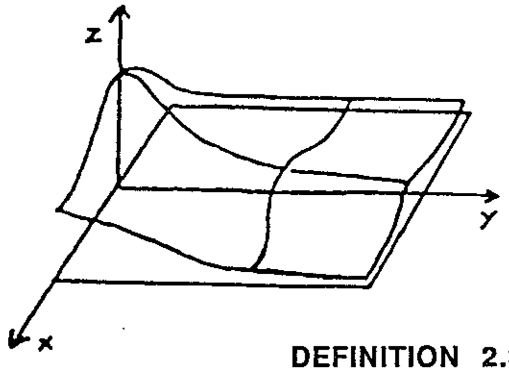


Ainsi, un cercle n'est pas le graphe d'une fonction car il ne satisfait pas le test des verticales. En conclusion, le graphe d'une fonction est une courbe plane, mais inversement, une courbe donnée n'est le graphe d'une fonction que si elle passe positivement le test des verticales.

Note. Une droite verticale $x = a$ peut ne couper le graphe d'une fonction en aucun point. En fait, c'est le cas ssi $a \notin D_f$. Par exemple, la droite $x = 0$ ne coupe pas le graphe de la fonction $x \to 1/x$.

2.2 Graphe d'une fonction de 2 variables.

On a également une représentation graphique intuitive de la fonction température $T(x,y)$ de l'exemple 3 du §1 (plaque métallique chauffée à l'origine). On a introduit ci-contre un troisième axe Oz; le graphe est alors l'ensemble de tous les



points de l'espace de coordonnées (x,y,T(x,y)). Le graphe ou surface représentative d'une fonction quelconque est défini de la même façon.

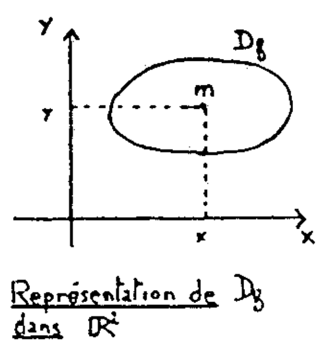
DEFINITION 2.3 *Soit* f *une fonction de 2 variables. On appelle graphe de* f, *l'ensemble* G_f *de tous les points du plan* R^3 *de coordonnées* (a,b,f(a,b)) *où le point* m(a,b) *varie dans* D_f ; *c'est-à-dire:*

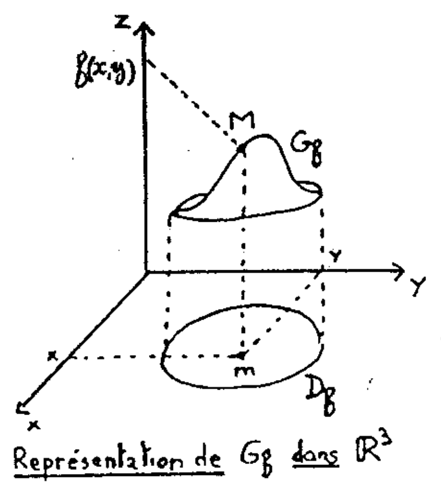
$$G_f = \{ M(a,b,f(a,b)) \mid m(a,b) \in D_f \}$$

Le graphe G_f *est une surface dans l'espace; elle est d'équation*

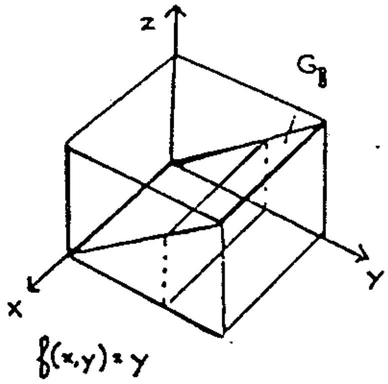
$$z = f(x,y) \text{ (avec } (x,y) \in D_f).$$

Pour une fonction de 2 variables, il convient donc de distinguer, d'une part, la représentation dans le plan R^2 de son domaine de définition, et d'autre part, la représentation dans l'espace R^3, de son graphe.





Dès que l'on dépasse 2 variables, il devient plus difficile de représenter graphiquement les fonctions. Le graphe d'une fonction de 3 variables, par exemple, est une variété géométrique de l'espace à 4 dimensions R^4.

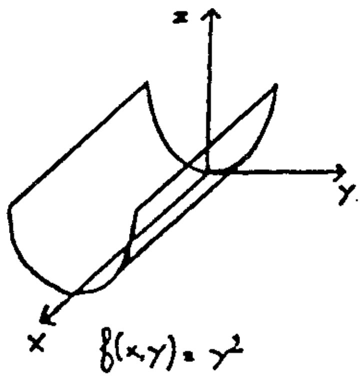


Exemple 4 Soit $f(x,y) = x^3-y^2$. Donner les coordonnées de plusieurs points sur le graphe G_f de f. Les points suivants sont-ils sur G_f: A(1,2,3), B(2,3,-1), C(4,8,0)?

Exemple 5 Le graphe G_f d'une fonction constante f(x,y) = c est le plan horizontal d'équation z = c.

Exemple 6 Le graphe G_f de la fonction f(x,y) = y est le plan d'équation z = y. Plus généralement, le graphe d'une fonction du type f(x,y) = ax+by+c est un plan, le plan d'équation z = ax+by+c.

Exemple 7 Soit $f(x,y) = x^2+y^2$. Son graphe G_f est le paraboloïde de révolution $z = x^2+y^2$.



Exemple 8 Soit $f(x,y) = y^2$. Les points d'abscisse $x = 0$ sur G_f sont les points de coordonnées $(0,y,y^2)$, i.e., les points de la parabole $z = y^2$ du plan vertical $x = 0$. La fonction ne dépendant pas de x, le même raisonnement vaut pour $x = a$ quelconque. C'est-à-dire: on obtient le graphe G_f en dessinant la parabole $z = y^2$ sur tous les plans verticaux $x = a$. D'où la figure ci-contre; la surface obtenue est un paraboloïde cylindrique.

Exemple 9 Le graphe G_f de la fonction $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ est d'équation

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ou de façon équivalente $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$

C'est donc la demi-sphère située dans le demi-espace supérieur $z \geq 0$.

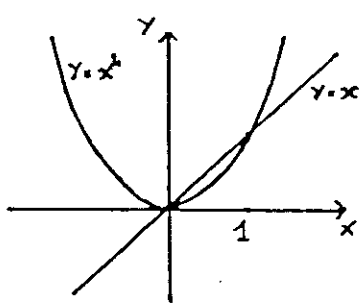
Test des verticales La sphère complète n'est pas le graphe d'une fonction de 2 variables. En effet, pour qu'une surface donnée soit le graphe d'une fonction de 2 variables, il faut et il suffit qu'elle satisfasse le test des verticales: si $m(a,b) \in D_f$, le seul point de G_f au dessus de m est le point $M(a,b,f(a,b))$. Autrement dit

PROPOSITION 2.4 *Toute droite verticale ne peut couper le graphe d'une fonction de deux variables qu'en au plus un point.*

2.3 Relation d'ordre et graphes.

Soient f et g deux fonctions de n variables. On peut les comparer: si E est contenu à la fois dans D_f et dans D_g, on dira que $f \geq g$ sur E si pour tout $(x_1,...,x_n)$ dans E, on a

$$f(x_1,...,x_n) \geq g(x_1,...,x_n).$$



Géométriquement, $f \geq g$ sur E signifie que E, le graphe G_f de f se situe au dessus du graphe G_g de g .

Exemple 10 Soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. On a $f \geq g$ sur $]-\infty,-1]$ et sur $[1,+\infty[$ mais $g \geq f$ sur $[-1,+1]$.

Exemple 11 Soient $f(x,y) = x^2+y^2$, $g(x,y) = 0$, $h(x,y) = 2xy$ et $k(x,y) = 2x$. Montrer que $f \geq g$ et $f \geq h$ sur $\mathbf{R}^2$. Déterminer les parties de $\mathbf{R}^2$ sur lesquelles $f \geq k$ et celles sur lesquelles $k \geq f$.

§3. PROPRIETES GEOMETRIQUES DES GRAPHES DE FONCTIONS.

3.1 Monotonie (une variable).

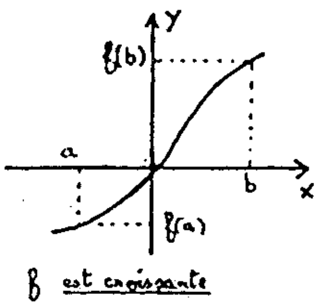
Une des premières choses que l'on peut dire de la courbe représentative d'une fonction d'une variable, c'est qu'elle "monte" ou/et qu'elle "descend". Cela renvoie à la notion de fonction monotone sur un intervalle.

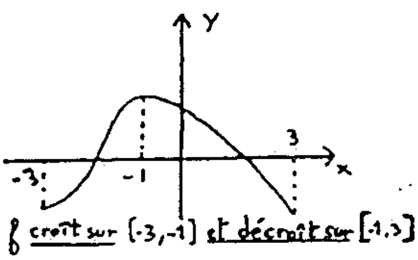
DEFINITION 3.1 *Une fonction* $x \to f(x)$ *est dite croissante (resp. décroissante) sur un intervalle* I *inclus dans* D_f *si pour tous* a *et* b *dans* I, *on a*

$$a \le b \Rightarrow f(a) \le f(b)$$

$$(\textit{resp. } a \le b \Rightarrow f(a) \ge f(b)).$$

On obtient la définition de "strictement croissante" (resp. "strictement décroissante") en remplaçant les inégalités par des inégalités strictes. La fonction f *est dite (strictement) monotone sur* I *si elle est soit (strictement) croissante soit (strictement) décroissante.*





Une fonction f étant donnée, le problème se pose alors de déterminer les intervalles où f est monotone. La théorie des fonctions dérivées conduit au résultat suivant.

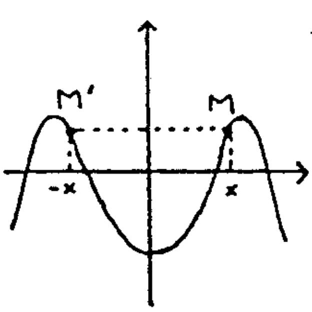
THEOREME 3.2 *Soit* f *une fonction dérivable. Alors* f *est croissante (resp. décroissante) sur les intervalles où la dérivée* f' *ne prend que des valeurs* ≥ 0 *(resp.* ≤ 0*).*

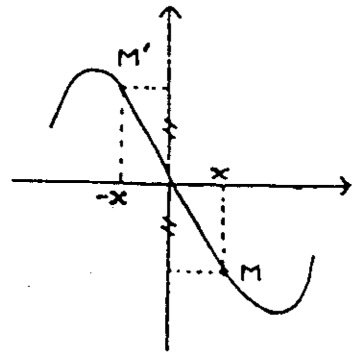
Le problème précédent est donc ramené à celui de déterminer le signe de f'.

Exemple 1 Soit $f(x) = x^2-x$; $f'(x) = 2x-1$. la fonction f est donc croissante sur $[1/2,+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty,1/2]$.

3.2 Propriétés de symétrie (une variable).

Soit f une fonction d'une variable. Dire que son graphe est symétrique par rapport à l'axe Oy, c'est dire que pour tout $x \in D_f$, les points du graphe G_f d'abscisse x et -x ont même ordonnée, i.e., que $f(x) = f(-x)$, pour tout $x \in D_f$. Une fonction qui a cette propriété est dite **paire**.





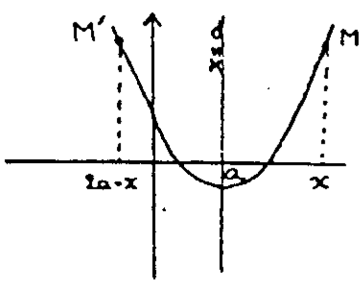
Exemple 2 $x \to x^2$, $x \to |x|$, $x \to \cos(x)$ sont des fonctions paires.

Dire que le graphe d'une fonction f est symétrique par rapport au point origine O, c'est dire que pour tout $x \in D_f$, les points du graphe G_f d'abscisse x et -x ont des ordonnées opposées (voir figure ci-contre), i.e., que $f(-x) = -f(x)$, pour tout $x \in D_f$. Une fonction qui a cette propriété est dite **impaire.**

Exemple 3 $x \to x$, $x \to x^3$, $x \to 1/x$, $x \to \sin(x)$ sont des fonctions impaires.

Exemple 4 Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires.

(a) $x \to \sin(x)/(x^3+x)$
(b) $x \to x^6+5x^4+3x^2+1$
(c) $x \to \sin(x^2)$
(d) $x \to (\sin(x))^2$
(e) $x \to (\sin(x)\cos(x))/(x|x|)$
(f) $x \to \sin(\sin(x))$



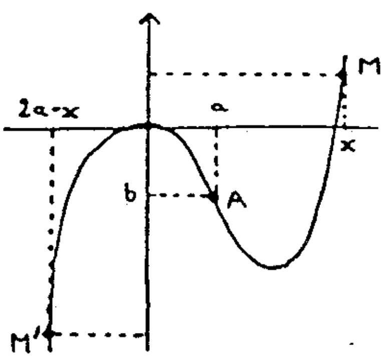
Exemple 5 Déterminer toutes les fonctions paires (resp. impaires) de la forme $x \to ax+b$.

Ces propriétés de symétrie se généralisent. La droite verticale x = a est **axe de symétrie** du graphe G_f ssi pour tout $x \in D_f$, on a

$$f(2a-x) = f(x)$$

Le point A(a,b) est **centre de symétrie** du graphe G_f ssi pour tout $x \in D_f$, on a

$$f(2a-x) = 2b-f(x)$$



On notera que si une telle propriété de symétrie a lieu, il suffit d'étudier f sur la moitié de son domaine, par exemple $[a,+\infty[$.

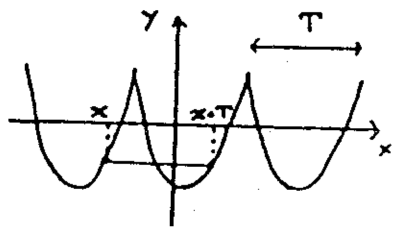
Exemple 6 Vérifier que la droite x = 1 est axe de symétrie de la fonction $f(x) = x^2-2x$.

Exemple 7 Vérifier que la droite x = 2 est axe de symétrie de la fonction $f(x) = |x-1|+|x-3|$. Montrer plus généralement que si g est une fonction quelconque, le graphe de la fonction $f(x) = g(x)+g(2a-x)$ admet la droite x = a comme axe de symétrie.

Exemple 8 Vérifier que le point A(1,-2) est centre de symétrie de la fonction définie par $f(x) = x^3-3x^2$. Même question avec A(3,2) et $f(x) = (2x-1)/(x-3)$.

Les formules de définition sont toujours faciles à vérifier quand on connait par avance l'axe ou le centre de symétrie. Mais ces formules sont à proscrire quand on cherche à déterminer s'il y a axe ou centre de symétrie. Il y a plusieurs exemples classiques à connaître: ainsi, les fonctions f: $x \to ax^2+bx+c$ (où $a \neq 0$) dont le graphe est une parabole, admettent pour axe de symétrie la droite verticale passant par l'extremum de f , i.e., la droite $x = -b/2a$ (Cf. Exemple 6); le graphe d'une homographie $f: x \to (ax+b)/(cx+d)$ est symétrique par rapport au point d'intersection $A(-d/c, a/c)$ des asymptotes (Cf. Exemple 8). Ces exemples seront revus au Ch.3.

3.3 Périodicité (une variable).



Soit $T \neq 0$ un nombre réel. Une fonction f est dite **périodique de période T** si pour tout $x \in D_f$, les points du graphe G_f d'abscisse x et x+T ont même ordonnée, i.e., si pour tout $x \in D_f$, on a

$$f(x+T) = f(x).$$

Le graphe G_f d'une fonction périodique de période T reste inchangé si on le translate de T unités le long de l'axe Ox.

Exemple 9 Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.

Exemple 10 Représenter les deux fonctions $x \to [x]$ et $x \to x-[x]$. Montrer que la seconde est périodique.

Si T est une période de f, 2T, 3T, -T et plus généralement nT pour $n \in \mathbf{Z}$ en sont d'autres. Mais il est avantageux d'en connaître une plus petite possible dans $\mathbf{R}^*_+$. On notera aussi qu'il suffit d'étudier une fonction périodique de période T sur n'importe quel intervalle de longueur T.

Exemple 11 Etudier la périodicité des fonctions suivantes (on cherchera une plus petite période possible dans $\mathbf{R}^*_+$

(a) $x \to \lvert\sin(x)\rvert$	(d) $x \to \sin(2x)+\sin(6x)$
(b) $x \to \sin(3x)$	(e) $x \to 2x-[2x]$
(c) $x \to \sin(2\pi x)$	(f) $x \to \cos(2x+3)$

3.4 Fonctions bornées.

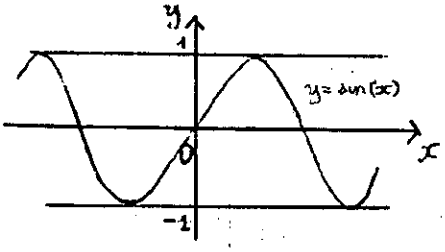
Une fonction $f(x_1,\ldots,x_n)$ est dite **majorée** (par un nombre réel M) sur un sous-ensemble E si toutes les valeurs prises par f sur E sont inférieures à M ; c'est-à-dire:

$$(\forall\ (x_1,\ldots,x_n) \in E)(f(x_1,\ldots,x_n) \leq M)$$

On obtient la définition de "**minorée**" en changeant le sens de la dernière inégalité. La fonction $f(x_1,\ldots,x_n)$ est dite **bornée** sur E si elle est à la fois majorée et minorée sur E; c'est-à-dire:

$$(\exists\ m,M \in \mathbf{R})(\forall\ (x_1,\ldots,x_n) \in E)(m \leq f(x_1,\ldots,x_n) \leq M)$$

Géométriquement, une fonction d'une variable f(x) est majorée (resp. minorée) sur E si son graphe reste au dessous (resp. au



dessus) d'une droite horizontale fixe sur E. Pour des fonctions de deux variables, il faut remplacer les droites horizontales par des plans horizontaux: par exemple, une fonction f(x,y) est bornée sur son domaine si son graphe est coincé entre deux plans horizontaux.

Exemple 12 Les fonctions sin et cos sont bornées sur **R**, supérieurement par +1 et inférieurement par -1.

Exemple 13 La fonction 1/x n'est ni majorée ni minorée sur **R** mais elle l'est par exemple sur l'intervalle [1,2]. La fonction de 2 variables $f(x,y) = \exp(-x^2-y^2)$ est bornée sur $\mathbf{R}^2$, par 0 et 1.

3.5 Fonctions homogènes (n variables).

DEFINITION 3.3 *Une fonction* $f(x_1,...,x_n)$ *est dite homogène de degré* $k \in \mathbf{R}$ *si pour tout* $(x_1,...,x_n) \in D_f$ *et tout nombre réel* $t > 0$ *, on a*

$$f(tx_1,...,tx_n) = t^k f(x_1,...,x_n)$$

k *s'appelle le degré d'homogénéité de* f .

Exemple 14 Montrer que les fonctions suivantes sont homogènes. Déterminer leur degré d'homogénéité.

(a) $x \to x^k$

(b) $(x,y) \to x^3+2y^3-3xy^2$

(c) $(x,y,z) \to (xy+yz+zx)/(x+y+z)$

(d) $(x,y) \to tg(y/x)$

(e) $(x,y) \to (x^3+2y^3)^{1/3}$

(f) $(x,y) \to x^{\alpha}y^{1-\alpha}$ ($\alpha \in]0,1[$).

Pour $t \in \mathbf{R}_+^*$, notons h_t l'homothétie centrée à l'origine et de rapport t. De façon précise, h_t est la transformation

$$M(x,y,z) \to M'(tx,ty,tz).$$

Les fonctions homogènes de degré 1 ont la propriété suivante.

THEOREME 3.4 *Le graphe d'une fonction* f(x,y) *homogène de degré* 1 *est invariant par toute homothétie* h_t.

Exemple 15 La fonction $f(x,y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha}$ est homogène de degré 1. Son graphe est un cône de Cobb-Douglas; il est invariant par toute homothétie.

Démonstration. Soit P(x,y,f(x,y)) un point quelconque du graphe G_f. Son image par h_t est le point P'(tx,ty,tf(x,y)). Il s'agit de voir que le point P' est encore un point du graphe, i.e., que ses coordonnées satisfont l'équation de G_f

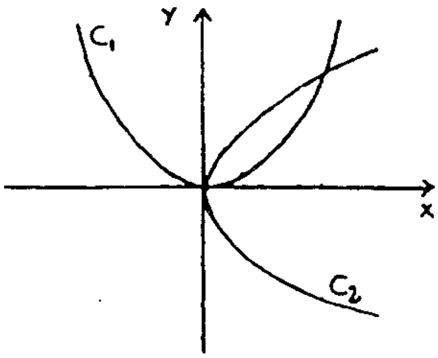
3ème coord.= f(1ère coord.,2ème coord.),

i.e., que $tf(x,y) = f(tx,ty)$.

Cette égalité traduit exactement l'homogénéité de degré 1 de f.

§4. FONCTIONS IMPLICITES.

4.1 Une variable



Exemple 1 Considérons la parabole verticale C_1 d'équation $3y-x^2 = 0$. La courbe C_1 est le graphe d'une fonction d'une variable: en effet, C_1 satisfait le test des verticales. Pour trouver de quelle fonction c'est le graphe, il suffit de résoudre en y l'équation $3y-x^2 = 0$. C_1 est le graphe de la fonction $y(x) = x^2/3$. On dit que l'équation $3y-x^2 = 0$ définit implicitement y en fonction de x (ou définit une fonction implicite y(x)).
A l'inverse, la parabole horizontale C_2 d'équation $3x-y^2 = 0$ n'est pas le graphe d'une fonction d'une variable: C_2 ne satisfait pas le test des verticales; on ne peut pas résoudre en y de façon unique l'équation $3x-y^2 = 0$; par exemple, pour x = 3, l'équation a les deux solutions 3 et -3. L'équation $3y-x^2 = 0$ ne définit pas implicitement y en fonction de x.

DEFINITION 4.1 *Une relation (ou équation)* $F(x,y) = 0$ *entre* x *et* y *définit implicitement* y *en fonction de* x *(ou définit une fonction implicite* y(x)) *si*

(*) *pour tout* $x \in \mathbf{R}$ *, l'équation* $F(x,y) = 0$ *a au plus une solution* y(x)

(en gros, si $F(x,y) = 0$ *se résout en y de façon unique).*

On se rappelera la motivation géométrique: la relation $F(x,y) = 0$ définit une fonction implicite y(x) ssi la courbe C d'équation $F(x,y) = 0$ satisfait le test des verticales. La courbe C est alors le graphe de la fonction y(x).

Exemple 2 Etudier si les relations suivantes définissent implicitement y en fonction de x.

(a) $2e^{3x^2y} - 5 = 0$ (c) $xy-x = y$
(b) $2e^{3y^2x} - 5 = 0$ (d) $x = |y|$

Si la relation $F(x,y) = 0$ se résout en x de façon unique, on dit que la relation $F(x,y) = 0$ définit implicitement x en fonction de y (ou définit une fonction implicite x(y)). On notera que si on laisse x en abscisse et y en ordonnée, la condition géométrique pour que $F(x,y) = 0$ définisse implicitement x(y) est cette fois **le test des horizontales:** aucune droite horizontale ne doit couper la courbe C d'équation $F(x,y) = 0$ en plus d'un point.

Exemple 3 Etudier si les relations suivantes définissent implicitement y(x) ou/et x(y).

(a) $x^2-y^2 = 1$ (c) $y^2-xy = 1$
(b) $\dfrac{2x+y}{xy^2} = 2$ (d) $\mathrm{Log}(x) = \dfrac{1-\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}$

Solution. (c) L'équation ne définit pas implicitement $y(x)$: en effet, pour $x = 0$, l'équation a deux solutions, 1 et -1. En revanche, l'équation définit implicitement $x(y)$: $x(y) = (y^2-1)/y$.

4.2 n variables.

De façon générale, on dit qu'une relation $F(x_1,...,x_n,x_{n+1}) = 0$ entre n+1 variables $x_1, ...,x_n,x_{n+1}$ définit implicitement x_{n+1} en fonction de $x_1,...,x_n$ (ou définit une fonction implicite $x_{n+1}(x_1,...,x_n)$) si

(**) pour tout $x_1,...,x_n$, l'équation $F(x_1,...,x_n,x_{n+1}) = 0$ a au plus une solution $x_{n+1}(x_1,...,x_n)$

(en gros, si l'équation $F(x_1,...,x_n,x_{n+1}) = 0$ se résout de façon unique en x_{n+1}).

Pour $n = 2$, on dispose, comme en §4.1, du test des verticales: la relation $F(x,y,z) = 0$ définit une fonction implicite $z(x,y)$ ssi la surface S d'équation $F(x,y,z) = 0$ satisfait le test des verticales. La surface S est alors le graphe de la fonction $z(x,y)$.

Exemple 4 Etudier si les relations suivantes définissent implicitement $z(x,y)$.

(a) $x+2y+3z = 1$	(d) $x^2+y^2+z^2= r^2$
(b) $z-x^2= y^2+1$	(e) $z^2-x^2-y^2 = 0$
(c) $\frac{x+3z}{2y+z} = xy^2$	(f) $e^{\lvert x\rvert\sqrt{z}/y^2} = 3$

§5. NOTION D'ANTECEDENT ET APPLICATIONS.

DEFINITION 5.1 *Soit* f *une fonction de* n *variables. Soit* c *un nombre réel. On dit qu'un point* $(x_1,...,x_n)$ *dans le domaine* D_f *est un antécédent de* c *par* f *si* $f(x_1,...,x_n) = c$.

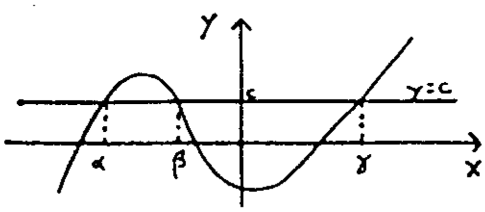
Exemple 1 Soit $f(x) = x+1$. Le nombre $c = 8$ a un unique antécédent: $x = 7$. Plus généralement, tout nombre réel y a pour unique antécédent $y-1$.

Exemple 2 Soit $f(x) = x^2$. Le nombre $c = 4$ a 2 antécédents: 2 et -2. Plus généralement, tout nombre réel $y > 0$ a 2 antécédents: $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$. Un nombre réel $y < 0$ n'a pas d'antécédent.

Exemple 3 Soit $f(x,y) = x^2+y^2$. Les antécédents de 1 par f sont les points (x,y) de $\mathbf{R}^2$ tels que nombre $x^2+y^2 = 1$; ce sont donc tous les points du cercle unité $C(O,1)$.

Note. L'ensemble des antécédents par f d'un nombre réel donné peut être vide, réduit à un point, à un nombre fini de points ou même infini.

5.1 Propriétés ensemblistes des fonctions d'une variable.



Géométriquement, on obtient les antécédents d'un nombre réel c par une fonction f d'une variable de la manière suivante: on trace la droite horizontale d'équation $y = c$; les antécédents de c par f sont les abscisses des points d'intersection de cette droite et du graphe G_f.

Injectivité

Une fonction f est dite **injective** si tout nombre réel c a **au plus un** antécédent par f. De façon équivalente, f est injective si on ne peut pas trouver deux nombres distincts x_1 et x_2 où f prenne la même valeur. On peut formaliser cette définition de plusieurs façons:

(i) $(\forall\, y \in \mathbf{R})$(L'équation $f(x) = y$ a au plus une solution $x \in D_f$)

(ii) $\nexists\ x_1, x_2 \in D_f \mid x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$

(iii) $(\forall\, x_1, x_2 \in D_f)\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

(iv $(\forall\, x_1, x_2 \in D_f)\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

Exemple 4 Les fonctions $x \to x^2$, $x \to |x|$, $x \to 0$ ne sont pas injectives. Dans chacun des cas, on a par exemple $f(2) = f(-2)$.

Exemple 5 La fonction $x \to ax+b$ est injective si $a \neq 0$. En effet, l'équation $y = ax+b$ a pour unique solution $x = (y-b)/a$.

Exemple 6 Montrer que la fonction $x \to (2x+1)/(x-1)$ est injective. Tout nombre réel admet-il un antécédent?

Exemple 7 Montrer qu'une fonction qui possède un axe de symétrie n'est pas injective. Idem pour les fonctions périodiques.

Dans la pratique, on utilise un des 2 critères suivants. Le premier, qui dérive de la définition (i), est celui utilisé dans les exemples 5 et 6.

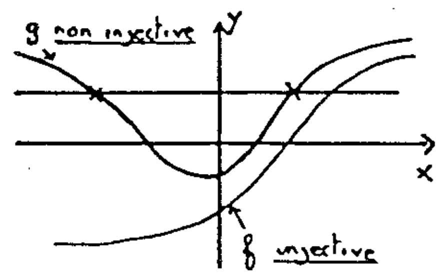
PROPOSITION 5.2 (Critère algébrique) f *est injective ssi l'équation* $f(x) = y$ (avec $x \in D_f$) *définit implicitement* x *en fonction de* y.

Exemple 8 : La fonction $x \to \dfrac{3e^x-1}{5e^x-2}$ est elle injective?

Le second est un critère géométrique; on l'appelle **test des horizontales pour l'injectivité:**

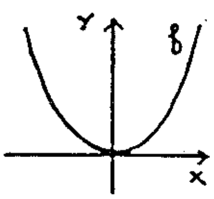
PROPOSITION 5.3 (Critère géométrique)

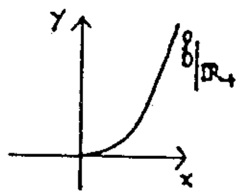
f est injective ssi toute droite horizontale ne coupe le graphe G_f qu'en au plus un point.



Généralisation

Soit I un sous-ensemble de D_f. La fonction $x \to f(x)$ avec la contrainte $(x \in I)$ est appelée **restriction de f à I** et notée $f|_I$. Son graphe est la partie du graphe G_f située "au dessus" de I. Une fonction f sera dite injective sur I si la restriction $f|_I$ est injective, c'est-à-dire si tout nombre réel c a au plus un antécédent par f **qui soit dans I.**





Exemple 9 La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas injective, mais les fonctions $f|_{R^+}$ et $f|_{R^-}$ le sont.

Ensemble image

L'ensemble image $f(D_f)$ d'une fonction f est l'ensemble de toutes les valeurs prises par f (Cf. §1.1). Notons que dire qu'un nombre réel c est une valeur de f revient à dire que c a **au moins un antécédent** par f. On déduit

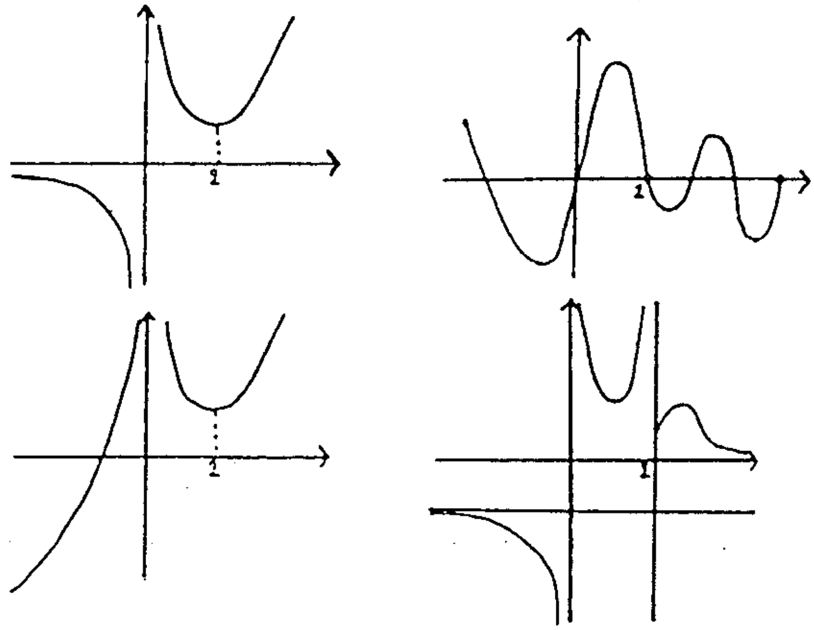
PROPOSITION 5.4

Un nombre réel c appartient à l'ensemble image $f(D_f)$ ssi la droite horizontale $y = c$ coupe le graphe G_f en au moins un point. L'ensemble image $f(D_f)$ de f est donc l'ensemble des nombres réels c tels que la droite horizontale $y = c$ coupe le graphe G_f en au moins un point.

Méthode des horizontales

De façon pratique, on détermine l'ensemble image $f(D_f)$ à partir du graphe de f de la façon suivante: on fait glisser une droite horizontale $y = c$ le long de Oy; $f(D_f)$ est l'ensemble des "niveaux" c où cette droite coupe le graphe.

Exemple 10 Déterminer les ensembles image des fonctions définies par les graphes ci-dessous. Sont-elles injectives?



On peut également trouver algébriquement l'ensemble image d'une fonction: on résout en x l'équation $y = f(x)$; l'ensemble image est alors l'ensemble de tous les nombres réels y pour lesquels cette équation a au moins une solution.

Exemple 11 Déterminer algébriquement les ensembles image des fonctions suivantes

(a) $x \to 1/x$ (b) $x \to (2x+1)/(x-1)$

(c) $x \to -x^2+2x-3$ (d) $x \to \exp\left(\dfrac{\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x}}\right)$.

Solution. (c) L'équation $-x^2+2x-3 = y$ a au moins une solution ssi le discriminant du trinôme $x^2-2x+(3+y) = 0$ est ≥ 0, i.e., ssi $-2-y \geq 0$. L'ensemble image est donc $]-\infty,-2]$.

Il est cependant beaucoup plus aisé d'utiliser la Proposition 5.4 plutôt que la méthode algébrique. C'est une des raisons pour lesquelles il est important de savoir tracer le graphe d'une fonction.

Généralisation Soit I un sous-ensemble de D_f. L'ensemble f(I) image de I par f est l'ensemble image de la restriction $f|_I$. C'est donc l'ensemble de tous les nombres réels c tels que la droite horizontale $y = c$ coupe le graphe G_f en au moins un point d'abscisse dans I.

Exemple 12 Déterminer les ensembles f(I) des fonctions de l'exemple 10 pour $I = \mathbf{R}_+$, $I = \mathbf{R}_-$, $I = [2,+\infty[$, $I =]2,+\infty[$.

Surjectivité Une fonction f est dite surjective sur I si l'ensemble f(I) est **R** tout entier (on dit seulement "surjective" quand $I = D_f$). La fonction f est surjective sur I si tout nombre réel c s'écrit $c = f(x)$ avec $x \in$ **I**, ou encore si toute droite horizontale coupe le graphe G_f en au moins un point d'abscisse dans I.

Exemple 13 La fonction $x \to x^3$ est surjective (sur **R**) mais pas sur R_+.

Réciproque d'une <u>injection</u>

Soit f une injection, i.e., une fonction injective. Soit y un nombre réel dans l'ensemble image $f(D_f)$ de f; y a **au moins un** antécédent par f par définition de l'ensemble image et en a **au plus un** car f est injective. Par conséquent, y a **exactement un** antécédent par f; cet antécédent est x(y), l'unique solution de l'équation $f(x) = y$. La correspondance

$$y \to x(y) \quad (y \in f(D_f))$$

définit donc une fonction, appelée **réciproque de f** et notée f^{-1}.

Le domaine de définition de la réciproque f^{-1} est l'ensemble image de f, son ensemble image est le domaine de f et la valeur de f^{-1} en y est l'unique antécédent de y par f. On a donc, pour f injective:

$$\begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(D_f) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x \in D_f \end{cases}$$

De façon pratique, on détermine la réciproque d'une fonction en résolvant l'équation $f(x) = y$. **Si cette équation définit implicitement x(y)**, la fonction f est injective. Sa réciproque est la fonction définie sur l'ensemble $f(D_f)$ (qu'on détermine par les méthodes expliquées plus haut) par $f^{-1}(y) = x(y)$.

Exemple 14 Vérifier que la fonction $f(x) = (2x+1)/(x-1)$ est injective et déterminer sa réciproque.

Solution. On sait (Cf. Exemple 6) que l'équation $y = (2x+1)/(x-1)$ se résout de façon unique en $x(y) = (y+1)/(y-2)$; f est donc injective. L'ensemble image de f est **R**\{2} (Cf. Exemple 11). La réciproque de f est la fonction

$$y \to (y+1)/(y-2) \quad (y \neq 2)$$

qu'on peut noter aussi

$$x \to (x+1)/(x-2) \quad (x \neq 2)$$

(x et y sont des lettres muettes).

Exemple 15 Vérifier que la fonction $f(x) = \sqrt{x-1}$ est injective et déterminer sa réciproque.

Solution. L'équation $y = \sqrt{x-1}$ se résout de façon unique en $x(y) = y^2+1$; f est donc injective. L'ensemble image de f est R_+. La réciproque de f est la fonction

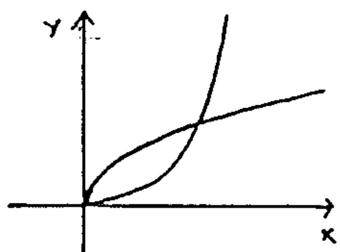
$$y \to y^2+1 \quad (y \geq 0)$$

Attention! La fonction $y \to y^2+1$ est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier mais ce n'est pas la réciproque de f.

Exemple 16 Soit $f(x) = x^2$. Les fonctions $f|_{\mathbf{R}_+}$ et $f|_{\mathbf{R}_-}$ sont injectives. Déterminer leur réciproque.

Graphe de la réciproque

Soit f une injection. Dans le plan Oxy, le graphe de la réciproque $f^{-1}: x \to f^{-1}(x)$ est la courbe plane d'équation $y = f^{-1}(x)$ ou, de façon équivalente $x = f(y)$. Le graphe de la réciproque f^{-1} se déduit donc du graphe G_f de f en échangeant x et y, i.e., par une symétrie par rapport à la première diagonale $y = x$.



Les fonctions x^2 restreinte à $\mathbb{R}_+$ et $\sqrt{x}$

Exemple 17 Tracer le graphe des fonctions
(a) $x \to (2x+1)/(x-2)$ (b) $x \to \sqrt{x-1}$
(utiliser les exemples 14 et 15).

Exemple 18 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la fonction $f(x) = ax+b$ soit égale à sa réciproque.

Bijection

Par une injection f, les éléments du domaine D_f et ceux de l'ensemble image $f(D_f)$ se correspondent de façon biunivoque. On dit que f est une bijection de D_f sur $f(D_f)$. On notera qu'alors, la réciproque est également une bijection, de $f(D_f)$ sur D_f.

5.2 Courbes de niveau des fonctions de 2 variables.

DEFINITION 5.5 *Soient* f *une fonction de* 2 *variables et* $c \in \mathbf{R}$. *On appelle courbe (ou ligne) de niveau* c *de* f *l'ensemble des antécédents de* c *par* f. *On la note* l_f^c ; *c'est une courbe plane, d'équation* $f(x,y) = c$.

Lignes de niveau et sections

On appelle **section** d'un objet dans $\mathbf{R}^3$ toute intersection de cet objet avec un plan. Par exemple, les sections d'une sphère sont des cercles; les sections d'une boule sont des disques; les sections d'un cône sont des coniques (i.e., des ellipses, des hyperboles ou des paraboles); les sections horizontales d'une sphère sont des cercles concentriques.

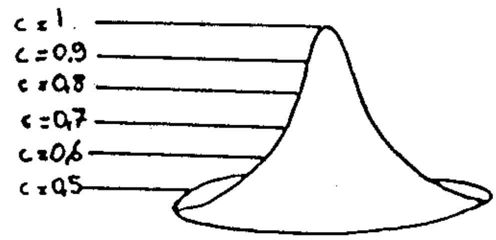
Soit f(x,y) une fonction. La section de son graphe G_f par le plan horizontal $z = c$ est la courbe de l'espace $\mathbf{R}^3$ d'équation

$$\begin{cases} f(x,y) = z \\ z = c \end{cases} \quad \text{ou, de façon équivalente} \quad \begin{cases} f(x,y) = c \\ z = c \end{cases}$$

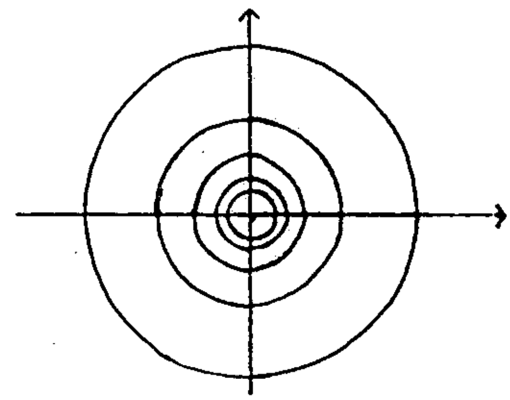
Autrement dit, c'est la courbe du plan horizontal $z = c$ d'équation $f(x,y) = c$. Projetons cette courbe dans le plan Oxy, identifié au plan R^2. On obtient une courbe plane, d'équation $f(x,y) = c$, soit la ligne de niveau c de f. D'où le résultat suivant.

PROPOSITION 5.6 *La ligne de niveau* c *de* f *s'obtient en projetant sur le plan* Oxy *la courbe section du graphe* G_f *par le plan horizontal* $z = c$.

La représentation sur un même graphique des courbes de niveau c, pour des niveaux c choisis à intervalles réguliers donne une idée assez précise du relief de la surface représentative.



Graphe de $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

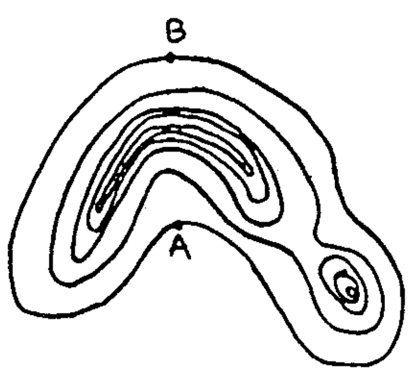


Lignes de niveau de f

Les courbes de niveau sont utilisées sur les cartes géographiques pour rendre compte du relief ou, en météorologie, de la température (les lignes de niveau s'appellent alors les **isothermes**) ou encore de la pression (les lignes de niveau s'appellent alors les **isobares**). On les utilise aussi en Economie:

• En théorie de la production: Si $Q = f(K,L)$ est une fonction de production, la courbe de niveau Q_0 est l'ensemble des combinaisons possibles de capital K et de travail L permettant de produire Q_0. On l'appelle **isoquant** de niveau Q_0.

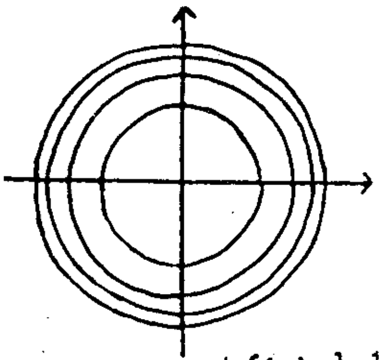
• En théorie de la consommation: Si $U = U(x,y)$ est la fonction d'utilité d'un consommateur, la courbe de niveau U_0 est appelée **courbe d'indifférence** de niveau U_0 du consommateur.



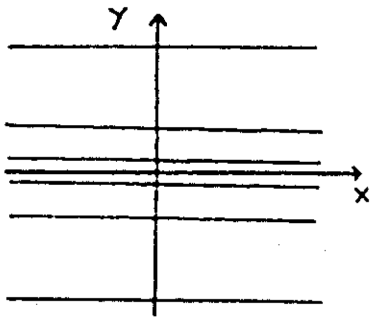
Exemple 19 Par où passer pour aller de A à B sur la figure ci-contre?

Exemple 20 Déterminer les courbes de niveau des fonctions suivantes:

(a)	$(x,y) \to y$	(e)	$(x,y) \to \sqrt{xy}$
(b)	$(x,y) \to y^2$	(f)	$(x,y) \to 2x^2+3y^2$
(c)	$(x,y) \to x^2+y^2$	(g)	$(x,y) \to y^2-x^2$



Lignes de niveau de $f(x,y)=x^2+y^2$



Lignes de niveau de $f(x,y)=y^2$

(d) $(x,y) \to x-y^2$ (h) $(x,y) \to xy+x+y$

Rép. (a) droites horizontales (b) couples de droites horizontales symétriques par rapport à Ox (ou ø) (c) cercles concentriques (ou ø) (d) paraboles d'axe horizontal (e) hyperboles équilatères (ou ø) (f) ellipses (ou ø) (g) hyperboles (h) hyperboles.

Exemple 21 Soit $f(x,y) = (x^4+y^4)/(8-x^2y^2)$. Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition D_f ainsi que I_f^2 la courbe de niveau 2.

Remarque. Une courbe de niveau est toujours incluse dans le domaine de définition de la fonction; cela résulte de la définition. Et deux courbes de niveaux distincts c_1 et c_2 sont nécessairement disjointes (en effet, un point $m(x,y)$ de l'intersection devrait vérifier à la fois $f(x,y) = c_1$ et $f(x,y) = c_2$).

Pour avoir une meilleure représentation du graphe G_f d'une fonction f, on peut, en plus des lignes de niveau, regarder quelques sections verticales. Par exemple, les sections de G_f par les plans Oxz et Oyz sont, à l'intérieur de ces plans, les courbes d'équation respectives $f(x,0) = z$ et $f(0,y) = z$.

Exemple 22 En utilisant cette méthode, tracer le graphe des fonctions $f(x,y) = x^2+y^2$ et $g(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2}$.

Graphes de révolution Le graphe G_f d'une fonction f est dit de révolution (autour de l'axe Oz) si les lignes de niveau sont soit vides soit des cercles centrés à l'origine O. Tous les graphes de révolution sont des cas particuliers du modèle suivant.

Soit φ une fonction **d'une variable** définie sur $\mathbf{R}_+$. Posons

$$f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Alors le graphe G_f de f est un graphe de révolution; il s'obtient en faisant tourner autour de l'axe Oz le graphe de la fonction $\varphi(y)$ dessiné dans le plan Oyz.

Exemple 23 Identifier la fonction φ pour les fonctions f et g de l'exemple 22.

§6. FONCTIONS PARTIELLES.

6.1 Définitions et notation.

Quand on fixe (i.e., quand on donne une valeur à) n-1 variables dans une fonction de n variables, on obtient une fonction d'une variable. De façon précise, si $f(x_1,\dots,x_n)$ est une fonction de n variables et $m_o = (a_1,\dots,a_n) \in D_f$, on note

$$f(a_1,\dots,a_{i-1},\bullet,a_{i+1},\dots,a_n)$$

la fonction obtenue en substituant a_j à x_j pour tout $j \neq i$ dans $f(x_1,...,x_n)$, c'est-à-dire la fonction:

$$x_i \rightarrow f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n).$$

Les n fonctions $f(a_1,...,a_{i-1},\cdot,a_{i+1},...,a_n)$, $i = 1,...,n$, associées au point $m_o = (a_1,...,a_n) \in D_f$ sont appelées fonctions partielles de f au point m_o.

Exemple 1 Soit $f(x,y,z) = xyz+yz+z$. Les 3 fonctions partielles de f au point $m_o(-1,1,3)$ sont les fonctions

$f(\cdot,1,3)$: $x \rightarrow 3x+6$

$f(-1,\cdot,3)$: $y \rightarrow 3$

$f(-1,1,\cdot)$: $z \rightarrow z$

6.2 Etude d'un exemple.

Reconsidérons l'exemple de la plaque métallique chauffée à l'origine (Cf. §1. Ex.3). La température d'un point de l'axe Oy d'équation $x = 0$ ne dépend que de de son ordonnée y; la fonction qui donne la température des points de l'axe $x = 0$ est la fonction partielle

$$T(0,\cdot): y \rightarrow T(0,y)$$

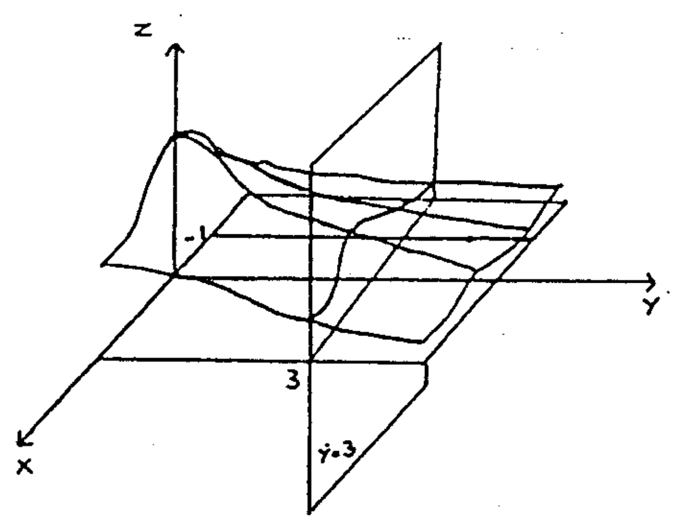
De façon plus générale, la température des points de la droite d'équation $x = x_o$ est donnée par la fonction partielle

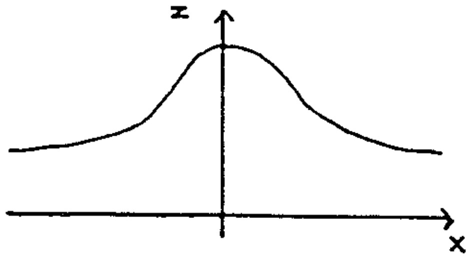
$$T(x_o,\cdot): y \rightarrow T(x_o,y)$$

et la température des points de la droite $y = y_o$ est donnée par la fonction partielle

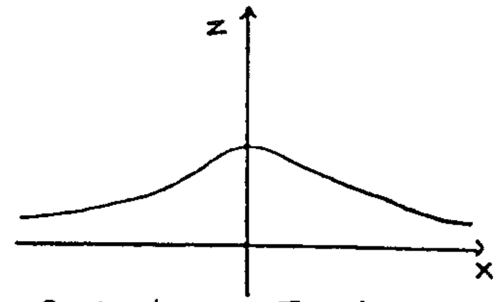
$$T(\cdot,y_o): x \rightarrow T(x,y_o)$$

Les graphes de ces fonctions sont visibles sur le graphe de T:

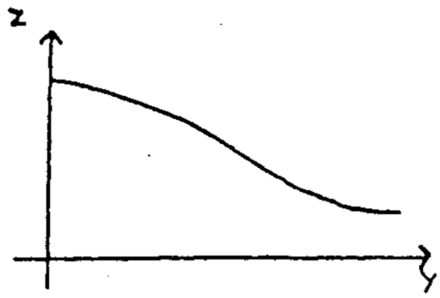




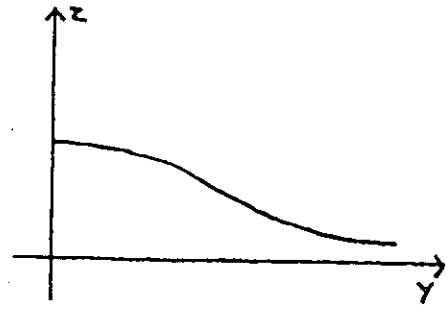
Graphe de $x \mapsto T(x,0)$
(Section de G_T par $y=0$)



Graphe de $x \mapsto T(x,3)$
(Section de G_T par $y=3$)



Graphe de $y \mapsto T(0,y)$
(Section de G_T par $x=0$)



Graphe de $y \mapsto T(-1,y)$
(Section de G_T par $x=-1$)

• Le graphe de la fonction partielle $T(x_0,y)$ est la section du graphe G_T de la fonction $T(x,y)$ par le plan vertical d'équation $x = x_0$.

• Le graphe de la fonction partielle $T(x,y_0)$ est la section du graphe G_T de la fonction $T(x,y)$ par le plan vertical d'équation $y = y_0$.

Ces résultats sont valables pour n'importe quelle fonction $f(x,y)$ de 2 variables.

Les fonctions partielles décrivent comment varie une quantité dépendant de n variables quand toutes les variables sauf une sont fixées . Prenons par exemple la fonction de Cobb-Douglas avec $\alpha = 1/2$ (Cf. §1 Exemple 4): $Q(K,L) = \gamma\sqrt{K}\sqrt{L}$. Fixons $K = K_0$; alors $Q(K_0,L) = \delta \sqrt{L}$ où $\delta = \gamma\sqrt{K_0}$. On voit que $Q(K_0,L)$ croît comme $\sqrt{L}$, en particulier moins vite que L: à capital constant, doubler la main d'oeuvre n'a pas pour effet de doubler la production. Nous reviendrons sur cela de façon beaucoup plus précise au moment de l'étude des dérivées partielles.

CHAPITRE 3

FONCTIONS USUELLES

§1. FONCTIONS POLYNOMES.

Les fonctions polynômes sont les fonctions du type

$$f: x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_o$$

où $a_o, a_1, \dots, a_n$ sont n+1 nombres réels donnés et n un entier positif. Elles sont définies sur **R**; ce sont des fonctions paires si ne figurent que des exposants pairs et impaires si ne figurent que des exposants impairs. On appelle **degré** de f le plus grand des exposants de x qui apparaissent dans l'écriture de f avec un coefficient non nul; avec les notations ci-dessus, deg(f) = n si $a_n \neq 0$.

Exemple 1 (a) $f(x) = x^5-2x^3+2x^2-1$ est un polynôme de degré 5, ni pair ni impair.
(b) $g(x) = x^3-2x$ est de degré 3; g est impair.
(c) $h(x) = x^4+x^2+1$ de degré 4; h est pair.

Généralisation. On appelle monôme en n variables toute expression de la forme

(*) $a x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ où $a \in \mathbf{R}^*$ et $i_1,\dots,i_n$ sont des entiers positifs ou nuls,

c'est-à-dire, tout produit de puissances entières des indéterminées multiplié par un nombre réel non nul. Le degré du monôme est l'entier $i_1+\dots+i_n$. On appelle fonction polynôme en n variables toute somme de plusieurs monômes. Son degré est défini comme le plus grand degré des monômes qui le composent.

Exemple 2 (a) $f(x,y) = x^4y^2+2x^3y-5xy^2-xy+9$ est un polynôme en 2 variables de degré 6.
(b) $f(x,y,z,t) = xy+xz+xt+yz+yt+zt$ est un polynôme en 4 variables de degré 2.

Nous allons ici étudier plus précisément les polynômes en une variable de degré 1, 2 et 3.

1.1 Fonctions affines (degré ≤ 1).

Elles sont du type

$$x \to f(x) = ax+b.$$

Le graphe de f est la droite du plan d'équation $y = ax+b$. La fonction f est croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$ et constante si $a = 0$. Si $a \neq 0$, la fonction f est injective et son ensemble image est R tout entier (Test des horizontales). La réciproque de f est alors la fonction

$$f^{-1} : x \to \frac{x-b}{a} ;$$

c'est aussi une fonction affine.

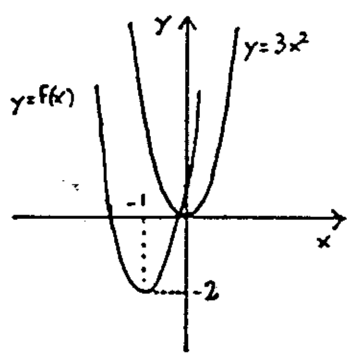
1.2 Fonctions trinômes (degré 2).

Elles sont du type

$$x \to f(x) = ax^2+bx+c \text{ (où } a \neq 0).$$

Le graphe de f est la courbe plane d'équation $y = ax^2+bx+c$.

Forme canonique d'un trinôme



Exemple 3 Soit $f(x) = 3x^2+6x+1$. On peut écrire:

$$\begin{aligned} 3x^2+6x+1 &= 3(x^2+2x) + 1 \\ &= 3[(x+1)^2-1] +1 \\ &= 3(x+1)^2 - 2 \end{aligned}$$

Cette dernière expression est appelée forme canonique du trinôme $3x^2+6x+1$. L'équation du graphe se met sous la forme

$$y+2 = 3(x+1)^2$$

Le graphe se déduit donc de la parabole $y = 3x^2$ par la translation de vecteur $\vec{u} = (-1,-2)$.

La même procédure conduit à l'expression générale de la forme canonique d'un trinôme:

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

L'équation du graphe du trinôme $f(x) = ax^2+bx+c$ se met donc sous la forme

$$y-\beta = a(x-\alpha)^2 \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} \alpha = -b/2a \\ \beta = c - b^2/4a \end{cases}$$

On conclut que le graphe d'un trinôme est une parabole verticale, de façon précise, la parabole qui se déduit de la parabole $y = ax^2$ par la translation de vecteur $\vec{u} = (\alpha,\beta)$.

Exemple 4 Vérifier que la droite $x = -b/2a$ est axe de symétrie du trinôme $f(x) = ax^2+bx+c$ (utiliser la forme canonique).

Méthode pratique

Dans la pratique, on utilise rarement la forme canonique pour tracer le graphe d'un trinôme. On procède plutôt comme suit:

• On détermine l'axe de symétrie $x = \alpha$ en résolvant l'équation $f'(x) = 0$: α est l'unique solution de cette équation.

• L'extremum de la parabole est le point de coordonnées $(\alpha, f(\alpha))$.

• Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut et l'extremum est un minimum. Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas et l'extremum est un maximum.

Un trinôme n'est jamais injectif et son ensemble image est l'ensemble

$$f(R) = \begin{cases} [f(\alpha), +\infty[\text{ si } a > 0 \\ ]-\infty, f(\alpha)] \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

L'équation du second degré

Pour trouver les points d'intersection du graphe G_f avec l'axe Ox, on est amené à résoudre l'équation du second degré $ax^2+bx+c = 0$. Quand il n'y a pas de racine évidente, on utilise la règle suivante bien connue:

On calcule le discriminant $\Delta = b^2-4ac$.

• Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racines.

• Si $\Delta = 0$, il y a une racine dite double $x = -b/2a$

• Si $\Delta > 0$, il y a 2 racines distinctes:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple 5 Etudier les trinômes suivants.
(a) $f(x) = 3x^2+6x+1$ (b) $g(x) = -x^2+x+2$.

Exemple 6 Soient les deux points A(-2,1) et B(6,1). Tracer plusieurs paraboles passant par A et B. Montrer de façon générale que l'équation d'une parabole verticale passant par A et B peut se mettre sous la forme $y = aP_0(x) + 1$ où $P_0(x)$ est un trinôme que l'on déterminera et a est un réel quelconque. Donner les coordonnées du point extrémal. Soit C(4,5) un troisième point. Donner l'équation de la parabole passant par A, B et C et la représenter graphiquement.

Rép. $P_0(x) = (x+2)(x-6) = x^2-4x-12$; point extrémal $(2,-16a)$; la parabole passant par A, B et C est d'équation $y = -P_0(x)/3 + 1$.

1.3 Cubiques (degré 3).

Les fonctions cubiques sont du type

$$x \to f(x) = ax^3+bx^2+cx+d \quad (\text{où } a \neq 0).$$

Le graphe de f est la courbe plane d'équation $y = ax^3+bx^2+cx+d$

Exemple 7 Soit $f(x) = 2x^3-6x^2+7x-2$. En utilisant l'identité remarquable du cube

$$\begin{cases} (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{cases}$$

on peut écrire:

$$\begin{aligned} 2x^3-6x^2+7x-2 &= 2(x^3-3x^2) + 7x - 2 \\ &= 2[(x-1)^3-3x+1] + 7x - 2 \\ &= 3(x-1)^2 + x \\ &= 3(x-1)^2 + (x-1) + 1 \end{aligned}$$

Cette dernière expression est appelée forme canonique de la cubique $f(x) = 2x^3-6x^2+7x-2$. L'équation du graphe se met sous la forme

$$y-1 = 3(x-1)^3 + (x-1)$$

Le graphe G_f de f de déduit donc de la courbe $y = 3x^3+x$ (qui est plus simple) par la translation de vecteur $\vec{u} = (1,1)$.

Cette procédure de mise sous forme canonique se généralise et permet de montrer que toute cubique se déduit par translation d'une cubique "simple" $y = \alpha x^3+\beta x$.

Exemple 8 Déterminer la forme canonique des cubiques suivantes.
(a) $f(x) = x^3+6x^2+9x$ (b) $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$.

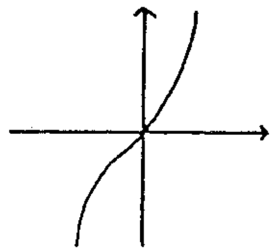
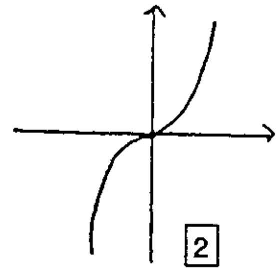
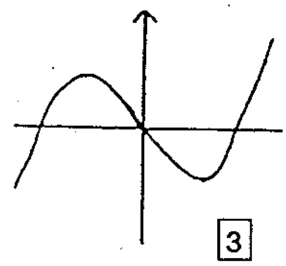
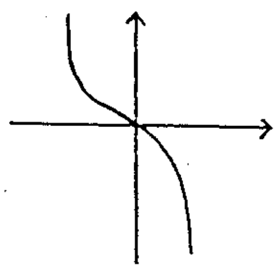
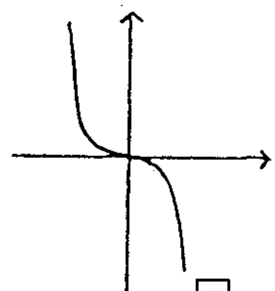
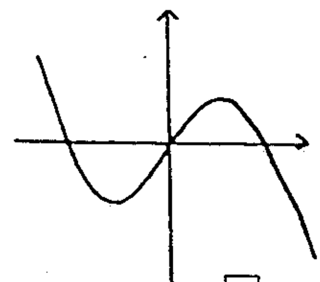
L'intérêt de la forme canonique est théorique: étant donnée une propriété géométrique, pour démontrer que les cubiques en général ont cette propriété, il suffit de le démontrer pour les cubiques "simples" $y = \alpha x^3+\beta x$, ce qui est plus facile. C'est ainsi que l'on démontre le résultat suivant.

THEOREME 1.1 *Toute cubique possède un centre de symétrie* $I(\alpha, f(\alpha))$. *L'abscisse* α *de* I *est l'unique racine de l'équation* $f''(x) = 0$. *En particulier, le centre de symétrie est également l'unique point d'inflexion de la cubique.*

Preuve. Il suffit de le démontrer pour une cubique du type $y = \alpha x^3+\beta x$. Mais alors c'est évident: en effet, la fonction $x \to \alpha x^3+\beta x$ est impaire et admet donc l'origine comme centre de symétrie; $(\alpha x^3+\beta x)'' = 6\alpha x$ a pour unique racine $x = 0$; enfin, il est classique (cela sera revu (Cf. Ch7 §2.3)) que si f'' s'annule en changeant de signe en x, le point correspondant du graphe $M(x,f(x))$ est un point d'inflexion.

Dans la pratique, la forme canonique des cubiques est d'un intérêt limité. Pour étudier une cubique donnée, on préfère utiliser la dérivée de f, qui donne directement les variations de f (Cf. Ch.2 Th.3.2) et l'allure de son graphe. La dérivée de $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ est le trinôme $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$; notons Δ son discriminant.

Six cas se présentent.

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$	$f'(x) > 0$ donc f est croissante  $\boxed{1}$	$f'(x)$ s'annule sans changer de signe ($f'(x) \geq 0$). Donc f croissante avec un pt à tangente // Ox  $\boxed{2}$	$f'(x)$ a 2 racines, donc 2 extrema. $f'(x) \geq 0$ à l'ext. des racines, $f'(x) \leq 0$ à l'int. des racines.  $\boxed{3}$
$a < 0$	$f'(x) < 0$ donc f est décroissante  $\boxed{4}$	$f'(x)$ s'annule sans changer de signe ($f'(x) \leq 0$). Donc f décroissante avec un pt à tangente // Ox.  $\boxed{5}$	$f'(x)$ a 2 racines, donc 2 extrema. $f'(x) \leq 0$ à l'ext. des racines, $f'(x) \geq 0$ à l'int. des racines.  $\boxed{6}$

On retiendra la procédure suivante, qui permet une étude rapide d'une cubique donnée $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$.

- On calcule les dérivées premières et secondes $f'(x)$ et $f''(x)$ de f.
- On résout l'équation $f'(x) = 0$

2 racines distinctes $\rightarrow$ configuration $\boxed{3}$ ou $\boxed{6}$ selon que $a > 0$ ou $a < 0$.
1 racines double $\rightarrow$ configuration $\boxed{2}$ ou $\boxed{5}$ selon que $a > 0$ ou $a < 0$.
Pas de racine $\rightarrow$ configuration $\boxed{1}$ ou $\boxed{4}$ selon que $a > 0$ ou $a < 0$.

- Le centre de symétrie est le point $I(\alpha, f(\alpha))$ où α est l'unique racine de l'équation $f''(x) = 0$; c'est aussi le point d'inflexion.
- Dans les cas de figure $\boxed{3}$ et $\boxed{6}$, les extrema de f sont les points $A_1(x_1,f(x_1))$ et $A_2(x_2,f(x_2))$ où x_1 et x_2 sont les deux racines de $f'(x) = 0$.

Note. Les extrema A_1 et A_2 ont pour milieu le centre de symétrie I de la cubique.

Exemple 9 Démontrer la note ci-dessus (procéder comme pour le Th.1.1).

Exemple 10 Tracer les cubiques suivantes.
(a) $y = 2x^3-6x^2+7x-2$ (b) $y = x^3+6x^2+9x$.

Enfin, le test des horizontales montre qu'une cubique est injective sauf dans les cas $\boxed{3}$ et $\boxed{6}$ et que son ensemble image f(**R**) est toujours **R** tout entier (une cubique est toujours surjective).

Exemple 11 L'équation $y = 2x^3-6x^2+7x$ définit-elle implicitement x en fonction de y? Peut-on expliciter x(y)? Montrer que la fonction $f(x) = 2x^3-6x^2+7x-2$ admet une réciproque f^{-1}; tracer son graphe et prouver qu'il admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.

Solution. On vérifie que $y = 2x^3-6x^2+7x$ est l'équation d'une cubique C de type $\boxed{1}$. Le test des horizontales montre alors que cette équation définit implicitement x(y). La fonction f est donc injective et admet une réciproque f^{-1} dont le graphe s'obtient à partir de C par symétrie par rapport à la première bissectrice. La cubique C a pour centre de symétrie le point I(1,3) et le graphe $G_{f^{-1}}$ le point symétrique I'(3,1). Il faut remarquer qu'on a obtenu toutes ces conclusions sans expliciter x(y). Expliciter x(y) revient à résoudre une équation du 3ème degré.

§2. FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES.

Les fonctions homographiques sont les fonctions du type

$$f: x \to \frac{ax+b}{cx+d}$$

On supposera que $\begin{cases} c \neq 0 \\ ad-bc \neq 0 \end{cases}$

[quand c = 0, on obtient une fonction affine; et le cas ad-bc = 0 est peu intéressant puisque l'expression (ax+b)/(cx+d) se simplifie pour devenir constante. Ainsi (2x+2)/(x+1) = 2].

Sous ces conditions, l'homographie f est définie sur $D_f = \mathbf{R}\setminus\{-d/c\}$.

Exemple 1 $x \to \frac{x+1}{x-1}$, $x \to 1/x$, $x \to 1 + 1/x$ sont des homographies.

Forme canonique

Exemple 2 Soit $f(x) = \frac{-3x+8}{2x-5}$. On peut écrire:

$$\begin{aligned}\frac{-3x+8}{2x-5} &= \frac{-3/2(2x-5)-15/2+8}{2x-5}\\ &= \frac{-3}{2} + \frac{1/2}{2x-5}\\ &= \frac{-3}{2} + \frac{1/4}{x-5/2}\end{aligned}$$

Cette dernière expression est appelée forme canonique de l'homographie. L'équation du graphe se met sous la forme

$$y+\frac{3}{2}=\frac{1/4}{x-5/2}$$

Le graphe se déduit donc de l'hyperbole équilatère $y=\frac{1/4}{x}$ par la translation de vecteur $\vec{u}$ = (5/2,-3/2).

La même procédure conduit à l'expression générale de la forme canonique d'une homographie:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{(bc-ad)/c^2}{x+d/c}$$

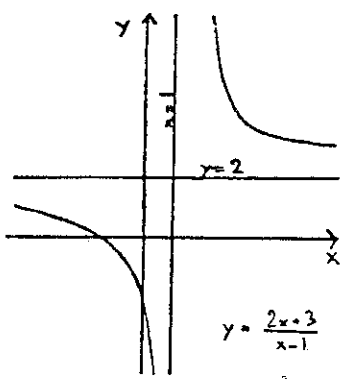
L'équation du graphe se met donc sous la forme

$$y-\frac{a}{c}=\frac{D}{x+d/c} \qquad \text{où} \qquad D=\frac{bc-ad}{c^2}$$

Le graphe d'une homographie est donc une hyperbole équilatère, de façon précise, l'hyperbole qui se déduit de l'hyperbole $y = D/x$ par la translation de vecteur $\vec{u}$ = (-d/c,a/c). En particulier, les droites d'équation $x = -d/c$ et $y = a/c$ sont asymptotes respectivement verticale et horizontale du graphe de f et leur point d'intersection, le point I(-d/c,a/c) est centre de symétrie.

Méthode pratique

Dans la pratique, on obtient rapidement le graphe d'une homographie $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ en suivant la procédure suivante:



- On trace les 2 asymptotes d'équation $x = -d/c$ et $y = a/c$.

- Les 2 asymptotes partagent le plan en 4 quadrants. On détermine les 2 quadrants où doivent être tracées les deux branches d'hyperbole en calculant un point du graphe.

- On trace l'hyperbole en tenant compte de la symétrie par rapport au point intersection des asymptotes.

Exemple 3 Tracer le graphe de l'homographie $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$.

Exemple 4 Montrer que toute homographie a la propriété suivante: les deux droites parallèles aux deux bissectrices et passant par le centre de symétrie sont axes de symétrie du graphe.

Réciproque

On résout l'équation $f(x) = y$:

$$\begin{cases} y=\frac{ax+b}{cx+d} \\ x \neq -d/c \end{cases}$$

ssi $y(cx+d) = ax+b$

ssi $x(cy-a) = -dy+b$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} x=\frac{-dy+b}{cy-a} \\ y \neq a/c \end{cases}$$

Cela signifie que f est injective et que son ensemble image est l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{a/c\}$ (ce qu'on peut vérifier également sur le graphe de f). La réciproque de f est la fonction f^{-1} définie sur $\mathbb{R}\setminus\{a/c\}$ par

$$f^{-1}(y) = \frac{-dy+b}{cy-a}$$

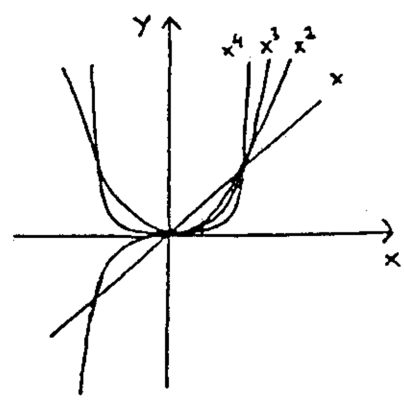
C'est également une fonction homographique.

Exemple 5 Déterminer la réciproque de l'homographie $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

§3. FONCTIONS PUISSANCES ET RACINES.

3.1 Fonctions puissances (exposant entier).

Les fonctions puissances sont les fonctions $x \to x^n$, où n est un entier positif. Ce sont des fonctions paires si n est pair et impaires si n est impair. Elles sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$. Leur représentation graphique est bien connue.



On notera que les points O(0,0) et A(1,1) appartiennent au graphe de toutes les fonctions puissances et que la position relative de deux fonctions puissances dépend, sur $\mathbb{R}_+$ de la position de x par rapport à 1. Précisément:

pour $x > 1$: $\quad \ldots > x^3 > x^2 > x > 1$

pour $0 < x < 1$: $\quad \ldots < x^3 < x^2 < x < 1$

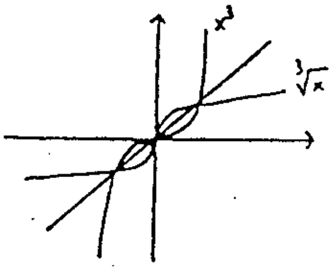
Rappelons aussi les règles de calcul:

$$\begin{cases} x^{n+m} = x^n x^m \\ (xy)^n = x^n y^n \\ (x^n)^m = x^{n\,m} \end{cases}$$

3.2 <u>Fonctions racines</u>.

On obtient les fonctions racines en inversant les fonctions puissances. De façon précise, il faut distinguer deux cas.

n impair L'exemple type est $x \to x^3$. Le test des horizontales montre que quand n est impair, la fonction $x \to x^n$ est injective et d'ensemble image $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$; c'est une bijection de **R** sur **R**. Sa fonction réciproque est, par définition, la fonction racine n-ième. On la note



$$\sqrt[n]{} : x \to \sqrt[n]{x} \quad \text{ou} \quad x \to x^{1/n}.$$

Par définition, donc:

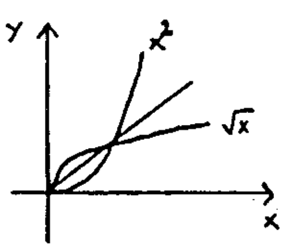
(*) $\sqrt[n]{x}$ est l'unique nombre réel dont la puissance n-ième vaut x.

Exemple 1 $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{-8} = -2$; $\sqrt[5]{32} = 2$; $\sqrt[5]{729} = 3$.

La fonction $\sqrt[n]{} : x \to \sqrt[n]{x}$ est une fonction impaire et strictement croissante (Cf. Exercice 11). Son graphe se déduit de celui de la fonction $x \to x^n$ par symétrie par rapport à la première bissectrice.

n pair L'exemple type est $x \to x^2$. Quand n est pair, la fonction $x \to x^n$ n'est pas injective et n'admet donc pas de réciproque. Par contre, la fonction

$$x \to x^n \quad (x \geq 0)$$



restriction de $x \to x^n$ à $\mathbf{R}_+$, elle, est injective. Son ensemble image est $\mathbf{R}_+$; elle admet donc une fonction réciproque définie sur $\mathbf{R}_+$. Par définition, cette fonction réciproque est appelée racine n-ième et notée

$$\sqrt[n]{} : x \to \sqrt[n]{x} \quad \text{ou} \quad x \to x^{1/n}.$$

On retiendra que la fonction $\sqrt[n]{}$ est définie sur $\mathbf{R}_+$, par:

(**) <u>Pour $x \geq 0$,</u> $\sqrt[n]{x}$ est l'unique nombre réel <u>positif</u> dont la puissance n-ième vaut x.

Exemple 2 (a) $\sqrt{9} = 3$ (b) $\sqrt[4]{16} = 2$ (c) $\sqrt[2]{(-3)^2} = 3$
(c) $\sqrt[4]{81} = 3$ (d) $\sqrt[4]{729} = 3\sqrt{3}$.

La fonction $\sqrt[n]{} : x \to \sqrt[n]{x}$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ (Cf. Exercice 11). Son graphe se déduit de celui de la fonction $x \to x^n$ ($x \geq 0$) par symétrie par rapport à la première bissectrice.

Position relative Sur $\mathbf{R}_+$, on a les inégalités suivantes:

pour $x > 1$: $\quad \dots > x^3 > x^2 > x > \sqrt[2]{x} > \sqrt[3]{x} > \dots > 1$

pour $0 < x < 1$: $\quad \dots < x^3 < x^2 < x < \sqrt[2]{x} < \sqrt[3]{x} < \dots < 1$

Exemple 3 Tester ces inégalités sur des exemples.
($64 > \sqrt[2]{64} = 8 > \sqrt[3]{64} = 4 \dots$).

Exemple 4 Classer les 8 nombres suivants:
$(1/2)^{12}$, $1/2$, $\sqrt[8]{8}$, 8^2, $\sqrt[5]{1/2}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{8}$, 8.

Règles de calcul Il existe pour les fonctions racines des règles de calcul analogues à celles qui s'appliquent aux puissances. Il est recommandé d'utiliser la notation $x^{1/n}$ plutôt que $\sqrt[n]{x}$ quand on les emploie.

$$\begin{cases} (xy)^{1/n} = x^{1/n}y^{1/n} \\ (x^{1/n})^{1/m} = (x^{1/n})^{1/m} = x^{1/n\,m} \end{cases}$$

Exemple 5 Combien vaut $\sqrt[4]{\sqrt[3]{(216)^4}}$?

Exemple 6 Démontrer que pour tout $x \geq 0$, $(x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m$.

3.3 Fonctions puissances (exposant rationnel).

Soit r un nombre rationnel, c'est-à-dire une fraction $r = m/n$ de nombres entiers m et n. Pour $x \geq 0$, la puissance r-ième de x est le nombre réel noté x^r défini par:

- si $r \geq 0$, i.e., r s'écrit $r = m/n$ avec m et n positifs,

$$x^r = (x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m$$

- si $r \leq 0$, i.e., r s'écrit $r = -m/n$ avec m et n positifs,

$$x^r = \frac{1}{(x^m)^{1/n}} = \frac{1}{(x^{1/n})^m} \quad \text{pour } x \neq 0$$

Exemple 7 (a) $81^{3/4} = (81^{1/4})^3 = 3^3 = 27$
(b) $8^{-2/3} = 1/4$; $4^{3/4} = 2\sqrt{2}$
(c) $9^{2/4} = 9^{1/2} = 3$.

Remarque. Pour que la définition de x^r ait un sens, il faut qu'elle ne dépende pas de la façon dont on écrit r comme quotient d'entiers $r = m/n$. En effet, pour tout $a \in \mathbf{N}^*$, le nombre rationnel $r = m/n$ s'écrit aussi $r = (am)/(an)$; la définition de x^r suppose donc qu'on a vérifié au préalable que, pour tout $x \geq 0$,

$$(x^m)^{1/n} = (x^{am})^{1/an}.$$

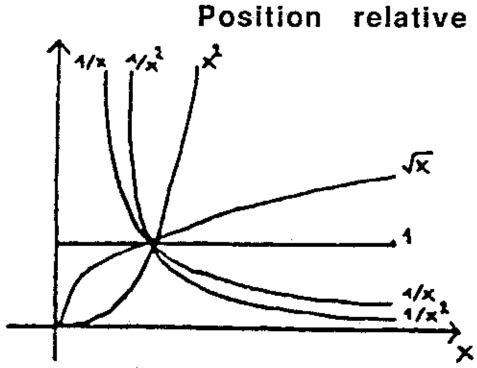
Règles de calcul Les règles de calcul des puissances se généralisent. On obtient:

$$\begin{cases} x^{r+r'} = x^r x^{r'} & \text{pour } x \text{ et } y > 0 \text{ et } r \text{ et } r' \text{ rationnels} \\ (xy)^r = x^r y^r & \text{pour } x > 0 \text{ et } r \text{ rationnel} \\ (x^r)^{r'} = x^{rr'} & \text{pour } x > 0 \text{ et } r \text{ et } r' \text{ rationnels} \end{cases}$$

La fonction $x \to x^r$ **Exemple 8** Faire l'étude complète de la fonction $x \to x^{-3/2}$.

De façon générale, la fonction $x \to x^r$ est définie sur $\mathbf{R}_+$ si $r > 0$ et $\mathbf{R}_+^*$ si $r < 0$; elle est à valeurs positives. Elle est croissante si $r > 0$ et décroissante si $r < 0$. dans tous les cas, elle est injective. Son ensemble image est $\mathbf{R}_+$ si $r > 0$ et $\mathbf{R}_+^*$ si $r < 0$. La fonction $x \to x^r$ a pour réciproque la fonction $x \to x^{1/r}$.

Position relative La position relative des fonctions puissances est résumée par les inégalités suivantes.



Pour $r > r'$, $\begin{cases} x^r > x^{r'} \text{ si } x > 1 \\ x^r < x^{r'} \text{ si } 0 < x < 1 \end{cases}$

Exemple 9 Déterminer les lignes de niveau de la fonction $f(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ pour $\alpha = 1/2, 1/3, 1/4$.

§4. LES FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHME.

4.1 La fonction Log.

Rappel. La définition de la fonction Log s'appuie sur un résultat classique d'intégration (Cf. Ch.6 §3 et Ch.7 §1.3), à savoir:

(*) Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f est intégrable et si $a \in I$, la fonction

$$x \to \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f (i.e., sa dérivée vaut f). De plus c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

La fonction Log désigne la fonction logarithme (népérien). Elle est définie comme l'unique primitive de la fonction $x \to 1/x$ sur $\mathbf{R}_+^*$ qui s'annule en 1; c'est-à-dire:

$$\mathrm{Log}(x) = \int_1^x 1/t \, dt$$

Propriété fondamentale du logarithme

La fonction Log transforme un produit en somme; précisément

$$\mathrm{Log}(xy) = \mathrm{Log}(x) + \mathrm{Log}(y) \quad \text{pour tous } x,y \in \mathbf{R}_+^*$$

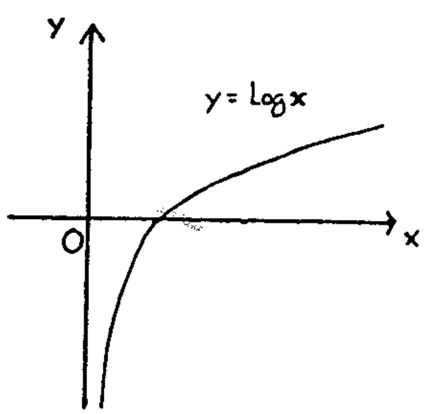
(Cf. Exercice 35).

De la propriété fondamentale, il est facile de déduire les suivantes:

$$\begin{cases} \mathrm{Log}(x^n) = n\,\mathrm{Log}(x) & \text{pour } x > 0 \text{ et } n \in \mathbf{N} \\ \mathrm{Log}(1/x) = -\mathrm{Log}(x) & \text{pour } x > 0 \\ \mathrm{Log}(\sqrt[n]{x}) = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{Log}(x) & \text{pour } x > 0 \text{ et } n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

Ces 3 formules peuvent être regroupées en une seule:

$$\mathrm{Log}(x^r) = r\,\mathrm{Log}(x) \text{ pour } x > 0 \text{ et } r \text{ rationnel}$$



Par définition, la fonction Log est dérivable de dérivée la fonction $x \to 1/x$ $(x > 0)$; elle est donc croissante sur $\mathbf{R}_+^*$. On reverra au chapitre suivant que

$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{Log}(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \to 0^+} \mathrm{Log}(x) = -\infty$.

Son graphe est bien connu.

Exemple 1 Démontrer que

$$\begin{cases} \mathrm{Log}(x) > 0 \text{ ssi } x > 1 \\ \mathrm{Log}(x) < 0 \text{ ssi } x < 1 \\ \mathrm{Log}(x) = 0 \text{ ssi } x = 1 \end{cases}$$

La fonction Log est injective et son ensemble image est **R** (Test des horizontales). Elle admet donc une fonction réciproque définie sur **R**, qu'on appelle fonction **exponentielle.**

Définition du nombre e

La fonction Log est injective et d'ensemble image **R**; par conséquent, tout nombre réel admet un unique antécédent. Le nombre e est, par définition, l'unique antécédent de 1, soit l'unique nombre réel vérifiant

$$\mathrm{Log}\, e = 1.$$

Des calculs montrent que

$$e \simeq 2{,}718....$$

4.2 La fonction exponentielle.

La fonction exponentielle est notée exp. Sa valeur en $x \in \mathbf{R}$ se note indifféremment exp(x) ou e^x. Par définition, c'est la réciproque de la fonction Log; on a donc

$$e^x = y \iff \begin{cases} \text{Log } y = x \\ y > 0 \end{cases}$$

et en particulier

$$\begin{cases} e^{\text{Log}(x)} = x \text{ pour tout } x > 0 \\ \text{Log}(e^x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Propriété fondamentale de l'exponentielle

De la propriété fondamentale du logarithme, découle celle de l'exponentielle: elle transforme somme en produit:

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad \text{pour tous } x,y \in \mathbf{R}$$

On en déduit aussi

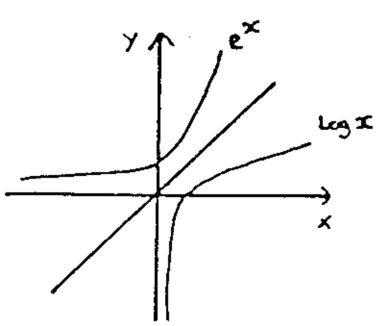
$$\begin{cases} e^{nx} = (e^x)^n & \text{pour } x \in \mathbf{R} \text{ et } n \in \mathbf{N} \\ e^{-x} = 1/e^x & \text{pour } x \in \mathbf{R} \\ e^{x/n} = = (e^x)^{1/n} & \text{pour } x \in \mathbf{R} \text{ et } n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

Ces 3 formules peuvent être regroupées en une seule:

$$e^{rx} = (e^x)^r \quad \text{pour } x \in \mathbf{R} \text{ et } r \text{ rationnel}$$

Exemple 2 Démontrer toutes ces formules.

Note. En appliquant la dernière formule à x = 1, on obtient $e^r = e^r$, ce qu'il faut comprendre comme ceci: le terme e^r de gauche n'est qu'une notation pour exp(r), le terme e^r de droite désigne la puissance r-ième du nombre $e \simeq 2{,}718...$; d'après la formule, ces deux termes sont égaux, ce qui est loin d'être banal. Cela justifie la notation $\exp(x) = e^x$.



La fonction exponentielle, comme réciproque de la fonction Log, est croissante (Cf. Exercice 11), dérivable de dérivée $(e^x)' = e^x$ (Cf. Ch.7 §1.2), tend vers 0 quand $x \to -\infty$ et vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$. Elle est injective, d'ensemble image $\mathbf{R}_+^*$; sa réciproque est la fonction Log. Le graphe de la fonction exponentielle est le symétrique par rapport à la première bissectrice de celui de la fonction Log.

On notera que $\begin{cases} e^x > 1 \text{ ssi } x > 0 \\ e^x < 1 \text{ ssi } x < 0 \\ e^x = 1 \text{ ssi } x = 0 \end{cases}$

Exemple 3 Mettre les expressions suivantes sous la forme $a+b\text{Log}(2)+c\text{Log}(3)$.

(a) $A = \text{Log}[(6\sqrt{3})^3] - \text{Log}[(2\sqrt{6})^3]$

(b) $B = \text{Log}[(12e)^{1/3}] + \text{Log}(1/6)$.

Solution. (a) $A = 3\text{Log}(6\sqrt{3}) - 3\text{Log}(2\sqrt{6})$

$$= 3\text{Log}(2.3^{3/2}) - 3\text{Log}(2^{3/2}.3^{1/2})$$
$$= 3[\text{Log}(2) + \frac{3}{2}\text{Log}(3)] - 3[\frac{3}{2}\text{Log}(2) + \frac{1}{2}\text{Log}(3)]$$
$$= \frac{-3}{2}\text{Log}(2) + 3\text{Log}(3)$$

4.3 Exponentielle de base a.

Soit a un nombre réel tel que $a > 0$ et $a \neq 1$. On appelle exponentielle de base a la fonction

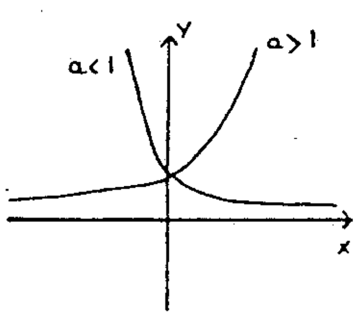
$$x \to a^x \overset{\text{déf}}{=} e^{x\text{Log}a}$$

Exemple 4 Pour $a = e$, on retrouve la fonction exponentielle. La fonction exponentielle de base 2 est la fonction $x \to 2^x$; sa valeur en 3 est $2^3 = 8$. Combien vaut $2^{\sqrt{2}}$?

Note. La notation a^x se justifie par le fait que, quand x est un nombre rationnel, le nombre $e^{x\text{Log}a}$ est égal à la puissance x-ième de a.

On vérifie sans peine les propriétés suivantes, conséquences des propriétés de l'exponentielle:

$$\begin{cases} a^{x+y} = a^x a^y & \text{pour tout x et y réels} \\ a^{rx} = (a^x)^r & \text{si r est rationnel} \\ a^x > 0 & \text{pour tout } x \in \mathbf{R} \end{cases}$$



En dérivant $a^x = \exp(x\text{Log } a)$ comme une fonction composée (Cf. Ch.7 §1.2), on obtient:

$$(a^x)' = \text{Log}(a)\ a^x$$

La dérivée est toujours positive si $a > 1$ et toujours négative si $a < 1$. La monotonie et l'allure du graphe diffèrent donc selon que $a > 1$ ou $a < 1$. On notera cependant que tous les graphes passent par le point de coordonnées (0,1).

4.4 Applications.

Echelle de Richter L'échelle de Richter est une échelle universelle qui mesure la **magnitude ou force** d'un tremblement de terre. On calcule la magnitude M de la façon suivante: on relève sur un sismographe l'amplitude x de la plus forte onde sismique; M est ensuite donnée par la formule

$$M = \frac{Log(x)}{Log\ 10} + c$$

où c est une constante dépendant du sismographe utilisé, des unités de mesure et de la distance du sismographe à l'épicentre du tremblement de terre; cette constante est donnée par des tables attachées au sismographe utilisé. Le nombre M, lui, ne dépend que du tremblement de terre.

Considérons 2 tremblements de terre de forces M_1 et M_2. On cherche à les comparer. Supposons qu'ils se sont produits au même endroit; les amplitudes maximales x_1 et x_2 relevées sur un même sismographe sont alors données par

$$\begin{cases} M_1 = \dfrac{Log(x_1)}{Log(10)} + c \\ M_2 = \dfrac{Log(x_2)}{Log(10)} + c \end{cases}$$

Par différence, on déduit:

$$M_2 - M_1 = \frac{Log(x_2/x_1)}{Log(10)} \quad \text{ce qui donne} \quad x_2/x_1 = 10^{(M_2-M_1)}$$

Exemple 5 Pour $M_1 = 5{,}5$ et $M_2 = 6{,}5$, on obtient $x_2/x_1 = 10$. Le tremblement de terre de force 6,5 est donc 10 fois plus violent que celui de force 5,5.

On dit que l'échelle de Richter est une échelle logarithmique de base 10.

Calculs d'intérêts

Exemple 6 Montrer que $\lim\limits_{m \to +\infty} (1 + \frac{r}{m})^m = e^r$.

Solution. Cela revient à montrer que $\lim\limits_{m \to +\infty} m\, Log(1 + \frac{r}{m}) = r$.
Or $m\, Log(1 + \frac{r}{m})$ s'écrit:

$$m\, Log(1 + \frac{r}{m}) = r \left[\frac{Log(1 + \frac{r}{m}) - Log\ 1}{\frac{r}{m}} \right]$$

C'est donc r fois le taux d'accroissement de la fonction $x \to Log(x)$ entre les points 1 et $(1 + r/m)$. Quand m tend vers $+\infty$, ce taux tend vers la dérivée de la fonction Log en 1, c'est-à-dire $1/1 = 1$.

Exemple 7 On dépose dans une banque un capital a. Quel est, en fonction de l'intérêt servi par cette banque, le capital acquis après t années?

Solution. Il faut préciser la question. En effet, si la banque annonce un intérêt "annuel" de r%, le capital acquis dépend non seulement de r mais aussi de la fréquence de calcul des intérêts. De façon précise, le capital acquis après t années vaut:

si l'intérêt est calculé une fois par an.	$a(1+r)$ pour $t = 1$	$a(1+r)^t$ pour t quelconque
si l'intérêt est calculé 2 fois par an.	$a(1+\frac{r}{2})^2$ pour $t = 1$	$a(1+\frac{r}{2})^{2t}$ pour t quelconque
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
si l'intérêt est calculé m fois par an.	$a(1+\frac{r}{m})^m$ pour $t = 1$	$a(1+\frac{r}{m})^{mt}$ pour t quelconque
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
si l'intérêt est calculé continûment.	ae^r pour $t = 1$	ae^{rt} pour t quelconque

On a obtenu la dernière ligne en utilisant l'exemple 6.

L'exemple 7 démontre la nécessité d'une définition précise de l'intérêt. Nous adopterons les conventions suivantes.

Dans tout placement, l'intérêt est calculé périodiquement. La période du calcul sera prise comme unité de temps. L'intérêt r du placement sera toujours **le taux d'intérêt par période.**
Si A est le capital initial, le capital C(n) acquis après n périodes vaut:

$$C(n) = A(1+r)^n$$

On définit aussi **le taux de croissance par période** comme

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{C(n+1)-C(n)}{C(n)}$$

Le calcul donne

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{A(1+r)^{n+1}-A(1+r)^n}{A(1+r)^n} = \frac{A(1+r)^n((1+r)-1)}{A(1+r)^n} = r.$$

On constate donc que

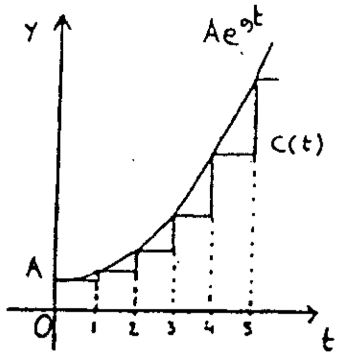
(*) Le taux de croissance par période du capital C(n) est égal au taux d'intérêt par période du placement.

Notons maintenant que $C(n) = A(1+r)^n$ s'écrit aussi

$$C(n) = A\ e^{ng} \quad \text{pour} \quad g = \mathrm{Log}(1+r).$$

On l'interprète comme ceci:

(**) Le capital effectivement acquis après n périodes coincide avec celui qui serait acquis si un intérêt de $g = \mathrm{Log}(1+r)$ calculé de façon continue était appliqué.



Le nombre $g = \mathrm{Log}(1+r)$ est appelé **taux d'intérêt instantané du placement**.

Note. L'égalité $C(n) = A\, e^{ng}$ n'a lieu que pour des valeurs entières de n. Comme le montre la figure ci-contre, le capital C(n) reste constant entre deux périodes; seuls les points correspondant à des multiples entiers de la période se trouvent sur la courbe $y = A\, e^{gx}$. On dit que la fonction $x \to A\, e^{gx}$ interpole la fonction C(n) aux points entiers.

Le **taux de croissance instantané** du placement est la quantité

$$\frac{d(Ae^{gt})}{Ae^{gt}} = \frac{gAe^{gt}}{Ae^{gt}} = g$$

D'où le résultat

(***) Le taux de croissance instantané du placement est égal au taux d'intérêt instantané du placement.

Exemple 8 Un capital initial de 20 francs est placé au taux d'intérêt trimestriel de 5%. Quelle est l'expression du capital acquis après 2 ans. Quel est le taux d'intérêt g instantané du placement? Quel taux d'intérêt i_{an} annuel conduirait au même capital après un an?

Réponses. Capital après 2 ans = $C(8) = 1{,}05^8$; $g = \mathrm{Log}(1{,}05)$; $1+i_{an} = 1{,}05^4$ d'où $i_{an} = 1{,}05^4 - 1 \approx 21{,}55$ %.

Indicateurs de croissance

De façon générale, on définit pour une fonction f d'une variable x

Des indicateurs correspondant à un accroissement Δx de x:

L'accroissement (absolu) Δf

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

L'accroissement relatif $\Delta f/f$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}$$

Le taux d'accroissement (absolu)

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Le taux d'accroissement relatif ou taux de croissance.

$$\frac{1}{f}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Des indicateurs instantanés.

Le taux d'accroissement instantané

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = f'(x)$$

Le taux d'accroissement relatif instantané ou taux de croissance instantané.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{f}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{f}\frac{df}{dx} = \frac{f'}{f}$$

Notes. 1) Les quantités définies à gauche sont des fonctions de x et de Δx tandis que leurs homologues instantanés de droite ne dépendent plus que de x.

2) Les indicateurs absolus et relatifs définis ci-dessus diffèrent en ce que l'un mesure une variation en données absolues alors que le second la mesure en données relatives, i.e, en pourcentages. Un salaire qui passe en un an de 20 000 F à 22 000 F, augmente dans l'absolu de 2 000 F; relativement, cela correspond à une augmentation de 10%.

Exemple 9 (a) Le taux de croissance par période d'un placement correspond au taux de croissance de la fonction $C(n) = A(1+r)^n$ entre n et n+1 (i.e., $\Delta n = 1$); on sait que c'est aussi le taux d'intérêt du placement.
(b) Le taux de croissance instantané d'un placement correspond lui au taux de croissance instantané de la fonction interpolatrice $x \to Ae^{gx}$; on sait que c'est aussi le taux d'intérêt instantané du placement.

Exemple 10 Soit $f(x) = x^2$. Calculer les indicateurs de croissance de f. Comparer les indicateurs entre $x = 8$ et $x+\Delta x = 9$, les indicateurs entre $x = 8$ et $x+\Delta x = 10$ et les indicateurs instantanés au point $x = 8$. Commenter.

4.5 Fonctions puissances (exposant dans R).

Soit r un nombre réel quelconque. Pour $x > 0$, la puissance r-ième de x est le nombre réel noté x^r défini par:

$$x^r = e^{r\text{Log}x}$$

Quand r est un nombre rationnel, on retrouve la définition de x^r donnée en §3.3: en effet, on a dans ce cas $e^{r\text{Log}x} = (e^{\text{Log}x})^r = x^r$.

Exemple 11 (a) $2^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\text{Log}2}$
(b) $(1/2)^{-\sqrt{3}} = e^{-\sqrt{3}\text{Log}(1/2)} = e^{\sqrt{3}\text{Log}(2)} = 2^{\sqrt{3}}$.
(c) Combien vaut $x^{1/\text{Log}x}$ pour tout $x > 0$?

Pour $r \in \mathbf{R}$, la fonction $x \to x^r$ est définie sur $\mathbf{R}_+^*$; ses propriétés sont essentiellement les mêmes que pour r rationnel.

• Règles de calcul

$$\begin{cases} x^{r+r'} = x^r x^{r'} & \text{pour x et y} > 0 \text{ et r et r' dans } \mathbf{R} \\ (xy)^r = x^r y^r & \text{pour x} > 0 \text{ et r dans } \mathbf{R} \\ (x^r)^{r'} = x^{rr'} & \text{pour x} > 0 \text{ et r et r' dans } \mathbf{R} \end{cases}$$

• Monotonie

$$x \to x^r \text{ est } \begin{cases} \text{croissante si } r \geq 0 \\ \text{décroissante si } r \leq 0 \end{cases}$$

• Position relative

$$\text{Pour } r > r', \begin{cases} x^r > x^{r'} \text{ si } x > 1 \\ x^r < x^{r'} \text{ si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Exemple 12 Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < 1 < b$. Classer les nombres a^a, a^b, b^a, b^b, 0 et 1.

Exemple 13 Résoudre le système $\begin{cases} 27(3^y)^x = 1 \\ 2^x = 4/2^y \end{cases}$

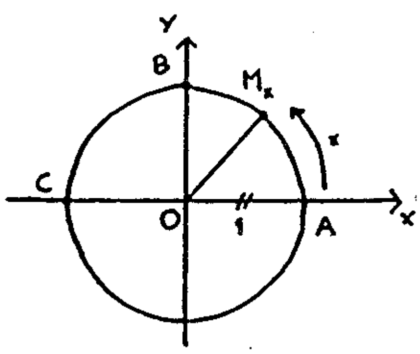
Solution. Le système se réécrit:

$$\begin{cases} 3^{xy} = 3^{-3} \\ 2^{x+y} = 2^2 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = -3 \\ x+y = 2 \end{cases}$$

Les nombres x et y sont donc les solutions de l'équation $U^2-2U-3 = 0$; ce qui donne $(x,y) = (1,-3)$ ou $(x,y) = (-3,1)$.

§5. FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES.

5.1 Définitions.



On appelle **cercle trigonométrique** le cercle unité $C(O,1)$ orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et avec la demi-droite Ox comme origine pour la mesure des angles.

Soit $x \in \mathbf{R}$. Partant du point A, on arrive après avoir parcouru x unités de longueur le long du cercle (dans le sens positif ou négatif selon le signe de x), à un point noté M_x.

Exemple 1 $M_0 = A$; $M_{2\pi} = A$; $M_\pi = C$; $M_{-\pi} = C$; $M_{\pi/2} = B$.

De cette manière, à tout nombre réel x, on peut associer un unique angle Θ_x, à savoir l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM_x}$. On dit que x est une **mesure de l'angle** Θ_x ou que l'angle Θ_x est de x **radians.**

Attention! Un angle n'a pas une unique mesure: par exemple, 0 et 2π sont 2 mesures de l'angle $\Theta_0 = \Theta_{2\pi}$; plus généralement, tous les nombres de la forme $x+2k\pi$, où k est un entier quelconque, sont des mesures de l'angle Θ_x. Cependant, il est facile de voir qu'un angle donné a une unique mesure dans l'intervalle $[0,2\pi[$.

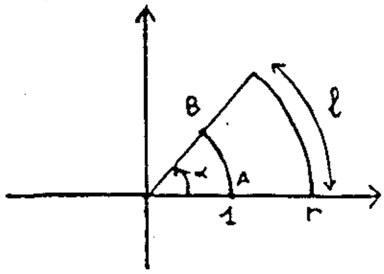
Un angle d'un radian est un angle qui intercepte le cercle trigonométrique en un arc de cercle long d'une unité de longueur. Le radian est relié aux autres unités de mesure des angles, i.e., degrés et grades par la formule suivante:

$$2\pi \text{ radians} = 360° = 400 \text{ grades} = 1 \text{ tour}$$

Longueur d'un arc de cercle

Exemple 2 Expliquer comment on peut mesurer un angle avec une corde et une règle graduée.

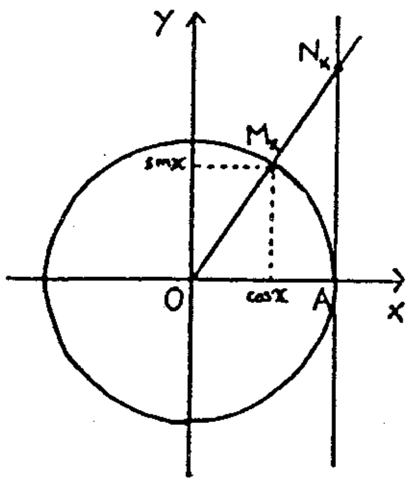
Considérons maintenant le cercle $C(0,r)$. Soit Θ un angle de mesure $\alpha \in [0,2\pi[$. La longueur l de l'arc du cercle $C(0,r)$ intercepté par l'angle Θ est donné par



$l = r\alpha$

(Simplement voir que $l = r \times$ (long. arc AB) $= r\alpha$).
En particulier, la circonférence du cercle $C(O,r)$ vaut $2\pi r$.

Lignes trigonométriques Pour x réel quelconque, les trois nombres réels cos(x), sin(x), tg(x) qu'on appelle lignes trigonométriques de x, sont définis de la façon suivante:



$$\begin{cases} \cos(x) = \text{abscisse de } M_x \\ \sin(x) = \text{ordonnée de } M_x \\ tg(x) = \sin(x)/\cos(x) \end{cases}$$

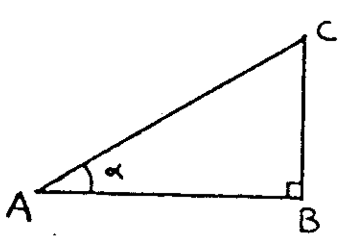
Exemple 3 Les lignes trigonométriques des angles classiques:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	$-\pi/2$
cos(x)	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	0
sin(x)	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	-1
tg(x)	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	?	0	?	?

Les ? dans le tableau signifient que la tangente n'est pas définie aux valeurs considérées.

Exemple 4 Résoudre les équations $\sin(x) = 0$, $\cos(x) = 0$, $tg(x) = 0$.

Exemple 5 Démontrer qu'on a $tg(x) = \overline{AN_x}$ (voir figure) (Utiliser le Théorème de Thalès).



Exemple 6 (Relations dans le triangle rectangle):
Démontrer que dans le triangle ABC rectangle en B ci-contre, on a les relations suivantes (Utiliser le Théorème de Thalès):

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = AB/AC = \text{côté adjacent/hypoténuse} \\ \sin(\alpha) = BC/AC = \text{côté opposé/hypoténuse} \\ tg(\alpha) = AB/BC = \text{côté opposé/côté adjacent} \end{cases}$$

Des définitions, il vient immédiatement que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$$

En particulier:

$$\begin{cases} -1 \leq \sin(x) \leq 1 \\ -1 \leq \cos(x) \leq 1 \end{cases}$$

On note respectivement cos, sin et tg les fonctions $x \to \cos(x)$, $x \to \sin(x)$ et $x \to tg(x)$. Les fonctions sin et cos sont définies sur **R** tandis que la fonction tg est définie en tous les nombres réels x pour lesquels $\cos(x) \neq 0$, i.e., tous les nombres réels sauf ceux de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$ où k est un entier quelconque.

5.2 Propriétés de symétrie et de périodicité.

Périodicité: $\begin{cases} \cos(x+2\pi) = \cos(x) \\ \sin(x+2\pi) = \sin(x) \\ \mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}(x) \end{cases}$

Les fonctions cos, sin et tg sont donc périodiques, de période 2π pour cos et sin et π pour tg.

Preuve. Les points M_x et $M_{x+2\pi}$ sont égaux; ils ont donc les mêmes coordonnées.

Parité. Imparité: $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \\ \mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}(x) \end{cases}$

La fonction cos est paire; les fonctions sin et tg sont impaires.

Symétrie / $x = \pi/2$: $\begin{cases} \cos(\pi-x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi-x) = \sin(x) \\ \mathrm{tg}(\pi-x) = -\mathrm{tg}(x) \end{cases}$

Le graphe de la fonction sin est symétrique par rapport à l'axe $x = \pi/2$; les graphes des fonctions cos et tg admettent le point $I(\pi/2,0)$ comme centre de symétrie.

Autres formules de symétrie:

$\begin{cases} \cos(x+\pi) = -\cos(x) \\ \sin(x+\pi) = -\sin(x) \\ \mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}(x) \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} \cos(\pi/2-x) = \sin(x) \\ \sin(\pi/2-x) = \cos(x) \\ \mathrm{tg}(\pi/2-x) = 1/\mathrm{tg}(x) \end{cases}$

Exemple 7 Démontrer les formules ci-dessus en procédant comme pour les trois premières.

Exemple 8 A l'aide des formules précédentes, démontrer celles-ci:

$$\begin{cases} \cos(x+\pi/2) = -\sin(x) \\ \sin(x+\pi/2) = \cos(x) \\ \mathrm{tg}(x+\pi/2) = -1/\mathrm{tg}(x) \end{cases}$$

5.3 Graphes des fonctions sinus, cosinus et tangente.

Les formules du paragraphe ci-dessus permettent de restreindre le domaine d'étude des fonctions sin, cos et tg: on se limite successivement à $[-\pi,+\pi]$ (périodicité), puis à $[0,\pi]$ (parité ou imparité) et enfin à $[0,\pi/2]$ (symétrie/ $x = \pi/2$). En suivant un point se déplaçant le long du cercle trigonométrique entre M_0 et $M_{\pi/2}$, on constate que, quand x décrit l'intervalle $[0,\pi/2]$:

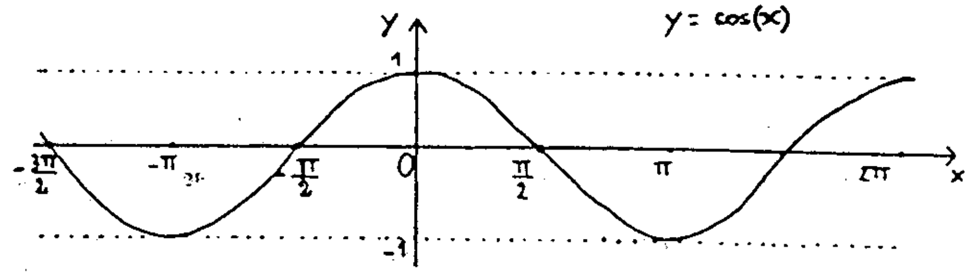
- La fonction cos décroît de 1 à 0.

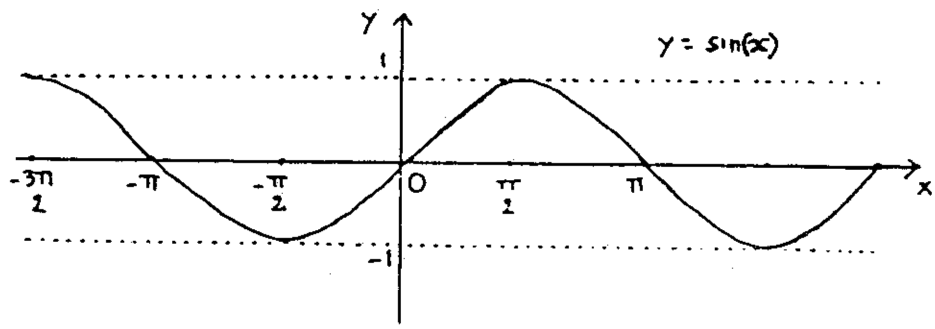
- La fonction sin croît de 0 à 1.
- La fonction tg croît de 0 à $+\infty$.

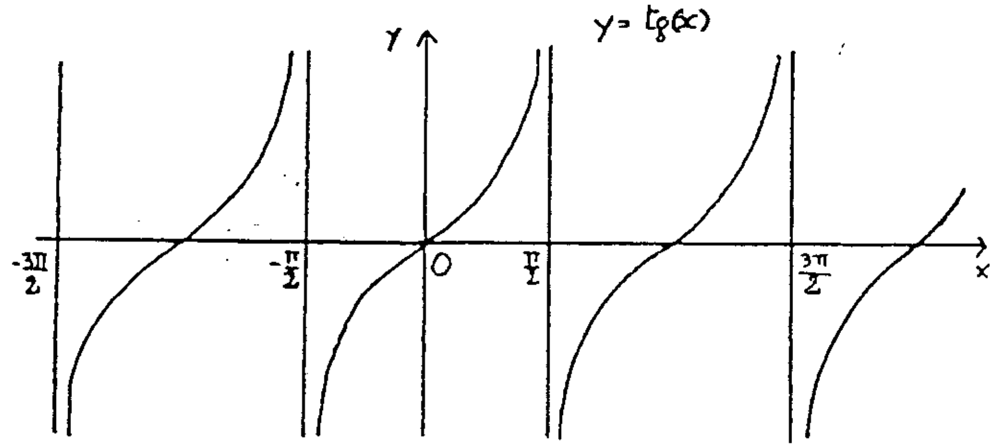
Les variations des fonctions sin, cos et tg peuvent également se déduire du signe de leur dérivée. Nous verrons au Ch.7 que:

$$\begin{cases} (\cos x)' = -\sin x \\ (\sin x)' = \cos x \\ (\text{tg}\, x)' = 1/\cos^2 x = 1+\text{tg}^2 x \end{cases}$$

On obtient les trois graphes suivants:







Notes. 1) L'identité $\cos(x-\pi/2) = \sin(x)$ indique que le graphe de la fonction sin se déduit de celui de la fonction cos par translation par le vecteur $\pi/2\,\vec{i}$.

2) Les fonctions sin, cos et tg ne sont pas injectives. Leur ensemble image vaut respectivement [-1,1], [-1,1] et **R**.

3) Les droites verticales d'équation ... ,$x = -\pi/2$, $x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$, ... sont des asymptotes du graphe de la fonction tg.

5.4 Formules trigonométriques (Formulaire).

Formules d'addition des angles:

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \\ \operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}(y)}{1-\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x) \\ \operatorname{tg}(x-y) = \dfrac{\operatorname{tg}(x)-\operatorname{tg}(y)}{1+\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin(x)\sin(y) = -\dfrac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)] \\ \sin(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)] \\ \sin(y)\cos(x) = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p)-\sin(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \end{cases}$$

Formules de duplication des angles:

$$\begin{cases} \cos(2x) = \cos^2(x)-\sin^2(x) = 2\cos^2(x)-1 = 1-2\sin^2(x) \\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \\ \operatorname{tg}(2x) = \dfrac{2\operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}^2(x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2(\frac{x}{2}) = \dfrac{1+\cos(x)}{2} \\ \sin^2(\frac{x}{2}) = \dfrac{1-\cos(x)}{2} \end{cases}$$

Exemple 9 Ecrire cos(3x) et sin(3x) en fonction de cos(x) et sin(x).

Formules de réduction: Posons $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Les fonctions sin(x), cos(x) et tg(x) peuvent s'écrire comme comme des fractions rationnelles de la variable t. Ces formules sont utilisées notamment dans la recherche de primitives.

$$\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ tg(x) = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

5.5 <u>Equations classiques</u>.

cos(x) = cos(a) Soit $a \in [0,2\pi[$. L'équation $\cos(x) = \cos(a)$ a 2 solutions évidentes: a et -a. Il est facile de voir, en considérant le cercle trigonométrique que ce sont les seules solutions dans $[0,2\pi[$. En conclusion, on a donc

$$\cos(x) = \cos(a) \text{ ssi } \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} \quad \text{pour k entier quelconque}$$

Pour résoudre une équation du type $\cos(x) = \alpha$, on cherche à se ramener à une équation du type $\cos(x) = \cos(a)$. Deux cas se présentent

• $|\alpha| > 1$ (i.e., $\alpha \notin [-1,1]$)
Dans ce cas, l'équation n'a pas de solution: en effet, α n'est pas dans l'image de la fonction cos.

• $|\alpha| \leq 1$ (i.e., $\alpha \in [-1,1]$)
Dans ce cas, α est dans l'image de la fonction cos; soit a un antécédent de α par cos. L'équation s'écrit maintenant

$$\cos(x) = \cos(a)$$

Ses solutions sont décrites plus haut.

Exemple 10 Résoudre les équations
(a) $2\cos(x) = 1$ (b) $\cos(x) + \sin(x) = 1$ (c) $\cos(x) + \sin(x) = 2$

Solution. (a) $2\cos(x) = 1$ ssi $\cos(x) = 1/2 = \cos(\pi/3)$. Les solutions de l'équation sont donc les nombres réels x de la forme:

$$\begin{cases} x = \pi/3 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\pi/3 + 2k\pi \end{cases} \quad \text{pour k un entier quelconque}$$

(b) Divisons les deux côtés de l'équation par

$$\sqrt{(\text{coeff. de } \cos(x))^2 + (\text{coeff. de } \sin(x))^2} = \sqrt{2}$$

On obtient

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

i.e., $\cos(\pi/4)\cos(x) + \sin(\pi/4)\sin(x) = \cos(\pi/4)$
i.e., $\cos(x-\pi/4) = \cos(\pi/4)$

Les solutions de l'équation sont donc les nombres réels x de la forme:

$$\begin{cases} x-\pi/4 = \pi/4 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x-\pi/4 = -\pi/4 + 2k\pi \end{cases} \quad \text{pour k un entier quelconque}$$

$$\text{soit} \quad \begin{cases} x = \pi/2 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = 2k\pi \end{cases} \quad \text{pour k un entier quelconque}$$

(c) En procédant comme en (b), on aboutit à

$$\cos(x-\pi/4) = \sqrt{2}$$

Comme $\sqrt{2} > 1$, l'équation n'a pas de solution.

sin(x) = sin(b) Soit a $\in$ [0,2π[. Les seules solutions dans [0,2π[de l'équation sin(x) = sin(b) sont b et π-b. On a donc

$$\sin(x) = \sin(b) \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} x = b + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi-b + k\pi \end{cases} \quad \text{pour k entier quelconque}$$

Pour résoudre une équation du type sin(x) = β, on cherche à se ramener à une équation du type sin(x) = sin(b). Deux cas se présentent

• $|\beta| > 1$ (i.e., $\beta \notin [-1,1]$)

Dans ce cas, l'équation n'a pas de solution: en effet, β n'est pas dans l'image de la fonction sin.

• $|\beta| \leq 1$ (i.e., $\beta \in [-1,1]$)

Dans ce cas, β est dans l'image de la fonction sin; soit a un antécédent de α par sin. L'équation s'écrit maintenant

$$\sin(x) = \sin(b)$$

Ses solutions sont décrites plus haut.

Exemple 11 Résoudre les équations

(a) $2\sin(x) = 1$ (b) $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$

(c) $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 3$

tg(x) = tg(c) tg(x) = tg(c) ssi x = c + kπ, où k est un entier quelconque

Une équation du type tg(x) = γ a toujours une solution: en effet, l'ensemble image de la fonction tg est **R** tout entier (tg est surjective). Si c est une solution, les autres solutions sont les nombres réels de la forme x = c+kπ, où k est un entier quelconque.

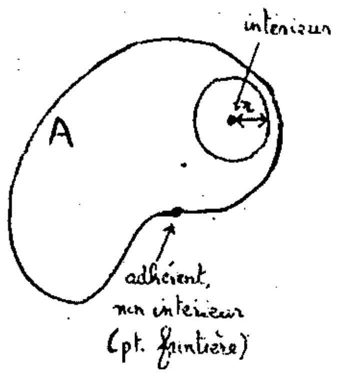
Exemple 12 Résoudre l'équation $tg^2x = tg(x)$.

CHAPITRE 4

LIMITES ET EQUIVALENTS

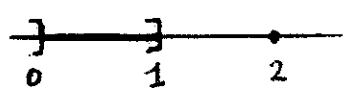
§1. LIMITES.

1.1 Préliminaires "topologiques".



L'étude de la notion de limite est l'occasion d'introduire quelques définitions de "topologie". Nous aurons besoin des notions de point intérieur, de point adhérent et de point d'accumulation d'un ensemble A. Nous commençons par des définitions informelles.

Soit A un sous-ensemble de **R**, **R**^{2} ou **R**^{3}. Les **points intérieurs** de A sont les points de A qui ne sont pas sur le "bord" de A. Précisément, un point m_0 est un point intérieur de A si m_0 est dans A et si une distance minimale d > 0 le sépare de tous les points du complémentaire de A (Cf. Déf.1.1). On dit aussi que A est un **voisinage** de m_0 si m_0 est intérieur à A.



Exemple 1 Soit A =]0,1] U {2}. Le point 1/2 est intérieur à A; A est un voisinage de 1/2. Les points 1 et 2 ne sont pas intérieurs à A.

On dit qu'un point m_0 est un **point adhérent** à A si on peut se rapprocher aussi près que l'on veut de m_0 en restant dans A. On dit qu'un point m_0 est un **point d'accumulation** de A si on peut se rapprocher aussi près que l'on veut de m_0 en restant dans A mais sans être égal à m_0 (Cf. Déf.1.1).

Exemple 2 Soit A =]0,1] U {2}; 0, 1, 2 sont adhérents à A; 0, 1 sont des points d'accumulation de A mais 2 n'en est pas un.

Les points de A sont automatiquement adhérents à A. Les points d'accumulation sont automatiquement des points adhérents. Les points intérieurs de A sont automatiquement dans A; ce sont aussi automatiquement des points d'accumulation de A. Toutes les réciproques sont fausses.

Exemple 3 Remarquer qu'un point m_0 est un point intérieur de A ssi il n'est pas adhérent au complémentaire de A.

On définit enfin le **bord** ou la **frontière** de A comme l'ensemble des points qui sont adhérents mais non intérieurs à A.

Formalisation Le reste de cette section va consister à mettre en forme ces définitions. En fait, il s'agit simplement de traduire de façon précise l'idée de proximité. On va utiliser pour cela les notions de distance et de boules. La distance entre deux points a été définie au Ch.1. Rappelons une propriété importante: **l'inégalité triangulaire.** Tout d'abord l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, qui joue le rôle de distance dans **R**:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

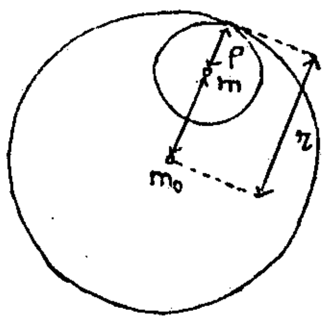
On en déduit l'inégalité suivante, qui est également d'usage fréquent:

$$|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$$

On gardera à l'esprit que $|x-y|$ est la distance $d(x,y)$ sur la droite réelle entre les nombres x et y. Ainsi, la condition $|x-a| < \varepsilon$ signifie simplement que $x \in]a-\varepsilon,a+\varepsilon[$.
De façon générale, notons d la distance sur $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$. L'inégalité triangulaire pour la distance s'énonce: pour m_1, m_2, m_3 trois points quelconques, on a:

$$d(m_1,m_3) \leq d(m_1,m_2) + d(m_2,m_3)$$

(avec égalité ssi m_2 est sur le segment joignant m_1 à m_3).



On appelle **boule ouverte** (resp. **fermée**) de centre m_0 et de rayon r l'ensemble de tous les points m tels que $d(m_0,m) < r$ (resp. $d(m_0,m) \leq r$). On la note $B(m_0,r)$ (resp. $\overline{B}(m_0,r)$); c'est un intervalle, un disque ou une boule selon que l'on est dans $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$. Ces notions s'étendent à $\mathbf{R}^n$; il suffit pour cela de définir la distance sur $\mathbf{R}^n$. Si $p(a_1,...,a_n)$ et $q(b_1,...,b_n)$ sont deux points de $\mathbf{R}^n$, leur distance $d(p,q)$ est définie par

$$d(p,q) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + ... + (a_n-b_n)^2}$$

Exemple 4 Soient $m \in B(m_0,r)$ et $\rho = r-d(m_0,m)$. Montrer que $B(m_0,r) \supset B(m,\rho)$.

DEFINITION 1.1

(a) *Un point* m_0 *est dit* ***intérieur*** *à un ensemble* A *si* A *contient une boule ouverte centrée en* m_0 *et de rayon* $r > 0$. *On dit aussi que* A *est un* ***voisinage*** *de* m_0.
(b) *Un point* m_0 *est dit* ***adhérent*** *à un ensemble* A *si toute boule ouverte centrée en* m_0 *et de rayon* $r > 0$ *coupe* A.
(c) *On dit que* m_0 *est un* ***point d'accumulation*** *de* A *si toute boule ouverte centrée en* m_0 *et de rayon* $r > 0$ *coupe* A *en au moins un point autre que* m_0. *On note* A' *l'ensemble des points d'accumulation de* A.

Exemple 5 Soit $A =]0,1] \cup \{2\}$. Montrer que 1/2 est intérieur à A, que ni 1 ni 2 ne sont intérieurs à A, que 0, 1 et 2 sont des points adhérents, que 0 et 1 sont des points d'accumulation de A mais que 2 n'en est pas un.

Solution. 1/2 est intérieur à A car la boule ouverte $B(1/2,1/2) =]0,1[$ contient 1/2 et est inclus dans A. En revanche, 2 n'est pas intérieur à A car il n'existe aucune boule ouverte centrée en 2 qui soit incluse dans A (pour $r > 0$ quelconque, $B(2,r) \cap \complement A \supset]2,2+r[\neq \emptyset$). Le raisonnement est analogue pour 1.
Les points 1 et 2 sont dans A donc sont adhérents à A. 0 est adhérent à A car n'importe quelle boule ouverte centrée en 0 coupe A (les points "proches" de 1 par valeur supérieure). N'importe quelle boule centrée en 1 coupe A en une infinité de points (les points "proches" de 1 par valeur inférieure); donc 1 est un point d'accumulation de A. Raisonnement analogue pour 0. Par contre, la

boule $B(2,1/2) =]3/2,5/2[$ ne coupe A qu'en 2; donc 2 n'est pas un point d'accumulation.

Exemple 6 Soit A une boule ouverte. Déterminer l'ensemble de tous les points intérieurs à A, les points adhérents à A et les points d'accumulation de A. Même question avec A une boule fermée, enfin avec $A = \{ m(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 \leq 4 \} \cup \{0\}$.

Exemple 7 Montrer qu'un point intérieur à un ensemble A est automatiquement un point d'accumulation de A.

Il est d'usage de noter $\mathring{A}$ l'ensemble de tous les points intérieurs à A et $\bar{A}$ l'ensemble de tous les points adhérents à A et Fr(A) les points qui sont dans $\bar{A}$ mais pas dans $\mathring{A}$. Il résulte des définitions que:

$$\begin{cases} \bar{A} \supset A \supset \mathring{A} \\ \bar{A} \supset Fr(A) \\ \bar{A} \supset A' \supset \mathring{A} \end{cases}$$

Exemple 8 Pour $A =]0,1] \cup \{2\}$ (voir Exemple 5), nous avons: $\mathring{A} =]0,1[$, $\bar{A} = [0,1] \cup \{2\}$, $Fr(A) = \{0,1,2\}$ et $A' = [0,1]$.

Exemple 8.1 Montrer que si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Ouverts et fermés

Un sous-ensemble A de $\mathbf{R}^n$ est dit **ouvert** s'il est voisinage de chacun de ses points, i.e., si

$(\forall m_0 \in A)\ (\exists r > 0)\ (B(m_0,r) \subset A)$

De façon équivalente, A est ouvert ssi $A = \mathring{A}$.

Exemple 8.2 Montrer que les boules ouvertes sont des ouverts (utiliser l'exemple 4).

Exemple 8.3 Soit A une partie quelconque de $\mathbf{R}^n$. Montrer que l'ensemble $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A. L'ensemble $\mathring{A}$ est appelé intérieur de A.

Solution. Montrons d'abord que $\mathring{A}$ est ouvert. Soit $m \in \mathring{A}$. Par définition, il existe $r > 0$ tel que $B(m,r) \subset A$. En utilisant les exemples 8.1 et 8.2, on obtient

$$B(m,r) = \mathring{B}(m,r) \subset \mathring{A}$$

ce qui prouve que m est intérieur à $\mathring{A}$.
Soit maintenant O un ouvert tel que $O \subset A$. En utilisant l'exemple 8,1, on déduit $O = \mathring{O} \subset \mathring{A}$, ce qui montre que $\mathring{A}$ est le plus grand des ouverts contenus dans A.

Un sous-ensemble A de $\mathbf{R}^n$ est dit **fermé** s'il contient ses points adhérents, i.e., si $\bar{A} = A$.

Exemple 8.4 Soit A une partie quelconque de $\mathbf{R}^n$. Montrer que A est ouvert ssi son complémentaire $\complement A$ est fermé, que A est fermé ssi son complémentaire $\complement A$ est ouvert

Exemple 8.5 Montrer que les boules fermées sont des fermés, mais ne sont pas des ouverts. Montrer que les boules ouvertes ne sont pas des fermés.

Attention! Il existe des ensembles ni ouverts ni fermés, par exemple l'intervalle [0,1[. Noter aussi que l'ensemble $\mathbf{R}^n$ est ouvert et fermé.

Exemple 8.6 Soit A une partie quelconque de $\mathbf{R}^n$. Montrer que l'ensemble $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A. L'ensemble $\bar{A}$ est appelé adhérence (ou fermeture) de A.

1.2 Définitions.

La notion de limite est assez naturelle. Par exemple, elle est implicite quand on parle de vitesse instantanée d'un objet: en effet, la vitesse instantanée est la "valeur limite" des vitesses moyennes sur des intervalles de temps de plus en plus petits. La notion de limite dérive de celle de l'infini (l'infiniment grand ou l'infiniment petit): c'est ce qui se passe "à l'infini". Ainsi, 2π est la valeur limite quand n "tend vers l'infini" des périmètres des polygones à n côtés inscrits dans le cercle unité.

Précisons par des exemples numériques. Plus un nombre réel x est grand, plus 1/x est petit; on dit que 1/x tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et on écrit:

$$\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 1/x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La fonction sin(x)/x n'est pas définie en 0 mais on s'aperçoit en calculant des valeurs que les nombres sin(x)/x calculés pour des x de plus en plus petits mais en restant non nuls, se rapprochent d'une valeur limite, à savoir 1. On a:

$$\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1.$$

Exemple 9 A l'aide d'une calculette, on peut voir que $\lim_{x\to+\infty} 2^{1/x} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$, $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$ etc...

Une variable Si la notion de limite est intuitive, en donner une définition est beaucoup plus difficile. Le premier énoncé précis n'apparaît qu'au 19 ème siècle, dans le *Cours d'Analyse* du mathématicien français Cauchy.

(*) Soient x_0 et L deux nombres réels. On dit qu'une fonction f(x) a pour limite (ou tend vers) L quand x tend vers x_0 si les nombres f(x) deviennent arbitrairement proches de L pourvu que les points x s'approchent suffisamment de x_0.

Notes 1) Comprendre l'expression "arbitrairement proche pourvu que..." est essentiel: cela signifie que la distance entre f(x) et L devient plus petite que n'importe quel nombre > 0, pourvu que...

2) Il y a une condition sur x_0 pour que la définition soit raisonnable. On souhaite regarder les valeurs f(x) de f quand x se rapproche indéfiniment près de x_0, en restant différent de x_0. Encore faut il que l'on puisse, en restant à l'intérieur du domaine D_f de f, se rapprocher indéfiniment près de x_0. Par exemple, il ne peut être question d'étudier la limite de $\sqrt{x}$ quand x tend vers -1. La bonne hypothèse sur x_0 est la suivante: x_0 doit être un point d'accumulation du domaine D_f de f, c'est-à-dire $x_0 \in (D_f)'$. C'est en particulier le cas si D_f contient un voisinage **épointé** de x_0, i.e., un voisinage de x_0 privé de x_0.

La définition suivante reformule de façon axiomatique la définition donnée plus haut.

DEFINITION 1.2 *Soient* f(x) *une fonction,* $x_0 \in (D_f)'$ *et* L *un nombre réel. On dit que* f(x) *a pour limite* L *quand* x *tend vers* x_0 *, ce que l'on note* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *ou* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} L$ si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x-x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$$

Dans la définition suivante, x tend vers $+\infty$, i.e., devient très grand. Il faut supposer que D_f contienne des nombres arbitrairement grands, c'est-à-dire ne soit pas majoré, ce que nous noterons "$+\infty \in (D_f)'$ ".

DEFINITION 1.3 *Soient* f(x) *une fonction telle que* $+\infty \in (D_f)'$ *et* L *un nombre réel. On dit que* f(x) *a pour limite* L *quand* x *tend vers* $+\infty$ *ce que l'on note* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ *ou* $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} L$ si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A > 0)(\forall x \in D_f)(x > A \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$$

On obtient la définition de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ *en remplaçant* $x > A$ *par* $x < -A$ *dans la définition ci-dessus.*

Exemple 10 Etudier les limites des fonctions suivantes au(x) point(s) indiqués.

(a) $f(x) = 1/x$; $+\infty$ (b) $f(x) = ax+b$; x_0 quelconque

(c) $f(x) = |x|$; $3, x_0$ (d) $f(x) = 2^{1/x}$; $+\infty$

(e) $f(x) = x^2$; 3 (f) $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$; 0,1/2

Solution. (e) <u>Analyse du problème</u>: On soupçonne que $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$. Montrons le. Il s'agit de montrer que $|x^2-9|$ devient arbitrairement petit quand x se rapproche de 3. Dans un premier temps, on cherche à majorer $|x^2-9|$ pour comprendre pourquoi cette quantité va devenir "petite". On a $|x^2-9| = |x-3|\ |x+3|$. Il y a 2 termes: le premier $|x-3|$ est petit car x est proche de 3; le second $|x+3|$ est proche de 6; le produit $|x-3|\ |x+3|$ vaut en gros 6 $|x-3|$ et est donc "petit".

Recherche du α: Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Comment choisir $\alpha > 0$ pour que la condition $|x-3| < \alpha$ garantisse $|x^2-9| = |x-3|\ |x+3| < \varepsilon$? Si déjà, on choisit $\alpha < 1$, on aura $2 < x < 4$ et donc $|x+3| < 7$. Si alors on s'arrange pour qu'on ait aussi $\alpha < \varepsilon/7$, on obtiendra

$$|x^2-9| = |x-3|\ |x+3| < 7\ (\varepsilon/7) = \varepsilon\ ,$$

soit la conclusion désirée.

Rédaction: Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $\alpha = \min(1,\varepsilon/7)$. Soit $x \in D_f$ tel que $|x-3| < \alpha$. En remarquant que $|x-3| < \alpha < 1$ entraîne $2 < x < 4$ et donc $|x+3| < |x| + |3| < 7$, on obtient:

$$|x^2-9| = |x-3|\ |x+3| < 7\ (\varepsilon/7) = \varepsilon\ ,$$

soit la conclusion désirée.

Remarque. La notion de limite a un caractère "local":

- le comportement de la fonction loin de x_o n'a aucune incidence sur la limite en x_o. On peut donc restreindre à loisir l'étude de l'inégalité $|f(x)-L| < \varepsilon$ à un voisinage donné de x_o. C'est ce que nous avons fait dans l'exemple ci-dessus quand nous avons décidé de choisir $\alpha < 1$ et par là de ne s'occuper que des x dans l'intervalle]2,3[(1/2 ou 2 à la place de 1 aurait tout aussi bien marché).
- par contre, au voisinage de x_o, les valeurs de f diffèrent "peu" de la valeur limite L.

Exemple 11 Soit f une fonction telle que $\lim_{x\to x_o} f(x) = L \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe un voisinage de x_o sur lequel f est bornée.

Solution. Par définition, on a

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \alpha > 0)(\forall\ x \in D_f)(0 < |x-x_o| < \alpha \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$$

Cela signifie que, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, $\varepsilon = 1$ par exemple, il existe un intervalle $]x_o-\alpha,x_o+\alpha[$ sur lequel la fonction f prend des valeurs toutes comprises entre $L-\varepsilon$ et $L+\varepsilon$. (Evidemment la longueur 2α de l'intervalle dépend de ε). En particulier, la fonction f est bornée sur l'intervalle $]x_o-\alpha,x_o+\alpha[$.

Considérons une fonction f telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. Soit $\varepsilon > 0$. On sait, par définition, qu'à partir d'un certain nombre A, les nombres f(x) seront dans l'intervalle $]L-\varepsilon,L+\varepsilon[$. Le nombre A dépend évidemment de ε: plus ε est petit, plus A sera grand.

Exemple 12 Soit $f(x) = (x^3-5x+1)/x^3$. Trouver A tel que

$$x > A \Rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon,$$

pour ε = 1/100, 1/1000. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

n variables La notion de "limite" conserve un sens pour des fonctions de plusieurs variables.

DEFINITION 1.4 *Soient* $f(x_1,...,x_n)$ *une fonction de n variables,* $m_o(a_1,...,a_n) \in (D_f)'$ *et* L *un nombre réel. On dit que* $f(x_1,...,x_n)$ *a pour limite* L *quand* x_1 *tend vers* a_1,..., x_n *tend vers* a_n *ce que l'on note*

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \vdots \\ x_n\to a_n}} f(x_1,...,x_n) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{m\to m_o} f(m) = L \quad si$$

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \alpha > 0)(\forall\, m(x_1,...,x_n) \in D_f)\left(\begin{cases} |x_1-a_1| < \alpha \\ \quad\vdots \\ |x_n-a_n| < \alpha \\ m\neq m_o \end{cases} \Rightarrow |f(x_1,...,x_n)-L| < \varepsilon\right)$$

Remarque. La Déf.1.3 généralise la Déf.1.1. Là aussi, on n'a fait que traduire la condition: "les nombres $f(x_1,...,x_n)$ deviennent arbitrairement proches de L pourvu que $m(x_1,...,x_n)$ s'approche suffisamment de $m_o(a_1,...,a_n)$. La notion de voisinage permet d'unifier les deux définitions: d'une manière générale, on a $\lim_{m\to m_o} f(m) = L$ si
(*) pour tout voisinage W de L, il existe un voisinage V de m_o tel que $f(V\setminus\{m_o\})$ soit contenu dans W.

Exemple 13 Etudier les limites des fonctions suivantes au point indiqué.

(a) $f(x,y) = x$; (x_o,y_o) (c) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$; $(0,0,0)$

(b) $f(x,y) = ax+by$; (x_o,y_o) (d) $f(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$; $(1,2,...,n)$

Solution. (b) Montrons que f(x,y) a pour limite $f(x_o,y_o) = ax_o+by_o$ quand m(x,y) tend vers $m_o(x_o,y_o)$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit

$$\alpha = \min(\frac{\varepsilon}{2|a|}, \frac{\varepsilon}{2|b|}, 1).$$

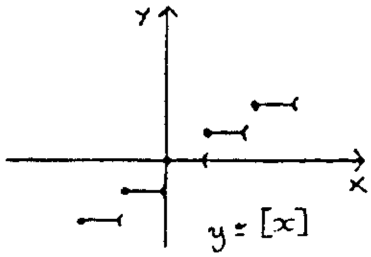
Pour tout $m(x,y) \in D_f$ tel que $|x-x_o| < \alpha$ et $|y-y_o| \le \alpha$, on a

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_o,y_o)| &= |a(x-x_o)+b(y-y_o)| \\ &\le |a|\,|x-x_o| + |b|\,|y-y_o| < \frac{|a|\varepsilon}{2|a|} + \frac{|b|\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon.\end{aligned}$$

1.3 Variantes de la définition.

Limites à droite et à gauche **Exemple 14** La fonction f(x) = [x] n'a pas de limite quand x tend vers 0 (Cf. Exemple 25 pour une démonstration). Cependant, les nombres [x] se rapprochent arbitrairement près de 0 quand x s'approche de 0 par valeurs supérieures et les nombres [x] se rapprochent arbitrairement près de -1 quand x s'approche de 0 par valeurs inférieures. Il est d'usage de dire que [x] a une limite à droite et une limite à gauche quand x tend vers 0, qui valent respectivement 0 et -1. On note:

$$\lim_{x\to 0^+} [x] = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^-} [x] = -1$$



De façon générale, pour demander qu'une variable x_i tende vers a_i par valeurs supérieures (i.e., $x_i \to a_i^+$) ou inférieures (i.e., $x_i \to a_i^-$)), il suffit de remplacer dans la Déf.1.4 la condition "$|x_i-a_i| < \alpha$" respectivement par:

(i) $a_i < x_i < a_i+\alpha$ (i.e., $0 < x_i-a_i < \alpha$)
(i') $a_i-\alpha < x_i < a_i$ (i.e., $-\alpha < x_i-a_i < 0$)

Exemple 15 La définition de $\lim\limits_{\substack{x\to 2^- \\ y\to 0 \\ z\to -1^+}} f(x,y,z) = 8$ est:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \alpha > 0)(\forall\, m(x,y,z) \in D_f)\left(\begin{cases} -\alpha < x-2 < 0 \\ |y| < \alpha \\ 0 < z+1 < \alpha \end{cases} \Rightarrow |f(x,y,z)-8| < \varepsilon\right)$$

Exemple 16 Etudier les limites, à droite, à gauche des fonctions suivantes au(x) point(s) indiqué(s).
(a) $f(x) = [x]$; x_0 entier, puis x_0 non entier.
(b) $f(x) = x/|x|$; 0
(c) $f(x) = (x^2-4)/|x-2|$; 2
(d) $f(x) = x/|x| + [y]$; (0,3)
(d) $f(x) = x[y]/|x|$; (0,3).

Limites à droite et à gauche ont un intérêt théorique important pour les fonctions d'une variable. On y reviendra en §1.4.

Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

De façon générale, pour demander qu'une variable x_i tende vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, il suffit de remplacer dans la **Déf.1.4** la condition "$|x_i-a_i| < \alpha$" respectivement par:

(ii) $x_i > 1/\alpha$
(ii') $x_i < -1/\alpha$

Exemple 17 La définition de $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ y\to +\infty \\ z\to -\infty}} f(x,y,z) = 0$ est:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \alpha > 0)(\forall\, m(x,y,z) \in D_f)\left(\begin{cases} 0 < |x-2| < \alpha \\ y > 1/\alpha \\ z < -1/\alpha \end{cases} \Rightarrow |f(x,y,z)| < \varepsilon\right)$$

Limites infinies

La définition de limite se généralise aisément au cas d'une limite infinie. Il suffit de comprendre la condition "les nombres $f(x_1,\ldots,x_n)$ deviennent arbitrairement proches de $+\infty$ (resp. $-\infty$) pourvu que..." comme "les nombres $f(x_1,\ldots,x_n)$ deviennent arbitrairement grands (resp. petits) pourvu que...". Il suffit donc de remplacer dans la Déf.1.4 la condition "$|f(x_1,\ldots,x_n)-L| < \varepsilon$" par:

(iii) $f(x_1,...,x_n) > \varepsilon$ pour $+\infty$

(iii') $f(x_1,...,x_n) < -\varepsilon$ pour $-\infty$

Plutôt que la lettre ε qu'on réserve pour des quantités petites, on emploie plus communément la lettre A.

Exemple 18 La définition de $\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to +\infty\\ z\to -\infty}} f(x,y,z) = +\infty$ est:

$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall m(x,y,z) \in D_f)(\begin{cases} 0 < |x-2| < \alpha \\ y > 1/\alpha \\ z < -1/\alpha \end{cases} \Rightarrow f(x,y,z) > A)$$

Exemple 19 Démontrer que

$\lim_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1/(x^2+y^2) = +\infty$

Limites par valeurs supérieures et inférieures

On note parfois L^+ (resp. L^-) la limite pour indiquer que les nombres $f(x_1,...,x_n)$ se rapprochent de L en restant supérieur à L (resp. inférieur à L). On obtient la définition précise en remplaçant dans la Déf.1.4 la condition "$|f(x_1,...,x_n)-L| < \varepsilon$" par:

(iv) $0 \le f(x_1,...,x_n)-L < \varepsilon$ pour L^+

(iv') $-\varepsilon < f(x_1,...,x_n)-L \le 0$ pour L^-

Exemple 20 $\lim_{x\to +\infty} 1/x = 0^+$, $\lim_{x\to -\infty} 1/x = 0^-$

1.4 Propriétés des limites.

Unicité de la limite

Intuitivement il est clair qu'une fonction, si elle a une limite au voisinage d'un point donné, ne peut en avoir qu'une seule. En effet, comment l'ensemble des nombres f(m) pourrait-il se rapprocher arbitrairement près, de 2 nombres distincts à la fois?

Exemple 21 Rédiger une démonstration précise.

Sur l'existence des limites

Maintenant, il faut marquer qu'**une fonction n'a pas forcément de limite** au voisinage d'un point donné. Nous allons en voir 3 exemples: la fonction sinus en $+\infty$, la fonction [x] en 0, la fonction x/y au point (0,0). Intuitivement, il est clair qu'il n'existe aucun nombre fixe[1] L duquel se rapprochent ces fonctions quand la variable tend vers le point m_0 considéré. Le démontrer est plus délicat. En général, on procède de la façon suivante: on montre que

---

[1] Par nombre, nous entendons ici nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

(*) il existe 2 nombres distincts L_1 et L_2 et 2 familles infinies de points m du domaine qui tendent vers m_o et tels que les valeurs f(m) correspondantes tendent vers L_1 pour une famille et L_2 pour l'autre.

c'est-à-dire, énoncé de façon plus rigoureuse:

(* bis) il existe 2 nombres distincts L_1 et L_2 et 2 sous-ensembles infinis F_1 et F_2 du domaine D_f telle que:

(i) m_o est un point d'accumulation de F_1 et de F_2.

(ii) Les fonctions $f|_{F_1}$ et $f|_{F_2}$ restrictions de f à F_1 et de F_2 ont respectivement pour limite L_1 et L_2 quand m tend vers m_o, ce qu'on note:

$$\lim_{\substack{m \to m_o \\ m \in F_1}} f(m) = L_1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{m \to m_o \\ m \in F_2}} f(m) = L_2$$

Sous la condition (*), l'ensemble de tous les nombres f(m) ne peut se rapprocher arbitrairement près d'un unique nombre L; la fonction f n'a donc pas de limite au point m_o.

[Plus formellement, il faut dire: la définition de la limite d'une restriction $f|_F$ s'obtient en remplaçant dans la définition générale l'expression "$\forall\ m \in D_f$" par "$\forall\ m \in D_f \cap F$". Donc, si f a pour limite L alors toutes les restrictions de f ont pour limite L. Sous la condition (*), une fonction f ne peut donc pas avoir de limite.]

La condition (*) est donc une condition suffisante pour qu'une fonction n'ait pas de limite.

Note. En fait, on peut montrer que le critère (*) est une condition nécessaire et suffisante. C'est une conséquence d'un résultat important de topologie, le Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exemple 22 Montrer que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Solution. Considérons les 2 familles de nombres réels

$$F_1 = \{\ x = k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\ \} \text{ et } F_2 = \{\ x = \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\ \}.$$

On a

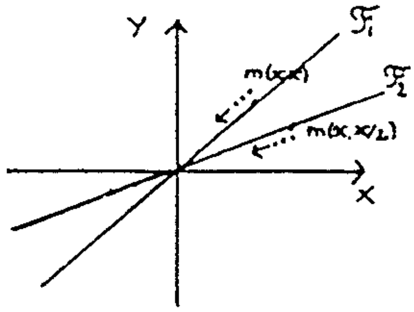
$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in F_1}} \sin(x) = \lim_{k \to +\infty} \sin(k\pi) = \lim_{k \to +\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in F_2}} \sin(x) = \lim_{k \to +\infty} \sin(\pi/2 + k\pi) = \lim_{k \to +\infty} 1 = 1$$

Comme $1 \neq 0$, le critère (*) est satisfait: la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Exemple 23 Montrer que la fonction f(x,y) = x/y n'a pas de limite en $m_o(0,0)$.

Solution. Considérons les 2 familles de nombres réels

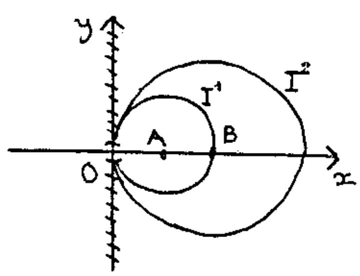


$F_1 = \{ m(x,x) \mid x \in \mathbf{R}\setminus\{0\} \}$ et $F_2 = \{ (x,x/2) \mid x \in \mathbf{R}\setminus\{0\} \}$.
F_1 et F_2 sont deux droites passant par l'origine privées de l'origine; en particulier, l'origine est un point d'accumulation de F_1 et de F_2. Et on a

$$\lim_{\substack{m\to m_0\\ m\in F_1}} f(m) = \lim_{x\to+\infty} f(x,x) = \lim_{x\to+\infty} x/x = 1$$
$$\lim_{\substack{m\to m_0\\ m\in F_2}} f(m) = \lim_{x\to+\infty} f(x,x/2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x/2} = 2$$

Comme $1 \neq 2$, le critère (*) est satisfait: la fonction f n'a pas de limite en (0,0).

Exemple 24 Soit $f(x,y) = (x^2+y^2)/2x$. Représenter sur un même graphe le domaine de définition de f, la ligne de niveau 1, notée l^1, la ligne de niveau 2, notée l^2. Déterminer la limite de f(x,y) lorsque (x,y) tend vers (0,0), en restant sur l^1, en restant sur l^2. La fonction f admet-elle une limite au point (0,0)?



Solution. La fonction f est définie sur $\mathbf{R}^2\setminus Ox$. Les lignes de niveau l^1 et l^2 sont respectivement les cercles C(A(1,0),1) et C(B(2,0),2) privés de l'origine. L'origine O(0,0) est un point d'accumulation de l^1 et de l^2. Sur une ligne de niveau c, la fonction f(x,y) est identiquement égale à c. On a donc

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in l^1}} f(x,y)) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in l^1}} 1 = 1$$
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in l^2}} f(x,y)) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in l^2}} 2 = 2$$

Comme $1 \neq 2$, la fonction f(x,y) n'a pas de limite au point O(0,0).

Exemple 25 Montrer que la fonction [x] n'a pas de limite en 0.

Solution. Soient $F_1 =]-1,0[$ et $F_2 =]0,1[$. On a:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in F_1}} [x] = \lim_{x\to 0} -1 = -1 \qquad \neq \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in F_2}} [x] = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Limites à droite et à gauche Dans ce dernier exemple, on a en fait raisonné sur les limites à droite et à gauche de 0 de f. On peut également les utiliser pour montrer qu'une limite existe, en vertu du résultat suivant.

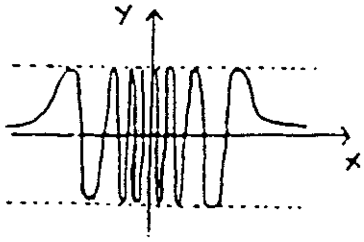
THEOREME 1.5 *Soit f une fonction d'une variable. La fonction f a une limite L quand x tend vers x_0 ssi L est à la fois limite à droite et à gauche de x_0 de f.*

Preuve. Dans le sens $\Rightarrow$, c'est une conséquence du critère (*). Pour la réciproque, il suffit de remarquer que les conditions

$$0 < x-x_0 < \alpha \text{ et } -\alpha < x-x_0 < 0$$

des définitions de $L = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ et $L = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ s'unissent pour donner la condition

$$0 < |x-x_0| < \alpha$$
de la définition de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.



Exemple 26 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x > 2 \\ a & \text{si } x < 2 \end{cases}.$$

Etudier la limite de f en 2.

Note. Il existe des fonctions qui n'admettent ni limite à droite ni limite à gauche; par exemple, la fonction $x \to \sin(1/x)$.

§2. CALCUL DES LIMITES

2.1 Théorèmes généraux.

Dans ce paragraphe et pour le reste du chapitre, m_0 désigne un point au sens large, c'est à dire un point à n coordonnées pouvant être des nombres réels, $+\infty$, $-\infty$, a_i^+, a_i^-... D'autre part, on suppose implicitement dans tous les énoncés que m_0 est un point d'accumulation du domaine des fonctions dont on envisage la limite.

THEOREME 2.1 *Soient* f *et* g *deux fonctions de* n *variables telles que* $\lim\limits_{m \to m_0} f(m) = p$ *et* $\lim\limits_{m \to m_0} g(m) = q$, *où* p *et* q *sont deux nombres réels. Alors, on a*

(i) $\lim\limits_{m \to m_0} (f+g)(m) = p+q$

(ii) $\lim\limits_{m \to m_0} (fg)(m) = pq$

(iii) si $q \neq 0$, $\lim\limits_{m \to m_0} (f/g)(m) = p/q$.

Preuve. Nous allons démontrer (ii) pour les fonctions d'une variable et laisser le reste du Th.2.1 en exercice. On écrit

$$f(x)g(x)-pq = (f(x)-p)g(x) + p(g(x)-q).$$

D'après l'exemple 11 du paragraphe §1, la fonction g est bornée sur un voisinage de x_0. C'est-à-dire, il existe $A > 0$ et $\alpha_1 > 0$ tel que

(*) $|g(x)| < A$ pour tout $x \in]x_0-\alpha_1, x_0+\alpha_1[$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = p$, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que

(**) $|f(x)-p| < \varepsilon/2A$ pour tout $x \in]x_0-\alpha_2, x_0+\alpha_2[$

Par définition de $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = q$, il existe $\alpha_3 > 0$ tel que

(***) $|g(x)-q| < \varepsilon/(2|p|+1)$ pour tout $x \in]x_0-\alpha_3, x_0+\alpha_3[$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Pour tout $x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, les trois majorations (*), (**) et (***) sont valables. On obtient:

$$|f(x)g(x)-pq| \leq |f(x)-p|\,|g(x)| + |p|\,|g(x)-q|$$

$$< \frac{A\varepsilon}{2A} + \frac{|p|\varepsilon}{2|p|+1}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Exemple 1 Calculer les limites suivantes:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10}$ au point 0

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{x^3z+xy+y^2}{x+y+z}$ au point (1,2,3)

Les résultats ci-dessus s'étendent au cas de limites infinies, avec quelques restrictions concernant les règles de calcul avec $+\infty$ et $-\infty$. Sont valables les règles suivantes:

$$\begin{cases} (+\infty) + p = +\infty \\ (-\infty) + p = -\infty \\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty \\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty \end{cases}$$

mais $(+\infty) + (-\infty)$ est indéterminé.

$$\begin{cases} p \times (+\infty) = +\infty \text{ si } p > 0 \\ p \times (+\infty) = -\infty \text{ si } p < 0 \\ p \times (-\infty) = -\infty \text{ si } p > 0 \\ p \times (-\infty) = +\infty \text{ si } p < 0 \\ (+\infty) \times (+\infty) = +\infty \\ (-\infty) \times (+\infty) = -\infty \end{cases}$$

mais $0 \times (\pm \infty)$ est indéterminé.

$$\begin{cases} 1/+\infty = 0^+ \\ 1/-\infty = 0^- \\ 1/0^+ = +\infty \\ 1/0^- = -\infty \end{cases}$$

mais ∞/∞ et $0/0$ sont indéterminés

Les cas $(+\infty)+(-\infty)$, $0 \times (+\infty)$, $0 \times (-\infty)$, ∞/∞ $(= \infty \times 0)$ et $0/0$ $(= 0 \times \infty)$ sont appelés **formes indéterminées.** Le Th.2.1 ne permet pas de conclure dans ces cas-là. Cela ne veut pas dire que la limite n'existe pas mais qu'il faut utiliser une autre méthode pour conclure. Il y a diverses techniques qui permettent de "lever l'indétermination": simplification dans une fraction, mise en facteur du terme prépondérant, multiplication par la quantité conjuguée (Cf. Exemple 2)... Ce sont des méthodes ad hoc; c'est l'utilisation d'équivalents qui rendra plus systématique la résolution de ce genre d'exercices.

Exemple 2 Etudier les limites suivantes:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x}$ en 2

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3+x+1}{3x^3-x^2+7x}$ en $+\infty$

(c) $f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ en $+\infty$.

(d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x\ \mathrm{Log}(x)}$ en 0^+.

Le résultat suivant, dit de composition des limites est d'application constante. Dans la pratique, on peut "composer des limites". Cependant c'est faux en toute généralité (Cf. Exemple 6) si on ne rajoute pas certaines hypothèses. On pourra vérifier que les hypothèses ci-dessous sont suffisantes.

THEOREME 2.2 *Soient* $f(x_1,...,x_n)$ *une fonction de n variables et* $g(x)$ *une fonction de une variable telles que*

$$\lim_{m \to m_0} f(m) = a \quad et \quad \lim_{x \to a} g(x) = L.$$

Alors on peut conclure que

$$\lim_{m \to m_0} gof(m) = L$$

si l'une des 3 hypothèses suivantes est satisfaite:

(i) $g(a) = L$
(ii) g *n'est pas définie en* a
(iii) *il existe un voisinage épointé de* m_0 *sur lequel* f *ne prend jamais la valeur* a.

Exemple 3 Etudier les limites suivantes:
(a) $f(x) = \sqrt{(2x+1)/x}$ en 2, en $+\infty$
(b) $f(x) = \exp(x^2-y^2)$ en $(0,0)$, en $(+\infty,0)$
(c) $f(x) = \sin(x^2+y^2)/(x^2+y^2)$ en $(0,0)$

Le théorème suivant est un résultat largement intuitif, voire banal; sa démonstration est facile (nous la laissons en exercice). Pourtant c'est un résultat fondamental pour toute l'analyse réelle.

THEOREME 2.3 *Soient* f, g et h *trois fonctions de* n *variables définies sur un voisinage* V *de* m_0

$$\text{(i)} \quad \left\{\begin{array}{l} f(m) \le g(m) \le h(m) \quad \text{pour tout } m \in V \\ \lim\limits_{m \to m_0} f(m) = \lim\limits_{m \to m_0} h(m) = L \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{m \to m_0} g(m) = L$$

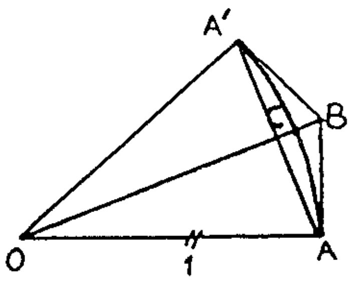
$$\text{(ii)} \quad \left\{\begin{array}{l} |f(m)-L| \le g(m) \quad \text{pour tout } m \in V \\ \lim\limits_{m \to m_0} g(m) = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{m \to m_0} f(m) = L$$

$$\text{(iii)} \quad \left\{\begin{array}{l} f(m) \ge g(m) \quad \text{pour tout } m \in V \\ \lim\limits_{m \to m_0} g(m) = +\infty \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{m \to m_0} f(m) = +\infty$$

Exemple 4 En utilisant la figure ci-contre, montrer que

$$\sin(x) < x < \mathrm{tg}(x) \text{ pour tout } x \in \,]0,\pi/2[$$

En déduire que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$



Solution. On a

$$\begin{cases} AA' = 2\sin(x) \\ \text{long. arc } AA' = 2x \end{cases}$$

Comme le plus court chemin de A à A' est la ligne droite, on a $2\sin(x) < 2x$. Considérons ensuite le secteur angulaire (OAC); son aire vaut $x/2$ [1]. Elle est inférieure à l'aire du triangle (OAB) qui vaut $\mathrm{tg}(x)/2$. Cela fournit la seconde partie de l'inégalité de l'énoncé.

On peut réécrire cette inégalité

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \text{ pour tout } x \in \,]0,\pi/2[$$

En passant à la limite, i.e., en appliquant le Th.2.3 (i), on obtient bien que $\sin(x)/x$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

Exemple 5 Etudier les limites suivantes:

(a) $f(x) = x \sin(a/x)$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ en (0,0)

(Indication: montrer que, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a $|f(x,y)| \leq |x|$)

Exemple 6 Montrer que la conclusion du Th.2.2 est fausse pour

$$f(x) = x \sin(1/x) \text{ et } g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x \neq 0 \end{cases}.$$

Montrer qu'aucune des hypothèses (i), (ii), (iii) n'est satisfaite.

2.2 Limites classiques.

Limites par substitution

Soit à étudier la limite de $f(x_1,...,x_n)$ quand $m(x_1,...,x_n)$ tend vers $m_0(a_1,...,a_n)$. Quand les théorèmes généraux s'appliquent, il suffit très souvent de substituer les coordonnées $(a_1,...,a_n)$ du point m_0 aux variables $(x_1,...,x_n)$ pour obtenir la limite. Il faut bien comprendre que cette procédure n'est pas toujours légitime. Il peut arriver:

$\boxed{1}$ que la substitution fasse apparaître des formes indéterminées.

$\boxed{2}$ que l'on soit dans l'un des cas où le théorème de composition des limites ne s'applique pas.

Exemple 7 Soit $f(x) = [-x^2]$. On a $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ et $f(0) = 0$.

---

[1] De façon générale, l'aire d'un secteur angulaire de rayon r et d'angle $\theta \in [0,2\pi]$ vaut $\frac{\theta r^2}{2}$.

C'est ce type de questions qui conduit à l'idée de continuité. Nous y reviendrons au chapitre suivant. Pour le moment, retenons que l'on peut calculer les limites par substitution si cela a un sens (i.e., si $f(a_1,\dots,a_n)$ est défini) et si la fonction est construite à partir des fonctions usuelles du Ch.3.

Fonctions monotones **THEOREME 2.4** _ (a) *Soit* $f(x)$ *une fonction croissante et non majorée (i.e., qui prend des valeurs arbitrairement grandes). Alors*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

(b) *Soit* $f(x)$ *une fonction croissante et majorée. Alors* f *admet une limite finie en* $+\infty$.

Preuve. (a) Il s'agit de montrer que

$$(\forall B > 0)(\exists A > 0)(\forall x \in D_f)(x > A \Rightarrow f(x) > B)$$

Soit $B > 0$. La fonction f étant non majorée, il existe A tel que $f(A) > B$. Soit maintenant x quelconque dans D_f tel que $x > A$. Comme f est croissante, on obtient: $f(x) \geq f(A) > B$.

La démonstration de (b) s'appuie sur une propriété fondamentale de l'ensemble des nombres réels, que nous admettrons.

THEOREME-DEFINITION 2.5 *Soit* S *une partie non vide et majorée de* **R**. *Alors il existe un plus petit majorant de* S. *Ce nombre réel est appelé* ***borne supérieure*** *de* S. *Par définition donc, la borne supérieure d'un ensemble* S *est le plus petit élément qui soit supérieur à tous les éléments de* S.

Exemple 8 Le nombre réel 1 est la borne supérieure de $S = [0,1[$. En effet, les majorants de S sont tous les nombres de l'intervalle $[1,+\infty[$; 1 est le plus petit de ces nombres.

Remarques. (a) Rappelons que "majorant" signifie "nombre plus grand que" et que "majorant de S" signifie "nombre plus grand que tous les éléments de S".

(b) Bien comprendre que la borne supérieure d'un ensemble S

- n'existe pas forcément (par exemple **N**, **R** n'ont pas de borne supérieure).
- est un majorant de S (c'est le plus petit majorant de S).
- n'est pas en général un élément de S (voir Exemple 8).

(c) C'est ce dernier point qui distingue les notions de borne supérieure et de plus grand élément. Le nombre réel 1 est la borne supérieure de $[0,1[$ mais $[0,1[$ n'a pas de plus grand élément. Le nombre réel 1 est la borne supérieure de $[0,1]$; il est dans $[0,1]$, c'est donc aussi son plus grand élément.

Preuve de Th.2.4 (b). Il faut d'abord deviner quelle va être la limite. Considérons l'ensemble image $f(D_f)$; par hypothèse, c'est un ensemble non vide et majoré. D'après le Th.2.5, il admet une borne supérieure M. Montrons que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = M$$

Il s'agit de montrer que

(*) $\quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists A > 0)(\forall x \in D_f)(x > A \Rightarrow |f(x)-M| < \varepsilon)$

Soit $\varepsilon > 0$. Le nombre réel $M-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $f(D_f)$ (car il est strictement plus petit que M qui est le plus petit des majorants). Donc il existe $x_0 \in D_f$ tel que $f(x_0) > M-\varepsilon$. Pour $x > x_0$, on a

$$M-\varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq M < M+\varepsilon$$

en particulier

$$M-\varepsilon < f(x) < M+\varepsilon.$$

Nous avons donc établi (*) pour $A = x_0$.

Note. Le Th.2.4(b) reste vrai si $+\infty$ est remplacé par x_0^+ ou x_0^- (où $x_0 \in \mathbf{R}$) et si "croissante" est remplacé par "décroissante". Nous laissons le lecteur énoncer et démontrer ces diverses variantes du Th.2.4.

Les fonctions Log et exp vérifient les hypothèses du Th.2.4(a) (Cf. Exercice 49). On a donc

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{Log}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$$

Exemple 9 En déduire les limites suivantes:

$$\lim_{x \to 0^+} \mathrm{Log}(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0^+$$

(Utiliser $\mathrm{Log}(x) + \mathrm{Log}(1/x) = 0$ et $\exp(-x) = 1/\exp(x)$).

Croissance comparée des fonctions exponentielle, puissance et logarithme

Les exemples suivants expliquent comment calculer les limites de fonctions construites à partir d'exponentielles, de puissances de x et de logarithmes.

Exemple 10 (Exponentielle et puissance en $+\infty$)

(a) $f(x) = e^x/x$ (b) $f(x) = e^x/x^2$ (c) $f(x) = e^x/x^n$

Solution (a). Pour (a), (b) et (c), il faut partir de l'inégalité

$$e^x > x \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}$$

(qui se démontre par exemple en étudiant la fonction e^x-x).

Pour (a), on l'écrit pour $x/2$ (avec $x > 0$), soit

$$e^{x/2} > x/2$$

En élevant au carré, on obtient $(e^{x/2})^2 = e^x > x^2/4$, dont on déduit

$$e^x/x > x/4$$

Le Th.2.3 (iii) permet de conclure que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Exemple 11 (Log et puissance en $+\infty$)

(a) $f(x) = (\mathrm{Log}(x))/x^2$ (b) $(\mathrm{Log}(x))/\sqrt{x}$

Solution (a). On pose $u = \mathrm{Log}(x)$ soit $x = e^u$. Cela donne $f(x) = u/e^{2u}$. Le théorème de composition des limites permet d'écrire:

$$\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{Log}(x))/x^2 = \lim_{u\to+\infty} u/e^{2u}$$

On est ramené au cas de l'exemple 10. La limite cherchée est nulle.

Exemple 12 (Exponentielle et puissance en $-\infty$)

(a) $f(x) = x\, e^x$

Solution. On se ramène au cas de l'exemple 10 en posant $u = -x$ et en utilisant $e^{-x} = 1/e^x$. La limite cherchée est 0.

Exemple 13 (Log et puissance en 0^+)

(a) $f(x) = x\,\mathrm{Log}(x)$ (b) $f(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{Log}(x)$

Solution. On se ramène au cas de l'exemple 12 en posant $u = \mathrm{Log}(x)$.

Ces idées se généralisent aisément et conduisent au principe suivant appelé "règle de croissance comparée des fonctions exponentielle, puissance et logarithme".

(*) En présence d'une forme indéterminée dans un produit, exp($*$) l'emporte sur toute puissance de $*$ en $+\infty$ et les puissances de $*$ l'emportent sur toute puissance de Log $*$ en $+\infty$ et en 0^+.

Cette règle sera énoncée plus rigoureusement plus loin (Cf. §3 Exemple 17).

Exemple 14 Etudier les limites suivantes:

(a) $f(x) = (x^2+2x+1)\mathrm{Log}(1+x)$ en -1^+

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{Log}(x)+\sqrt{x}}$ en $+\infty$

(c) $f(x) = x^{1/x}$ en $+\infty$

(d) $f(x) = x\,\mathrm{Log}(1/x)\, e^{-x}$ en $+\infty$

Solution. (a) f(x) est de la forme $(*)^2\mathrm{Log}(*)$ avec $* = 1+x$ tendant vers 0. Donc f a pour limite 0.

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}(1 + \mathrm{Log}(x)/\sqrt{x})} = \dfrac{x^{3/2}}{1 + \mathrm{Log}(x)/\sqrt{x}}$

D'après la règle, le dénominateur tend vers $1+0 = 1$. D'où f(x) tend vers $+\infty$.

(c) $f(x) = \exp(\mathrm{Log}(x)/x)$ tend vers $\exp(0) = 1$ en $+\infty$.

(d) $f(x) = -x\mathrm{Log}(x)/e^x$; e^x l'emporte: la limite est nulle.

On fera attention de vérifier qu'on est bien dans le cadre d'application de la règle. Voici quelques exemples où la règle ne s'applique pas.

Exemple 15 (a) $\lim_{x\to 0} e^x \, \mathrm{Log}(x) = -\infty$ (et non pas 1 comme le voudrait la règle): ici, la règle ne s'applique pas car elle ne dit rien sur la comparaison entre e^x et Log(x) en 0.

(b) On verra plus tard que $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Log}(1+x)}{x} = 1$
(et non pas ∞ comme le voudrait la règle): la règle ne s'applique pas à Log(1+x) car $* = 1+x$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

§3. EQUIVALENTS

3.1 Définitions.

Pour x grand, x^2+x et x^2 sont du même ordre de grandeur; par exemple, pour $x = 100$, $x^2+x = 10100$ et $x^2 = 10000$. Similairement, pour x petit cette fois, sin(x) et x sont "presque égaux", "équivalents". Comment rendre compte de cette propriété?

DEFINITION 3.1 *Soient* $f(x_1,\dots,x_n)$ *et* $g(x_1,\dots,x_n)$ *deux fonctions de* n *variables. Soit* $m_o \in (D_f \cap D_g)'$. *On dit que les fonctions* f *et* g *sont équivalentes au voisinage de* m_o, *ce qu'on note* $f(x_1,\dots,x_n) \underset{m_o}{\sim} g(x_1,\dots,x_n)$ *si*

$$\lim_{m\to m_o} f(x_1,\dots,x_n) \,/\, g(x_1,\dots,x_n) = 1$$

Note. On demande en particulier à m_o d'être un point d'accumulation du domaine de f/g. En particulier, la fonction g ne peut être la fonction identiquement nulle.

Exemple 1 On vérifie les équivalences (ou non équivalences) suivantes:

(a) $x^2+x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ mais x^2+x et x^2 ne sont pas équivalents en 0.

(b) $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ (c) $x+2 \underset{0}{\sim} 2$

(d) $x^2-4 \underset{2}{\sim} 4(x-2)$ (e) $x + \mathrm{Log}(x) \underset{+\infty}{\sim} x$

(f) $x^2y+xy \underset{(0,0)}{\sim} xy$

Comme le montre (a), l'équivalence ou non de deux fonctions dépend du point m_o où le problème est posé.

Exemple 2 Existe-t-il des points au voisinage desquels les fonctions x et x^2 sont équivalents?

Remarque. Soient f, g, h sont trois fonctions non identiquement nulles au voisinage d'un point m_o. Il est immédiat que

$$\begin{cases} f \underset{m_o}{\sim} f & \text{(Réfléxivité)} \\ f \underset{m_o}{\sim} g \Rightarrow g \underset{m_o}{\sim} f & \text{(Symétrie)} \\ f \underset{m_o}{\sim} g \text{ et } g \underset{m_o}{\sim} h \Rightarrow f \underset{m_o}{\sim} h & \text{(Transitivité)} \end{cases}$$

La relation "être équivalent au voisinage de m_o" est une relation d'équivalence.

PROPOSITION 3.2 *Soient* f *et* g *deux fonctions de* n *variables.*
Si $f \underset{m_o}{\sim} g$ *et* $\lim_{m \to m_o} g = L$ *alors*

$$\lim_{m \to m_o} f = L.$$

Preuve. Il suffit d'écrire $f = g\left(\frac{f}{g}\right)$ et d'appliquer les théorèmes généraux sur les limites.

Ce résultat, en dépit de sa simplicité, est d'une grande utilité. Il permet de simplifier le calcul des limites. En effet, d'après la Prop.3.2, on peut, dans le calcul de la limite d'une fonction, remplacer celle-ci par une fonction équivalente sans changer la limite. Dans la suite de cette section, on apprend comment calculer des équivalents "simples" d'une fonction.

3.2 Equivalents classiques.

Tout d'abord, cette observation élémentaire qu'il faut garder à l'esprit.

(*) Si une fonction f admet pour limite au voisinage de m_o un nombre réel L non nul, alors $f \underset{m_o}{\sim} L$.

Trouver un équivalent n'est un véritable problème que quand la fonction en question a pour limite 0 ou ∞ (ou pas de limite) au point considéré.

Polynômes Pour les polynômes, la règle est la suivante:

(a) Au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, une fonction polynôme est équivalente à son terme de plus haut degré. C'est à dire:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_o \underset{\infty}{\sim} a_n x^n \qquad (\text{si } a_n \neq 0)$$

(b) Au voisinage de 0, une fonction polynôme est équivalente à son terme de plus bas degré.

Preuve (a). Il s'agit de vérifier que

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_o}{a_n x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \dots + \frac{a_o}{a_n}\frac{1}{x^n}$$

tend vers 1 quand x tend vers ∞, ce qui est immédiat.

Exemple 3 (a) $x^4 - x^3 + 3x^2 \underset{\infty}{\sim} x^4$ et $x^4 - x^3 + 3x^2 \underset{0}{\sim} 3x^2$

(b) $x^2+x+1 \underset{\infty}{\sim} x^2$ et $x^2+x+1 \underset{0}{\sim} 1$

Equivalents usuels Les équivalences suivantes seront démontrées au Ch.7 (§2.5).

$$\begin{cases} \sin(x) \underset{0}{\sim} x \\ 1-\cos(x) \underset{0}{\sim} x^2/2 \\ tg(x) \underset{0}{\sim} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x-1 \underset{0}{\sim} x \\ \text{Log}(1+x) \underset{0}{\sim} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} x/2 \\ \text{Plus gén. } (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \quad \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Exemple 4 Démontrer l'équivalence $\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} x/2$.

Exemple 5 Donner une approximation du nombre $\sqrt{1,00042}$.
Rép. 1,00021

Exemple 6 Pourquoi dans la liste ci-dessus, ne donne-t-on pas d'équivalents de e^x et $\cos(x)$ au voisinage de 0?

3.3 Règles de calcul des équivalents.

PROPOSITION 3.3 *Soient* f, g, f_1, g_1 *quatre fonctions de* n *variables.*

(a) *Si* $f \underset{m_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{m_0}{\sim} g_1$ *alors* $fg \underset{m_0}{\sim} f_1g_1$
(*Autrement dit, le produit des équivalents est un équivalent du produit*).

(b) *Si* $f \underset{m_0}{\sim} f_1$ *et* $g \underset{m_0}{\sim} g_1$ *alors* $f/g \underset{m_0}{\sim} f_1/g_1$
(*Autrement dit, le quotient des équivalents est un équivalent du quotient*)

(c) *Si* $f \underset{m_0}{\sim} f_1$ *alors* $|f| \underset{m_0}{\sim} |f_1|$

(d) *Supposons* f *et* f_1 *positives au voisinage de* m_0 *. Alors, pour tout* $r \in \mathbf{R}$ *, si* $f \underset{m_0}{\sim} f_1$ *alors* $(f)^r \underset{m_0}{\sim} (f_1)^r$

Preuve. Ces résultats sont des conséquences immédiates des Th.2.1 et Th.2.2.

Exemple 7 Déterminer un équivalent et, le cas échéant la limite des fonctions suivantes au voisinage des points indiqués.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10}$ en 0, en 2, en -5, en $+\infty$, en $-\infty$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4}$ en 2, en -2, en $+\infty$, en $-\infty$.

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x-3}}$ en -3^+ et en $+\infty$.

(d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x^2+x^3}}$ en 0.

Solution (a) <u>au point 2</u>. On a:

$$x^2-4 = (x+2)\ (x-2) \underset{2}{\sim} 4(x-2)$$

et $\quad x^2+3x-10 = (x-2)(x+5) \underset{2}{\sim} 7(x-2)$

On obtient donc:

$$\frac{x^2-4}{x^2+3x-10} \underset{2}{\sim} \frac{4(x-2)}{7(x-2)} = \frac{4}{7} \underset{x\to 2}{\to} \frac{4}{7}$$

On utilise aussi fréquemment le résultat suivant, dit de composition des équivalents.

PROPOSITION 3.4 *Soient* $f(x)$, $g(x)$ *deux fonctions d'une variable construite à partir des fonctions usuelles du Ch.3 et* $u(x_1,...,x_n)$ *une fonction de* n *variables.*

Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ ***et si*** $\lim\limits_{m\to m_0} u(x_1,...,x_n) = x_0$, *alors*

$$f(u(x_1,...,x_n)) \underset{m_0}{\sim} g(u(x_1,...,x_n))$$

Preuve. Il s'agit de voir que $\lim\limits_{m\to m_0} \dfrac{f(u(x_1,...,x_n))}{g(u(x_1,...,x_n))} = 1$. Or, par hypothèse, on a:

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ et $\lim\limits_{m\to m_0} u(x_1,...,x_n) = x_0$. Le résultat se déduit donc du Th.2.2 sur les compositions de limites.

Exemple 8 On a $\sin(x^2) \underset{0}{\sim} x^2$. En effet, $\sin u \underset{0}{\sim} u$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

Exemple 9 Déterminer un équivalent et la limite de la fonction

$$f(x) = x-\sqrt{x^2-x}$$

au voisinage de $+\infty$.

Solution. On a:

$$x- \sqrt{x^2-x} = x\ (1-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\,) \underset{+\infty}{\sim} x(\frac{1}{2x})$$

ce qui donne

$$x - \sqrt{x^2-x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}.$$

Il est agréable d'utiliser le symbole $*$ à la place de $u(x_1,...,x_n)$ pour simplifier les notations. Ainsi, la Prop.3.4 s'énonce plus simplement:

(*) si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, alors $f(*) \underset{m_0}{\sim} g(*)$ à condition que $*$ tende vers x_0 quand m tend vers m_0.

Les équivalences usuelles du §3.2 peuvent être alors énoncées :

- $\sin(*) \underset{m_0}{\sim} *$ si $*$ tend vers 0 quand $m \to m_0$.
- $1-\cos(*) \underset{m_0}{\sim} \frac{(*)^2}{2}$ si $*$ tend vers 0 quand $m \to m_0$.
- $e^*-1 \underset{m_0}{\sim} *$ si $*$ tend vers 0 quand $m \to m_0$.

etc...

Exemple 10 Déterminer un équivalent et, le cas échéant la limite des fonctions suivantes aux points indiqués.

(a) $\dfrac{\sin(3x)}{\sqrt{1-\cos 3x}}$ en 0 (b) $\dfrac{\sin(x^2-4)}{x+2}$ en -2, +2

(c) $\dfrac{\mathrm{Log}(1+2x+x^3)}{(7x+9x^4)^2}$ en 0 (d) $\dfrac{\mathrm{Log}(1+2x^2+2y^2)}{\sin(\pi(x^2+y^2))}$ en (0,0)

Solution. (c) $\mathrm{Log}(1+2x+x^3) \underset{0}{\sim} 2x+x^3 \underset{0}{\sim} 2x$; $(7x+9x^4)^2 \underset{0}{\sim} (7x)^2$. L'équivalent cherché est donc $2/(49x)$; la fonction tend vers $+\infty$ en 0^+ et $-\infty$ en 0^-.

Attention!

1) Les équivalents ne s'ajoutent pas: en général, <u>il est faux que</u>, si $f \underset{m_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{m_0}{\sim} g_1$ alors $f+g \underset{m_0}{\sim} f_1+g_1$.
Voici un contre-exemple: $1+x \underset{0}{\sim} 1+x^2$ et $-1 \underset{0}{\sim} -1$ mais x et x^2 ne sont pas équivalents.

2) Dans (*) ci-dessus, il est essentiel que $*$ tende vers x_0 quand m tend vers m_0. Par exemple, <u>il est faux que</u> $\sin(x^2+1)$ soit équivalent à x^2+1 quand x tend vers 0. L'équivalence $\sin * \underset{0}{\sim} *$ ne s'applique pas à $* = x^2+1$ car x^2+1 ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0.

3) Les équivalents ne peuvent être "composés à gauche": <u>il est faux que</u>, si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, alors $u(f(x)) \underset{x_0}{\sim} u(g(x))$. Ainsi, $x \underset{+\infty}{\sim} x+1$ et pourtant exp(x) et exp(x+1) ne sont pas équivalents en $+\infty$. Cependant, c'est vrai pour certaines fonctions, par exemple, les fonctions puissances et la valeur absolue (Cf. Prop.3.3 (c) et (d)).

Exemple 11 Déterminer un équivalent et, le cas échéant la limite des fonctions suivantes au voisinage des points indiqués.

(a) $\dfrac{\cos(3x)-1}{\sin^2(2x)}$ en 0 (b) $\dfrac{\mathrm{Log}(1+x^3+2x^4)}{(2x-x^2)^4}$ en 0

(c) $(x^2+3x^3)\mathrm{Log}(1+\frac{2}{x})$ en $+\infty$ (d) $\cos(3/x)$ en $+\infty$

(e) $(x^3+x)^{1/3}-x$ en $+\infty$ (f) $e^x/(x+3e^x)$ en $+\infty$

(g) $\dfrac{2x^3}{x+\mathrm{Log}(x)}$ en 0^+ et $+\infty$ (h) $\dfrac{\sqrt{4-x}-1}{\sin(x-3)}$ en 3

(i) $\mathrm{tg}(x)e^{3x}-\mathrm{tg}(x)$ en 0 (j) $\dfrac{e^{1/x}+\mathrm{Log}(x)}{e^{1/(xe^{1/x})}-1}$ en 0^+

(k) $\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}$ en $+\infty$ (l) $\dfrac{\mathrm{Log}(x^3+x^2+x+1)/(x^3+1)}{\mathrm{Log}(1+x+x^2)}$ en 0, -1

Solution. (j) Notons respectivement n(x) et d(x) les numérateur et dénominateur de la fonction. On a

$$n(x) = e^{1/x} + \mathrm{Log}(x) = e^{1/x}(1 + \mathrm{Log}(x)/e^{1/x}) \underset{0^+}{\sim} e^{1/x}$$

Et comme

$$\lim_{x\to 0^+} 1/(xe^{1/x}) = 0$$

on peut écrire que

$$e^{1/(x^{1/x})}-1 \underset{0^+}{\sim} 1/(xe^{1/x})$$

On obtient donc que

$$\frac{n(x)}{d(x)} \underset{0^+}{\sim} xe^{2/x} \to +\infty \text{ quand } x \to 0^+.$$

(k) On écrit

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2} = (x^3-x^2)^{1/3}\left[\left(\frac{x^3+x^2}{x^3-x^2}\right)^{1/3} - 1\right]$$

La quantité $(x^3+x^2/(x^3-x^2)$ qui tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, se met sous la forme 1+* avec * tendant vers 0. Précisément

$$\frac{x^3+x^2}{x^3-x^2} = 1 + * \quad \text{où } * = \frac{2x^2}{x^3-x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$$

On obtient donc

$$f(x) = (x^3-x^2)^{1/3} \; [(1+*)^{1/3}-1] \underset{+\infty}{\sim} x\frac{1}{3}* \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}$$

Exemple 12 Soit f(x,y) la fonction de deux variables

$$f(x,y) = \frac{2\sin(x)}{\exp(x^2+x)-1}\mathrm{Log}(1+y)$$

(a) Représenter le domaine de définition de f, en marquant en pointillé les droites qui n'en font pas partie.
(b) Donner un équivalent simple de f(x,y) au voisinage de (0,0). Quelle est la limite de f en ce point?
(c) Quelle est la limite de f lorsque (x,y) tend vers $(-1^+,2)$?

3.4 Infiniment grands et infiniment petits.

L'utilisation d'équivalents est particulièrement intéressante pour l'étude de formes indéterminées de la forme ∞/∞ et 0/0. De façon précise, la question se pose ainsi:
Déterminer la limite de f/g au point x_0 quand f et g sont deux fonctions d'une variable vérifiant:

$\boxed{1}\ \lim\limits_{x\to x_0} f = \lim\limits_{x\to x_0} g = \infty$ ou $\boxed{2}\ \lim\limits_{x\to x_0} f = \lim\limits_{x\to x_0} g = 0$

Dans le cas $\boxed{1}$, on dit que f et g sont des infiniment grands et dans le cas $\boxed{2}$ des infiniment petits.

Au voisinage de $x_o = \infty$ Pour conclure, il faut comparer ces deux infiniment grands ou ces deux infiniment petits. L'idée consiste à chercher des équivalents de f et de g de la forme ax^n $(a \neq 0)$. Ainsi, on est amené à distinguer des degrés dans la notion d'infiniment grand ou d'infiniment petit.

Exemple 13 Les fonctions x^2, x^3, x^n sont des infiniment grands d'ordre 2, 3, n, de même que les fonctions $2(x+1)^2$, $-(x-5)^5$, $(2x+1)^n$. Les fonctions $1/x^2$, $1/x^3$, $1/x^n$ sont des infiniment petits d'ordre 2, 3, n ...

Supposons f d'ordre n, i.e., $f(x) \underset{\infty}{\sim} ax^n$ et g d'ordre m, i.e., $g(x) \underset{\infty}{\sim} bx^m$. On a alors:

$$\lim_{x\to\infty} f/g = \begin{cases} \infty \text{ si } n > m & \begin{pmatrix}\text{f est infiniment plus grand que g}\\ \text{g est dite \textbf{négligeable} devant f}\end{pmatrix} \\ 0 \text{ si } n < m & \begin{pmatrix}\text{g est infiniment plus grand que f}\\ \text{f est négligeable devant g}\end{pmatrix} \\ a/b \text{ si } n=m & \begin{pmatrix}\text{f et g sont des infiniment grands}\\ \text{(ou petits) du même ordre}\end{pmatrix} \end{cases}$$

Dans le cas $n > m$, on a fait abstraction du signe; il dépend des signes de a, b et de $x_0 = \pm\infty$.

Au voisinage de $x_o = 0$ La méthode est identique; c'est également à des fonctions du type ax^n que l'on cherche à comparer f et g. Mais les notions d'infiniment grand et d'infiniment petit s'inversent.

• Si $f \underset{0}{\sim} ax^n$ avec $n > 0$, f est un infiniment petit (d'ordre n) et est d'autant plus petit que n est grand.

• Si $f \underset{0}{\sim} ax^n$ avec $n < 0$, f est un infiniment grand (d'ordre $|n|$) et est d'autant plus grand que $|n|$ est grand.

Au voisinage de $x_o \in R$ Ce sont ici les fonctions du type $a(x-x_0)^n$ qu'on utilise comme échelle pour graduer les infiniment grands et infiniment petits.

Exemple 14 Déterminer les limites suivantes

(a) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x+\sqrt{x^n+1}}$ en $+\infty$

(b) $f(x) = \dfrac{(x\cos(2x)-x)^3\ tg(3x^4+x^2)}{(\text{Log}(1+x^2))^a}$ en 0 (Discuter suivant a)

(c) $f(x) = \dfrac{\sin(2-x)}{\text{Log}(x^2-x-1)}$ en 2

DEFINITION 3.5 *Soient* $f(x_1,...,x_n)$ *et* $g(x_1,...,x_n)$ *deux fonctions de* n *variables. Soit* $m_o \in (D_f \cap D_g)'$. *On dit que la fonction* f *est négligeable devant* g *au voisinage de* m_o, *ce qu'on note* $f(x_1,...,x_n) \underset{m_o}{<<} g(x_1,...,x_n)$ *ou* $f = o(g)$ *quand* $m \to m_o$ *si*

$$\lim_{m \to m_o} f(x_1,...,x_n) \ / \ g(x_1,...,x_n) = 0$$

Exemple 15 Au voisinage de $+\infty$:

(a) $\quad ... << \dfrac{1}{x^2} << \dfrac{1}{x} << \dfrac{1}{\sqrt{x}} << 1 << \sqrt{x} << x << x^2 << ...$

(b) $\quad (x+3)^3 << (x-5)^4$

Exemple 16 Au voisinage de 0^+:

(a) $\quad ... >> \dfrac{1}{x^2} >> \dfrac{1}{x} >> \dfrac{1}{\sqrt{x}} >> 1 >> \sqrt{x} >> x >> x^2 >> ...$

(b) $\quad (\sin(x^2))^3 << e^{x^3} - 1$

Exemple 17 (Règles de comparaison e^x, x^r, Log(x))
En utilisant les idées des exemples 10, 11, 12 et 13 du §2, on montre que:

(a) Au voisinage de $+\infty$, on a $(\text{Log}(x))^r << x << e^x$

(b) Au voisinage de $-\infty$, on a $e^x << (1/x)^r$

(c) Au voisinage de 0^+, on a $(\text{Log}(x))^r << 1/x$

Remarques. 1) Au voisinage de 0, on a:

$$1+2x-2x^2+x^3+x^4 = 1+2x-2x^2 + o(x^2),$$

ce qu'il est d'usage de lire ainsi: $1+2x-2x^2+x^3+x^4$ est égal à $1+2x-2x^2$, à un terme d'ordre > 2 près. La notation "o" est très utile quand on veut effectuer un calcul approché où on néglige les termes supérieurs à un ordre donné. Nous reviendrons sur ce type de calculs appelés **développements limités** au Ch.9.

2) Dire que $f = o(1)$ quand $m \to m_o$ ou que $f \underset{m_o}{<<} 1$ signifie simplement que $\lim_{m \to m_o} f = 0$.

3) Comme l'équivalence, "être négligeable" est une notion "locale", i.e., dépend du point m_o considéré. Ainsi $x \underset{+\infty}{<<} x^2$ mais $x^2 \underset{0}{<<} x$.

Exemple 18 Démontrer qu'au voisinage d'un point m_o, on a

(a) $f \sim g \iff f-g = o(g)$

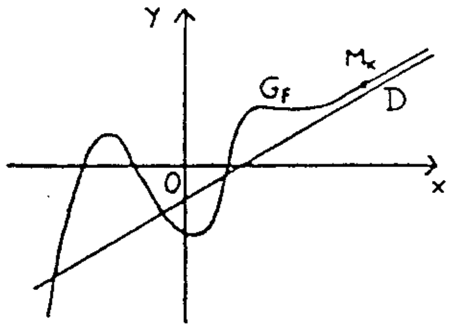
(b) $f = o(g) \iff f = g\ o(1)$

(c) $f \sim a\,h$ et $g \sim bh$ et $a+b \neq 0 \Rightarrow f+g \sim (a+b)h$

(Ex: $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-1} \underset{+\infty}{\sim} 3\sqrt{x}$).

§4. BRANCHES INFINIES.

4.1 Branches infinies et asymptotes verticales.

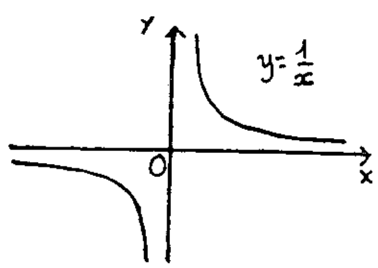


Les notions de branche infinie, d'asymptote d'une fonction d'une variable dérivent naturellement de l'idée de limite.

Soient f(x) une fonction d'une variable et x_0 un point (au sens large, i.e., $x_0 = a, a^+, a^-$(avec $a \in \mathbf{R}$) ou $+\infty$ ou $-\infty$). On suppose que $x_0 \in (D_f)'$. Notons, pour tout $x \in D_f$, $M_x(x,f(x))$ le point du graphe G_f d'abscisse x. On dira que f présente **une branche infinie** au voisinage de x_0 si le point M_x s'éloigne arbitrairement loin de l'origine, i.e., si $d(O,M_x)$ tend vers $+\infty$, quand x tend vers x_0 . La notion d'asymptote n'est pas nouvelle; on connaît les asymptotes des homographies. De façon générale, on dit qu'une droite D est **asymptote** du graphe G_f d'une fonction f en x_0 s'il y a branche infinie en x_0 et si le point M_x se rapproche arbitrairement près de la droite D quand x tend vers x_0.

DEFINITION 4.1 Notons $d(M_x,D)$ la distance minimale entre M_x et un point de D. La droite D est asymptote du graphe G_f de f en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} d(O,M_x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} d(M_x,D) = 0$$



Exemple 1 Soit f(x) = 1/x. Notons $d(M_x,Ox)$ et $d(M_x,Oy)$ la distance entre le point M_x et les axes Ox et Oy. Montrer que

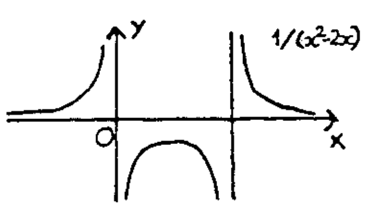
(a) $\lim_{x\to+\infty} d(O,M_x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} d(M_x,Ox) = 0$

(b) $\lim_{x\to0^+} d(O,M_x) = +\infty$ et $\lim_{x\to0^+} d(M_x,Oy) = 0$

Il y a essentiellement 2 cas où on a une branche infinie:

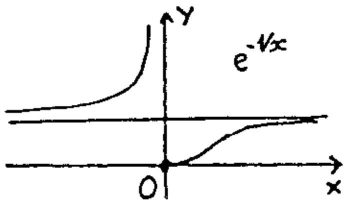
$\boxed{1}$ $x_0 = a, a^+$ou a^-(avec $a \in \mathbf{R}$) et $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$

$\boxed{2}$ $x_0 = +\infty$ ou $-\infty$.



Dans le cas $\boxed{1}$ qui généralise l'exemple 1(b), il y a automatiquement asymptote en x_0, à savoir la droite verticale $x = x_0$.

Exemple 2 Déterminer les asymptotes verticales de la fonction $f(x) = 1/(x^2-2x)$. Donner l'allure du graphe de f.

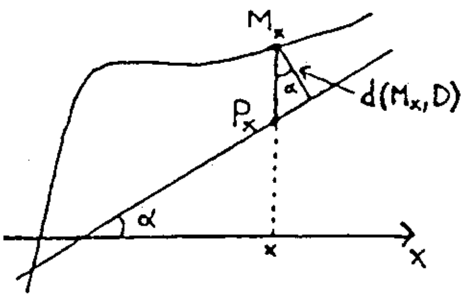


Exemple 3 Soit $f(x) = e^{-1/x}$. L'axe Oy est asymptote en 0^- mais pas en 0^+.

En §4.2, on étudie le cas $\boxed{2}$, qui est plus intéressant. Nous allons voir qu'il n'y a pas nécessairement d'asymptote.

4.2 Branches infinies en ∞ et asymptotes obliques.

Dans ce paragraphe, $x_0 = +\infty$ ou $-\infty$. Pour fixer les idées, nous prendrons $x_0 = +\infty$.



Soient f(x) une fonction telle que $+\infty \in (D_f)'$ et D une droite d'équation y = ax+b. Notons, pour tout $x \in D_f$, $M_x(x,f(x))$ le point du graphe G_f d'abscisse x et $P_x(x,ax+b)$ le point de D d'abscisse x. La distance entre ces deux points vaut:

$$d(M_x,P_x) = |f(x)-(ax+b)|,$$

D'autre part, la figure ci-contre montre que la distance minimale $d(M_x,D)$ entre M_x et un point de D vaut

$$d(M_x,D) = |\cos \alpha|\ d(M_x,P_x).$$

On obtient donc:

(*) La droite D d'équation y = ax+b est asymptote du graphe G_f de f en $+\infty$ ssi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b) = 0$$

Le problème est de déterminer a et b. Pour cela, on utilise le fait suivant: si $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b) = 0$, alors on a nécessairement:

$$a = \lim_{x\to+\infty} f(x)/x \qquad \text{et} \qquad b = \lim_{x\to+\infty} f(x)-ax$$

[**Preuve**. Il suffit, pour le voir, d'écrire:

$$\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x)-(ax+b)}{x} + \dfrac{ax+b}{x} \\ f(x)-ax = (f(x)-(ax+b)) + b \end{cases}$$

et de passer à la limite en $+\infty$.]

En conséquence, s'il existe une asymptote d'équation y = ax+b, alors a et b sont déterminés par les limites ci-dessus. Par opposition aux asymptotes verticales du §4.1, il est courant d'appeler "asymptotes obliques" les asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$.

Cas particulier: asymptote horizontale.

Quand $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbf{R}$, on peut conclure directement que la droite horizontale $y = L$ est asymptote du graphe G_f de f.

Exemple 4 Déterminer les asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$ (b) $f(x) = x + \sqrt{x^2-x+2}$

Méthode pratique d'étude des branches infinies en $+\infty$

On pourra suivre la procédure suivante:

$\boxed{1}$ On calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

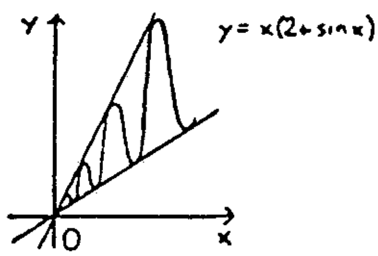
• si la limite n'existe pas, la discussion s'arrête là (pas d'asymptote).

Exemple 5
$f(x) = \sin(x)$.

• si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbf{R}$, la droite $y = b$ est asymptote horizontale.

Exemple 6
(a) $f(x) = (x+1)/x$
(b) $f(x) = e^x$ en $-\infty$

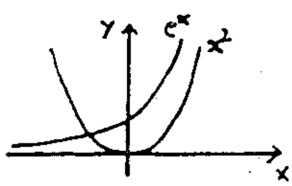
• si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ $\rightarrow \boxed{2}$



$\boxed{2}$ On calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)/x$

• si la limite n'existe pas, la discussion s'arrête là (pas d'asymptote).

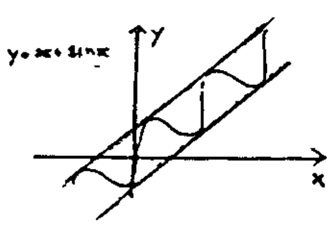
Exemple 7
$f(x) = x(2+\sin(x))$.



• si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)/x = \infty$,
pas d'asymptote. On dit dans ce cas qu'il y a branche parabolique d'axe Oy.

Exemple 8
(a) $f(x) = x^2$
(b) $f(x) = e^x$

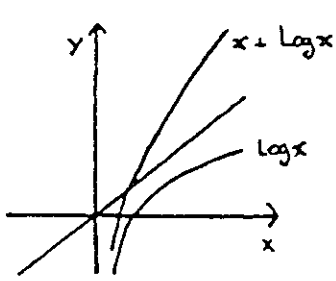
• si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)/x = a \in \mathbf{R}$
On dit que $y = ax$ est direction asymptotique du graphe G_f.
$\rightarrow \boxed{3}$



$\boxed{3}$ On calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)-ax$

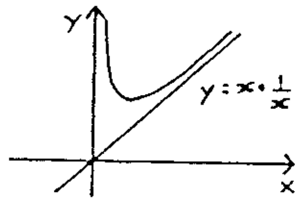
• si la limite n'existe pas, la discussion s'arrête là .

Exemple 9
$f(x) = x+\sin(x)$.



• si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)-ax = \infty$,
pas d'asymptote. On dit dans ce cas qu'il y a branche parabolique d'axe la direction asymptotique $y = ax$.

Exemple 10
(a) $f(x) = \mathrm{Log}(x)$
(b) $f(x) = x+\mathrm{Log}(x)$



• si $\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax = b \in \mathbb{R}$
La droite y = ax+b est asymptote du graphe G_f.

Exemple 11
(a) $f(x) = x + 1/x$
(b) $f(x) = x$

$\rightarrow \boxed{4}$

$\boxed{4}$ Position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Il s'agit de déterminer le signe de $f(x)-ax-b$ quand x tend vers $+\infty$.

• si $\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax-b = 0^+$, la courbe se situe au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

• si $\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax-b = 0^-$, la courbe se situe au dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exemple 12 Etudier les branches infinies des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$ (b) $f(x) = x+\sqrt{x^2-x+2}$

(c) $f(x) = x-\sqrt{x}$ (d) $f(x) = x\, e^{1/x}$

Solution. (b) En $+\infty$. On voit facilement que

$$f(x)/x = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}$$

tend vers 2 et que

$$f(x)-2x = \sqrt{x^2-x+2} - x = \frac{-x+2}{\sqrt{x^2-x+2} + x} = \frac{-1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1}$$

tend vers -1/2 quand x tend vers $+\infty$.

La droite d'équation y = 2x-1/2 est donc asymptote. La position du graphe G_f par rapport à son asymptote est donnée par le signe de

$$f(x)-(2x-1/2) = \sqrt{x^2-x+2}-(x-1/2)$$

On l'écrit sous la forme

$$f(x)-(2x-1/2) = \sqrt{x^2-x+2} - \sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}$$

Il devient alors clair que f(x)-(2x-1/2) est positif au voisinage de $+\infty$; le graphe G_f se situe donc au dessus de son asymptote.

En $-\infty$. Ici, on a

$$f(x) = \frac{x-2}{x-\sqrt{x^2-x+2}} = \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}$$

Par conséquent, f(x) tend vers 1/2 quand x tend vers $-\infty$. La droite y = 1/2 est asymptote horizontale. La position du graphe G_f par rapport à son asymptote est donnée par le signe de

$$f(x)-1/2 = (x-1/2) + \sqrt{x^2-x+2}$$
$$= \sqrt{x^2-x+2} - \sqrt{(x-1/2)^2} \quad \text{(au voisinage de } -\infty)$$
$$= \sqrt{x^2-x+2} - \sqrt{x^2-x+1/4}$$

Le graphe G_f se situe au dessus de son asymptote.

(d) On voit sans trop de difficultés que $y = x+1$ est asymptote du graphe G_f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. L'étude du signe de $f(x)-(x+1)$ est elle plus délicate. Nous allons devoir utiliser l'inégalité

$$e^u \geq 1+u \quad \text{pour tout } u \in \mathbf{R}$$

Au voisinage de $+\infty$, on écrit

$$f(x)-(x+1) = x(e^{1/x}-1)-1 \geq x(\frac{1}{x}) -1 = 0$$

Le graphe G_f se situe donc au dessus de son asymptote.

Au voisinage de $-\infty$, on écrit

$$f(x)-(x+1) = x(e^{1/x}-1) - 1 \leq x(\frac{1}{x}) -1 = 0$$

Le graphe G_f se situe donc au dessous de son asymptote.

Déterminer la position de la courbe par rapport à ses asymptotes peut être délicat. Ainsi, en (b) et (d) dans l'exemple ci-dessus, nous n'avons conclu que grâce à des arguments ad hoc. Nous verrons au chapitre 8 comment les développements limités permettent de rendre cette étape plus systématique.

4.3 Plan d'étude des fonctions d'une variable.

On a regroupé ci-dessous les divers points qu'une étude complète d'une fonction d'une variable doit faire apparaître.

$\boxed{1}$ Domaine de définition, propriétés de périodicité et de symétrie éventuelles, choix du domaine d'étude.

$\boxed{2}$ Continuité et dérivabilité. Etude aux bornes du domaine (limites aux bornes du domaine, prolongements par continuité éventuels).

$\boxed{3}$ Variations de f (signe de f', tableau de variations, points stationnaires et extrema relatifs).

$\boxed{4}$ Branches infinies (directions asymptotiques, branches paraboliques, asymptotes).

$\boxed{5}$ Convexité (signe de f'', intervalles de convexité, de concavité, points d'inflexion).

$\boxed{6}$ Points et tangentes remarquables (intersection avec les axes de coordonnées, avec les asymptotes).

$\boxed{7}$ Représentation graphique.

$\boxed{8}$ Propriétés ensemblistes de f (injectivité, ensemble image, réciproque éventuelle).

Le point $\boxed{7}$, avec le point $\boxed{8}$ qu'on déduit de $\boxed{7}$, peut être considéré comme la conclusion de l'étude. Les points $\boxed{1}$, $\boxed{3}$ et $\boxed{4}$ constituent la charpente de l'étude. Dans de nombreux cas, cette "charpente" suffit pour répondre aux questions posées. Les points $\boxed{2}$, $\boxed{5}$ et $\boxed{6}$ apportent des précisions supplémentaires. Ces points seront revus dans les chapitres suivants. On trouvera au Ch.9 un exemple complet d'étude de fonctions (Cf. Ch.9 §3 Exemple 7).

CHAPITRE 5

SUITES ET SERIES

§1. LA CONVERGENCE DES SUITES.

1.1 Définitions.

On appelle suite réelle toute "succession infinie de nombres réels". Par exemple, la suite des entiers non nuls:

1 2 3 4 5 ... ,

la suite des puissances de 2

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 ... ,

la suite des approximations décimales (par défaut) de π:

3 3,1 3,14 3,141 3,1415 3,14159 ... ,

la "suite de Fibonacci"

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 ...

dont chaque terme est la somme des deux précédents.

De façon formelle, une suite réelle est définie comme la donnée d'une application $u : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$ de l'ensemble $\mathbf{N}^*$ des entiers non nuls vers l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels; la valeur $u(n)$ de u en l'entier n est le n-ième terme de la suite. Plutôt que $u(n)$, on le notera u_n; la suite $u : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$ sera notée $(u_n)_{n>0}$.

Note. On a choisi d'indexer les termes d'une suite par l'ensemble $\mathbf{N}^*$ des entiers > 0. Ce choix n'est pas standard. On peut préférer par exemple l'ensemble $\mathbf{N}$ tout entier; le premier terme de la suite est alors u_0 et non u_1.

Si $f(x)$ est une fonction d'une variable réelle telle que $D_f \supset \mathbf{N}^*$, on définit une suite réelle $(u_n)_{n>0}$ en posant $u_n = f(n)$. On dit dans ce cas que la suite $(u_n)_{n>0}$ est donnée par une formule explicite.

Exemple 1 La suite des entiers non nuls est la suite $(n)_{n>0}$. La suite des puissances de 2 est la suite $(2^{n-1})_{n>0}$.

Il y a d'autres façons de définir des suites. Par exemple, on peut donner ses k premiers termes ($k \in \mathbf{N}^*$) et donner une formule exprimant tout terme en fonction des k précédents. On dit dans ce cas que la suite est définie par une relation de récurrence d'ordre k.

Exemple 2 La suite de Fibonacci est la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et la relation de récurrence d'ordre 2

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1}.$$

Exemple 3 (Suites arithmétiques et suites géométriques)
(a) La suite arithmétique de raison r et de premier terme a est la suite $(u_n)_{n>0}$ définie indifféremment par:

$$a \quad a+r \quad a+2r \quad a+3r \quad a+4r \quad a+5r \quad \ldots$$

ou

$$u_n = a + (n-1)r \quad (n>0)$$

ou

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

(b) La suite géométrique de raison r et de premier terme a est la suite $(u_n)_{n>0}$ définie indifféremment par:

$$a \quad ar \quad ar^2 \quad ar^3 \quad ar^4 \quad \ldots$$

ou

$$u_n = ar^{n-1} \quad (n>0)$$

ou

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = ru_n \end{cases}$$

Trouver une formule explicite pour une suite définie par une relation de récurrence peut être un problème difficile. On verra dans le cours de seconde et de troisième année, des méthodes générales pour certains types de récurrence (récurrence linéaire, affine etc...).

Ici, on va s'intéresser à la convergence des suites. Pour toute suite $(u_n)_{n>0}$, il est naturel de regarder "si les nombres réels u_n se rapprochent arbitrairement près d'un nombre réel fixe L pourvu que n devienne suffisamment grand". On dit alors que L est la limite de la suite $(u_n)_{n>0}$ ou que la suite $(u_n)_{n>0}$ converge vers L. Par exemple, la suite des approximations décimales de π converge vers le nombre π (sans qu'aucun terme de la suite ne soit jamais égal à π).

De façon formelle, on a défini les suites réelles comme des fonctions à valeurs réelles définies sur **N**; le sens précis de

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \quad (l \in \mathbf{R})$$

sera celui qu'on a donné aux paragraphes §1.2 et §1.3, i.e.,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall n > 0))(n \geq N \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon)$$

De même, on dira que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \qquad \text{si}$$

$$(\forall A > 0)(\exists N > 0)(\forall n > 0))(n \geq N \Rightarrow u_n > A)$$

(On obtient la définition d'une limite égale à $-\infty$ en remplaçant "$u_n > A$" par "$u_n < -A$".)

1.2 Exemples.

La convergence des suites est un cas particulier de la théorie générale des limites. En particulier, tous les résultats généraux du Ch.4 restent valables. Noter cependant que pour les suites, seule a un sens la notion de limite au voisinage de $+\infty$. Donnons quelques exemples.

Exemple 4 Etudier la limite des suites suivantes.
(a) $u_n = 1/n^r$ $(r > 0)$ (b) $u_n = r^n$
(c) $u_n = \sqrt[n]{c}$ $(c > 0)$ (d) $u_n = \sqrt[n]{n}$
(e) $u_n = (-1)^n$ (f) $u_n = (-1)^n/n$

Solution. (a) On sait que $\lim_{x\to+\infty} 1/x^r = 0$. On a donc à plus forte raison $\lim_{n\to+\infty} 1/n^r = 0$

[**Remarque.** Il est général que si $f(x)$ a une limite L quand x tend vers $+\infty$, alors la suite $(f(n))_{n>0}$ a pour limite L. Mais la réciproque est fausse (Penser à $f(x) = \sin(\pi x)$).]

(b) Si $r = 0$, la suite est constante, égale à 0. Supposons $r \neq 0$. On commence par étudier $|u_n|$ pour ne pas avoir à se soucier du signe. On a

$$|u_n| = |r|^n = e^{n\mathrm{Log}|r|}$$

Si $|r| < 1$, alors $\mathrm{Log}|r| < 0$ et $|u_n|$ tend vers 0. La suite $(u_n)_{n>0}$ tend alors également vers 0.

[Noter que, de façon générale, on a:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$$

mais que ceci devient faux si 0 est remplacé par $L \neq 0$ (Penser à $u_n = (-1)^n$).]

Si $|r| > 1$, alors $\mathrm{Log}|r| > 0$ et $|u_n|$ tend vers $+\infty$. Si $r > 0$, $u_n = |u_n|$; la suite $(u_n)_{n>0}$ tend donc vers $+\infty$. Si $r < 0$, la suite, en valeur absolue, tend vers $+\infty$ et prend alternativement les signes + et -.

Si $|r| = 1$, alors, ou bien $r = 1$ et la suite est constante, égale à 1, ou bien $r = -1$ et la suite $(u_n)_{n>0}$ est la suite -1 1 -1 1 -1 ...; elle n'a pas de limite (Cf. (e)).

En résumé, on a:

$$\begin{cases} \text{si } -1 < r < 1 & \lim_{n\to+\infty} r^n = 0 \\ \text{si } |r| > 1 & \lim_{n\to+\infty} |r^n| = +\infty \\ \text{si } r = 1 & r^n = 1 \text{ pour tout } n > 0 \\ \text{si } r = -1 & r^n = (-1)^n \text{ n'a pas de limite} \end{cases}$$

(d) On a $u_n = e^{\mathrm{Log}(n)/n}$. On sait (Cf. Ch.4 §2.2 Croissance comparée...) que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Log}(n)/n = 0$$

La limite cherchée est donc 1.

(e) Il est clair que la suite de terme général $(-1)^n$, qui prend alternativement les valeurs 1 et -1 n'a pas de limite. Pour le démontrer, on utilise le critère (*) du §1.4 du Ch.4. Ce critère, dans le contexte des suites, s'énonce ainsi

Critère de non-convergence

(*) Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n>0}$ n'a pas de limite (finie ou infinie), il suffit de montrer qu'il existe deux nombres distincts L_1 et L_2 et deux familles d'entiers tendant vers $+\infty$ et tels que les termes u_n correspondants tendent vers L_1 pour une famille et L_2 pour l'autre.

Pour montrer que la suite $((-1)^n)_{n>0}$ n'a pas de limite, il suffit de noter que la suite des termes de rang pair est constante, égale à 1 et donc tend vers 1 et que la suite des termes de rang impair est constante, égale à -1 et donc tend vers -1.

Note. On retiendra également de cet exemple que, comme les fonctions, **les suites n'ont pas nécessairement de limite.**

Exemple 5 Etudier la limite des suites suivantes. En donner si possible un équivalent simple.

(a) $u_n = \dfrac{2n^3+n-1}{n(n+1)^a}$ (b) $u_n = n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$

(c) $u_n = \sin(n^2)/n$ (d) $u_n = (n/e)^n$

Solution. (a) La théorie des équivalents donne

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} 2n^{2-a}$$

La limite est donc

$$\begin{cases} 0 & \text{si } a > 2 \\ 2 & \text{si } a = 2 \\ +\infty & \text{si } a < 2 \end{cases}$$

(b) Pour trouver un équivalent de u_n, on met $n\sqrt{n-1}$ en facteur:

$$\begin{aligned} u_n &= n\sqrt{n-1}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} - 1\right) \\ &= n\sqrt{n-1}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n-1}} - 1\right) \end{aligned}$$

On sait que $(1+*)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2}*$ quand $*$ tend vers 0. On obtient donc

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} n\sqrt{n-1}\,\frac{1}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}$$

Conclusion: la suite $(u_n)_{n>0}$ tend vers $+\infty$.

(c) Pour tout $n > 0$, on a: $|u_n| \leq 1/n$. Le Th.2.3 du Ch.4 permet de conclure que la suite $(u_n)_{n>0}$ tend vers 0.

(d) $u_n = (n/e)^n = e^{n\mathrm{Log}n-n}$

On a

$$n\mathrm{Log}(n)-n = n\mathrm{Log}(n)(1 - 1/\mathrm{Log}(n)) \underset{+\infty}{\sim} n\mathrm{Log}(n)$$

Conclusion: la suite $(u_n)_{n>0}$ tend vers $+\infty$.

Dans les exemples ci-dessus, les suites étudiées sont définies par une formule explicite. Hors de ce contexte, il n'y a pas de méthode générale pour étudier la convergence d'une suite. A force de tâtonnements, d'observations, de tentatives, on arrive à se faire une idée du comportement de la suite; le calcul des premiers termes est souvent une bonne indication. La seconde partie du travail consiste à démontrer ses impressions. Voici un exemple. Nous donnerons dans le paragraphe suivants quelques résultats souvent utiles dans ce genre d'étude.

Exemple 6 Etudier la suite de terme général $u_n = 2^n/n!$ (où n! désigne la quantité appelée "factorielle n", i.e., $n! = n(n-1)...2.1$).

Solution. On calcule les premiers termes.

$u_1 = 2$; $u_2 = 2$; $u_3 = 4/3$; $u_4 = 2/3$; $u_5 = 4/15$; $u_6 = 4/45$ ...

Il semble que n! augmente beaucoup plus vite que 2^n, forçant le quotient u_n à converger vers 0. On va préciser cette impression en calculant u_{n+1}/u_n.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}\ n!}{(n+1)!\ 2^n} = \frac{2}{n+1}$$

Effectivement, plus n est grand, plus u_{n+1} devient petit par rapport à u_n. Par exemple, on peut écrire

$$u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n \text{ dès que } n \geq 2$$

On en déduit, que dès que $n \geq 2$,

$$u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 u_{n-1} \leq ... \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} u_2$$

On a donc, dès que $n \geq 3$,

$$(*) \qquad 0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} u_2$$

Comme $0 < 2/3 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 0$

Le Th.2.3 du §2 permet de conclure de (*) que la suite $(u_n)_{n>0}$ tend vers 0.

Note. Rappelons que la notion de limite a un caractère local. Pour la limite, ce qui compte c'est ce qui se passe pour n grand. Ainsi, il n'importe pas que l'inégalité (*) n'ait lieu que pour $n \geq 3$.

§2. PROPRIETES DES SUITES.

2.1 Suites bornées.

Une suite réelle $(u_n)_{n>0}$ est dite majorée (resp. minorée) s'il existe un nombre réel fixe M qui soit supérieur (resp. inférieur) à tous les termes de la suite, c'est-à-dire

$$(\exists\, M \in \mathbb{R})\ (\forall\, n > 0)\ (u_n \leq M)$$

(resp. $\qquad (\exists\, M \in \mathbb{R})\ (\forall\, n > 0)\ (u_n \geq M)$)

Une suite bornée est une suite qui est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire

$$(\exists\, M \in \mathbb{R})\ (\forall\, n > 0)\ (|u_n| \leq M)$$

Exemple 1 Les suites $(\sin(n))_{n>0}$, $((-1)^n)_{n>0}$ sont bornées par 1. La suite des entiers est minorée par 0 mais est non majorée. La suite $((-2)^n)_{n>0}$ est ni majorée ni minorée.

Exemple 2 Montrer qu'une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée.

La suite des approximations décimales de π, qui converge vers π, est bornée: minorée par 3 et majorée par 4 par exemple. Plus généralement, on a:

PROPOSITION 2.1 *Toute suite convergeant vers un nombre réel est bornée.*

La réciproque est fausse; la suite $((-1)^n)_{n>0}$ est bornée mais n'est pas convergente.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite telle que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = L \in \mathbf{R}$$

Par définition, on a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall n > 0))(n \geq N \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon)$$

Cela signifie que, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, tous les termes de la suite sauf un nombre fini sont dans l'intervalle $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$. (Evidemment le nombre d'exceptions, dépend de ε). Prenons $\varepsilon = 1$, alors il existe un entier N_0 tel que tous les termes sauf peut-être les N_0 premiers sont dans l'intervalle $]L-1;L+1[$. Posons

$$M = \max(L+1, u_1, u_2, \ldots, u_{N_0}).$$

Alors M est un majorant de tous les termes de la suite. Similairement, le nombre $m = \min(L-1, u_1, u_2, \ldots, u_{N_0})$ est un minorant de la suite $(u_n)_{n>0}$.

2.2 Suites monotones.

Une suite monotone est une suite qui est soit croissante (i.e., $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n > 0$), soit décroissante (i.e., $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n > 0$). Dans le contexte des suites réelles, le Th.2.4 du Ch.4 sur les limites de fonctions monotones devient.

THEOREME 2.2 (a) *Toute suite croissante et majorée a une limite finie. Toute suite décroissante et minorée a une limite finie.*
(b) *Toute suite croissante et non majorée tend vers* $+\infty$. *Toute suite décroissante et non minorée tend vers* $-\infty$.

Exemple 3 Etudier la suite réelle $(u_n)_{n>0}$ définie par

$$(*) \qquad u_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+\sqrt{1}}}} \quad (n \text{ signes } "\sqrt{\ }")$$

ou, de façon équivalente, par

$$(**) \qquad \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}.$$

Solution. La suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante: en effet, on passe de u_n à u_{n+1} en remplaçant le dernier "1" de (*) par $1+\sqrt{1} = 2 > 1$. La suite $(u_n)_{n>0}$ est majorée: en effet, pour tout entier $n > 0$, on a:

$$u_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+\sqrt{1}}}} < \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\sqrt{4}}}} = 2.$$

D'après le Th.2.2, la suite $(u_n)_{n>0}$ a une limite $L \in \mathbf{R}$. Pour trouver la valeur de L, on utilise le raisonnement suivant, qui est d'usage fréquent.

[Considérons la suite $(u_{n+1})_{n>0}$; elle est obtenue en enlevant son premier terme à la suite $(u_n)_{n>0}$. Elle a donc la même limite que la suite $(u_n)_{n>0}$, i.e., le nombre réel L. Mais, on a aussi

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$$

Les théorèmes sur les limites montrent donc que la suite de terme général $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ converge aussi vers $\sqrt{1+L}$. Comme il y a unicité de la limite, on obtient

$$L = \sqrt{1+L} \quad \text{et donc} \quad L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad]$$

Notes. 1) Avec l'habitude, on dit plus rapidement: en "passant à la limite" dans l'égalité $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, on obtient $L = \sqrt{1+L}$.

2) Attention! On n'a le droit de "passer à la limite" qu'une fois qu'on sait que la limite existe.

2.3 Suites adjacentes.

Soient $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si elles vérifient les trois conditions suivantes:

(1) $(u_n)_{n>0}$ est croissante et $(v_n)_{n>0}$ est décroissante.

(2) $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n > 0$.

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$

Exemple 4 Soit $(u_n)_{n>0}$ (resp. $(v_n)_{n>0}$) la suite des approximations décimales de π par défaut (resp. par excès). Vérifier que $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ sont des suites adjacentes.

Exemple 5 Montrer que les suites $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ définies par:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n} \qquad (n > 0)$$

sont des suites adjacentes.

Solution. Les conditions (2) et (3) sont évidentes puisque

$$0 \leq v_n - u_n = 1/n.$$

La suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante car

$$u_{n+1}-u_n = 1/(n+1)^2 \geq 0.$$

Il reste à voir que $v_{n+1}-v_n \leq 0$. On a:

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0.$$

Le résultat essentiel concernant les suites adjacentes est le suivant.

THEOREME 2.3 *Deux suites adjacentes $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ sont automatiquement convergentes. De plus, elles ont la même limite $L \in R$.*

Démonstration. Dans le [...] ci-dessous, on montre en utilisant (1) et (2), que la suite $(u_n)_{n>0}$ est majorée et que la suite $(v_n)_{n>0}$ est minorée. Le Th.2.2 montre alors que les suites $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ ont une limite finie. En passant à la limite dans (3), on obtient que ces deux limites sont nécessairement égales.

[Soient h et k deux entiers > 0 quelconques. On a

$$u_h \leq u_{h+k} \leq v_{h+k} \leq v_k$$

La première inégalité résulte de la croissance de $(u_n)_{n>0}$, la seconde de la condition (2) et la troisième de la décroissance de $(v_n)_{n>0}$. On a donc établi que pour h, k entiers > 0 quelconques, on a $u_h \leq v_k$. Autrement dit, tout terme de la suite $(u_n)_{n>0}$ est inférieur à tout terme de la suite $(v_n)_{n>0}$. En particulier, v_1 est un majorant de la suite $(u_n)_{n>0}$ et u_1 est un minorant de la suite $(v_n)_{n>0}$.]

Note. Pour l'existence des limites des deux suites, ce qui est le point essentiel du Th.2.3, on n'a besoin que des conditions (1) et (2).

Exemple 6 Grâce au Th.2.3, on peut conclure que les suites considérées dans les exemples 4 et 5 ont une limite. Dans l'exemple 4, la limite commune des suites $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ est le nombre réel π. Par contre, dans l'exemple 5, on ne connait pas la valeur de la limite; le Th.2.3 permet seulement d'affirmer qu'elle existe. (D'autres méthodes montrent que cette limite vaut $\pi^2/6$).

2.4 Suites extraites.

Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite réelle. La suite $(u_{2n})_{n>0}$ est la suite

$$u_2 \; u_4 \; u_6 \; \cdots \; u_{2n} \; u_{2n+2} \; \cdots$$

des termes de rang pair. Plus généralement, soit $(p_n)_{n>0}$ une suite strictement croissante d'entiers ($p_n = 2n$ ci-dessus). La suite $(u_{p_n})_{n>0}$ est la suite

$$u_{p_1} \; u_{p_2} \; u_{p_3} \; \cdots \; u_{p_n} \; u_{p_{n+1}} \; \cdots$$

On dit que la suite $(u_{p_n})_{n>0}$ est une sous-suite ou suite extraite de la suite $(u_n)_{n>0}$.

Exemple 7 Calculer les premiers termes de la suite extraite $(u_{p_n})_{n>0}$ de la suite de Fibonacci pour la suite $(p_n)_{n>0}$ des multiples de 4 puis pour la suite $(p_n)_{n>0}$ des nombres premiers.

On peut réénoncer le critère (*) de §1.2 en termes de suites extraites.

PROPOSITION 2.4 *Si une suite a deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle n'a pas de limite. Ou, de façon équivalente, si une suite* $(u_n)_{n>0}$ *a une limite* L, *alors toutes les suites extraites de* $(u_n)_{n>0}$ *convergent vers* L.

On utilise souvent la Prop.2.4 pour montrer qu'une suite n'a pas de limite.

Exemple 8 Etudier la suite définie par $u_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$

Solution. On a $u_{2n} = (1+\frac{1}{n})^n$ et $u_{2n+1} = (1-\frac{1}{n})^n$. La suite $(u_{2n})_{n>0}$ converge vers e et la suite $(u_{2n+1})_{n>0}$ converge vers 1/e. Les nombres e et 1/e étant distincts, la suite $(u_n)_{n>0}$ n'a pas de limite.

On appelle **valeur d'adhérence** de la suite $(u_n)_{n>0}$ toute limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n>0}$. D'après la Prop.2.4, une suite convergente a une unique valeur d'adhérence, à savoir sa limite. Dans l'exemple 8, e et 1/e sont deux valeurs d'adhérence distinctes de $(u_n)_{n>0}$; la suite $(u_n)_{n>0}$ ne converge donc pas.

Note. Inversement, supposons qu'une suite n'ait qu'une valeur d'adhérence L (finie ou infinie). Peut-on affirmer que L est la limite de la suite? La réponse est oui. C'est une conséquence d'un résultat important de topologie, le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Cas particulier: les suites tronquées. Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite réelle et k un entier fixé. La suite obtenue à partir de $(u_n)_{n>0}$ en lui enlevant ses k premiers termes est la suite $(u_{n+k})_{n>0}$, i.e., la succession

$$u_{k+1} \quad u_{k+2} \quad \cdots \quad u_{k+n} \quad u_{k+n+1} \quad \cdots$$

C'est une suite extraite de $(u_n)_{n>0}$. Mais comme, pour ce qui est de la convergence, les premiers termes ne comptent pas, il y a équivalence entre la convergence de $(u_n)_{n>0}$ et la convergence de la suite tronquée $(u_{n+k})_{n>0}$.

DEFINITION 2.5 — *Un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ est appelé point d'accumulation d'un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ si*

(1) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'éléments $x \in A$ tels que $x \neq a$ et $|x - a| < \varepsilon$.*

LEMME 2.6 — *Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite réelle et $a \in \mathbb{R}$. Si a est un point d'accumulation de l'ensemble $\{u_n \mid n > 0\}$ des termes de la suite alors a est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n>0}$.*

Remarque. La réciproque est fausse (prendre $u_n = (-1)^n$).

Preuve. En faisant $\varepsilon = 1$ dans (1), on obtient un élément u_{p_1} tels que $u_{p_1} \neq a$ et $|u_{p_1} - a| < 1$. Supposons construits n entiers $p_1, \dots, p_n$ tels que $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ et $|u_{p_k} - a| < 1/2^k$ et $u_{p_k} \neq a$, $k = 1, \dots, n$. D'après (1) pour $\varepsilon = 1/2^{n+1}$, l'ensemble des entiers p tels que $u_p \neq a$ et $|u_p - a| < 1/2^{n+1}$ est infini. On en choisit un, qu'on note p_{n+1} qui soit $> p_n$. De cette façon, on construit par récurrence une suite $(p_n)_{n>0}$ d'entiers strictement croissante et telle que

$$(2) \qquad |u_{p_n} - a| < 1/2^n \text{ et } u_{p_n} \neq a \text{ pour tout entier } n > 0$$

D'après (2), la suite $(u_{p_n})_{n>0}$ converge vers a qui est donc une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n>0}$.
□

2.5 Suites de Cauchy

DEFINITION 2.7 — *Une suite $(u_n)_{n>0}$ est dite de Cauchy si*

$$(3) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall p, q \geq N)(|u_p - u_q| < \varepsilon)$$

LEMME 2.8 — *Toute suite $(u_n)_{n>0}$ convergeant vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ est de Cauchy.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de "$\lim_{n \to \infty} u_n = \ell$", il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$. Montrons que la condition (3) est satisfaite pour cet entier N. Soient p, q deux entiers $\geq N$. On a donc $|u_p - \ell| < \varepsilon/2$ et $|u_q - \ell| < \varepsilon/2$. On déduit :

$$|u_p - u_q| = |(u_p - \ell) + (\ell - u_q)| \leq |u_p - \ell| + |\ell - u_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square$$

THEOREME 2.9 (Th. fondamental) — *La réciproque du lemme 2.8 est vraie, i.e., toute suite de Cauchy a une limite $\ell \in \mathbb{R}$.*

La démonstration de ce théorème est l'objet de la section suivante. Commençons par deux propriétés des suites de Cauchy qui interviendront dans cette démonstration.

LEMME 2.10 — *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Preuve. Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite de Cauchy. D'après (3), pour $\varepsilon = 1$, il existe $N > 0$ tel que pour tous entiers $p, q \geq N$, on ait $|u_p - u_q| < 1$. Posons

$$A = \max(1 + |u_N|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|)$$

Montrons que A est un majorant de la suite $(u_n)_{n>0}$. Soit $n > 0$. Si $1 \leq n \leq N-1$, on a évidemment $|u_n| \leq A$. Supposons maintenant $n \geq N$. On a

$$|u_n| = |(u_n - u_N) + u_N| \leq |u_n - u_N| + |u_N| \leq 1 + |u_N| \leq A$$

(L'avant-derniére inégalité résultant de $n \geq N$). □

LEMME 2.11 — *Toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence $\ell \in \mathbb{R}$ converge vers ℓ.*

Preuve. Il s'agit de montrer que

$$(4) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall n \geq N)(|u_n - \ell| < \varepsilon)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de “valeur d'adhérence ”, il existe une sous-suite $(u_{p_n})_{n>0}$ qui converge vers ℓ. Donc il existe un entier $N_1 > 0$ tel que

$$(5) \qquad \forall n \geq N_1, |u_{p_n} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

D'autre part, comme la suite $(u_n)_{n>0}$ est de Cauchy, il existe un entier $N_2 > 0$ tel que

$$(6) \qquad \forall p, q \geq N_2, |u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Montrons que la condition (4) est satisfaite pour cet entier N. Soit $n \geq N$. Comme $n \geq N_1$, on a d'après (5), $|u_{p_n} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $n \geq N_2$, d'après la remarque ci-dessous, on a aussi $p_n \geq N_2$ et donc d'après (6), $|u_{p_n} - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. On déduit :

$$|u_n - \ell| = |(u_n - u_{p_n}) + (u_{p_n} - \ell)| \leq |u_n - u_{p_n}| + |u_{p_n} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square$$

Remarque. Si $(p_n)_{n>0}$ est une suite strictement croissante d'entiers > 0, on a $p_n \geq n$, pour tout $n > 0$. Cette propriété se démontre par récurrence. Pour $n = 1$: on a $p_1 \geq 1$ puisque p_1 est un entier positif. Supposons $p_n \geq n$. De la stricte croissance, on déduit $p_{n+1} > p_n$. Comme p_n et p_{n+1} sont deux entiers, on a automatiquement $p_{n+1} \geq p_n + 1 \geq n + 1$.

(complément)

§ 3 Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$

3.1 Enoncé du théorème fondamental

Rappelons quelques définitions.

DEFINITION 3.1 — *On appelle plus grand (resp. plus petit) élément d'un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ un élément de A plus grand ou égal (resp. plus petit ou égal) à tous les autres éléments de A.*

Remarque. Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ ne possède pas forcément de plus grand (resp. plus petit) élément (par exemple $A =]0,1[$). Mais s'il en possède un, alors celui-ci est unique. En effet, supposons que a_1 et a_2 soient deux plus grands éléments de A. On a alors par définition $a_1 \geq a_2$ et $a_2 \geq a_1$ d'où $a_1 = a_2$.

DEFINITION 3.2 — *On dit qu'un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure (resp. la borne inférieure) d'un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ si a est le plus petit majorant (resp. le plus grand minorant) de A, de faςn plus précise, si l'ensemble des majorants de A (resp. des minorants de A) admet a comme plus petit élément (resp. comme plus grand élément).*

THEOREME 3.3 (Th.fondamental) — *Les conditions (i), (ii), (iii), (iv), (v) sont équivalentes.*

(i) Toute suite de $\mathbb{R}$ décroissante et minorée a une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

(ii) (a) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, et
(b) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure, et
(c) Toute suite de $\mathbb{R}$ croissante et majorée converge vers la borne supérieure de ses termes, et
(d) Toute suite de $\mathbb{R}$ décroissante et minorée converge vers la borne inférieure de ses termes.

(iii) Toute partie de $\mathbb{R}$ infinie et bornée a un point d'accumulation.

(iv) Toute suite de $\mathbb{R}$ bornée admet une valeur d'adhérence $a \in \mathbb{R}$.

(v) Toute suite de $\mathbb{R}$ de Cauchy a une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

3.2 Preuve du Th.3.3

$(i) \Rightarrow (ii)$. Il faut vérifier que sous la condition (i), les propriétés (a), (b), (c), (d) sont satisfaites.

Preuve de (a). Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée. Notons A^+ l'ensemble de ses majorants, *i.e.*,

$$A^+ = \{x \in \mathbb{R} | \forall a \in A,\ a \leq x\}$$

Il s'agit de montrer que A^+ a un plus petit élément.

Par hypothèse, A et A^+ sont non vides. On choisit $a \in A$ et $b \in A^+$. Pour chaque entier $n > 0$, on divise l'intervalle $[a,b]$ en 2^n intervalles égaux (de longueur $(b-a)/2^n$). Les $2^n + 1$ points de cette subdivision sont les points

$$a < a + \frac{(b-a)}{2^n} < \cdots < a + \frac{k(b-a)}{2^n} < \cdots < b$$

Soit k_n le plus petit entier tel que l'intervalle

$$I_n = [a + \frac{k_n(b-a)}{2^n}, a + \frac{(k_n+1)(b-a)}{2^n}[$$

contienne un élément de A^+. Pour tout entier $n > 0$, on a

$$I_n \cap A^+ \neq \emptyset$$

et d'autre part, il n y a pas d'élément de A^+ en deçà de l'intervalle I_n. On divise ensuite l'intervalle I_n en deux intervalles $J_{n,1}$ et $J_{n,2}$ de même longueur. Plus précisément $J_{n,1}$ et $J_{n,2}$ sont les deux intervalles

$$\begin{cases} J_{n,1} = [a + \frac{k_n(b-a)}{2^n}, a + \frac{k_n(b-a)}{2^n} + \frac{b-a}{2^{n+1}}[\\ J_{n,2} = [a + \frac{k_n(b-a)}{2^n} + \frac{b-a}{2^{n+1}}, a + \frac{(k_n+1)(b-a)}{2^n}[\end{cases}$$

On a alors

$$J_{n,1} \cap A^+ \neq \emptyset \text{ ou bien } J_{n,2} \cap A^+ \neq \emptyset$$

et d'autre part, il n y a pas d'élément de A^+ en deçà de l'intervalle $J_{n,1}$. Par conséquent, on a

$$I_{n+1} = J_{n,1} \text{ ou bien } I_{n+1} = J_{n,2}$$

Grâce à ce qui précede, on peut construire une suite $(u_n)_{n>0}$ vérifiant pour tout $n > 0$

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} u_n \in I_n \cap A^+ \\ u_{n+1} \leq u_n \end{cases}$$

Construction : on choisit $u_1 \in I_1$. Supposons construits $u_1, \dots, u_N$ vérifiant (1) pour $n = 1, \dots, N$. On définit u_{N+1} de la façon suivante : on prend pour u_{N+1} un élément de $I_{N+1} \cap A^+$ qui soit $\leq u_N$. (On peut choisir $u_{N+1} = u_N$ sauf si $u_N \in J_{N,2}$ et que $I_{N+1} = J_{N,1}$. Mais dans ce cas, on prend pour u_{N+1} n'importe quel élément de $I_{N+1} \cap A^+ = J_{N,1} \cap A^+$; cet élément sera automatiquement $\leq u_N$).

La suite $(u_n)_{n>0}$ ansi construite est décroissante d'après (1) et est minorée par a (puisque tous les termes sont dans A^+). Grâce à l'hypothèse (i), cette suite a une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrons que ℓ est la borne supérieure de A. Soit $x \in A$. Pour tous entiers n, m tels que $n \geq m > 0$, on a

$$x \leq u_n \leq u_m$$

En passant à la limite en n, on obtient, pour tout entier $m > 0$ et tout $x \in A$

$$\text{(2)} \qquad x \leq \ell \leq u_m$$

Donc ℓ est un majorant de A. Supposons que ce ne soit pas le plus petit majorant, *i.e.*, qu'il existe $\ell' \in A^+$ tel que $\ell' < \ell$. Revenons au découpage de $[a, b]$ en 2^n intervalles égaux. Pour n suffisamment grand, *i.e.*, pour n supérieur ou égal à un certain entier n_o, les deux éléments ℓ, ℓ' seront dans deux intervalles <u>distincts</u> du découpage. Par construction, les termes u_n seront donc $< \ell$ pour $n \geq n_o$. Cela contredit la seconde inégalité de (2). □

Preuve de (c). On va déduire (c) de (b) qu'on vient de démontrer. Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite croissante et majorée. L'ensemble $A = \{u_n | n > 0\}$ de ses termes est non vide et majoré. D'après (b), A possède une borne supérieure L. Montrons que $\lim_{n\to\infty} u_n = L$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Le nombre $L - \varepsilon$ étant $< L$ n'est pas un majorant de A. Donc il existe un élément $u_N \in A$ tel que $u_N > L - \varepsilon$. Soit n un entier $\geq N$. On a alors

$$L - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq L$$

(Utiliser la croissance de $(u_n)_{n>0}$ et le fait que L est un majorant de A). Ceci montre en particulier que pour tout entier $n \geq N$, on a $|u_n - L| < \varepsilon$. □

Preuve de (b) et (d). On déduit (b) de (c) comme on a déduit (a) de (i) et ensuite (d) de (b) comme on a déduit (c) de (a). (On peut aussi remarquer que, en changeant u_n en $-u_n$, on obtient que $(c) \Leftrightarrow (d)$, et en changeant A en $-A$, que $(a) \Leftrightarrow (b)$). □

La preuve de $(i) \Rightarrow (ii)$ est complète.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie infinie et bornée. D'après (ii), elle a une borne inférieure. Mais cette borne inférieure n'est pas forcément un point d'accumulation de A. Cependant on a le résultat suivant qui sera un point essentiel de la démonstration.

LEMME 3.4 — *Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et minorée. Si* $\inf(B)$ *n'est pas un point d'accumulation de B, alors on a*

$$\inf(B \setminus \{\inf(B)\}) > \inf(B)$$

Preuve. Posons $b = \inf(B)$. Que b ne soit pas un point d'accumulation de B signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in B$, ou bien $x = b$ ou bien $|x - b| \geq \varepsilon$. Mais alors tous les éléments de B sauf peut-être b lui-même sont nécessairement $\geq b + \varepsilon$. Autrement dit le nombre réel $b + \varepsilon$ est un minorant de $B \setminus \{b\}$. Le nombre réel $\inf(B \setminus \{b\})$ qui est le plus grand des minorants de $B \setminus \{b\}$ est donc $\geq b + \varepsilon$. □

Revenons à la démonstration de $(ii) \Rightarrow (iii)$. On définit par récurrence une suite $(A_n, m_n)_{n>0}$ $(A_n \subset A,\ m_n \in \mathbb{R})$ de la façon suivante. On pose

$$\begin{cases} A_1 = A \\ m_1 = \inf(A_1) \end{cases}$$

Si (A_n, m_n) est le n-ième terme de la suite, on pose :

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n \setminus \{m_n\} \\ m_{n+1} = \inf(A_{n+1}) \end{cases}$$

Pour tout $n > 0$, on a $A_{n+1} \subset A_n \subset A$. On en déduit $m_n \leq m_{n+1} \leq sup(A)$.

[1ère inégalité : car l'ensemble des minorants de A_n est inclus dans l'ensemble des minorants de A_{n+1}.]

[2ème inégalité : soit $x \in A_{n+1}$. On a alors $m_{n+1} \leq x$. D'autre part, comme $A_n \subset A$, $x \in A$ et donc $x \leq \sup(A)$. D'où $m_{n+1} \leq \sup(A)$.]

D'après (ii)(c), la suite $(m_n)_{n>0}$, croissante et majorée, a une limite $m \in \mathbb{R}$. Montrons que m est un point d'accumulation de A. Il y a deux cas :

1er cas : Pour tout $n > 0$, $m_n < m$.
Il s'agit de montrer que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)(x \neq m \text{ et } |x - m| < \varepsilon)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de "$\lim_{n \to +\infty} m_n = m$", il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|m_n - m| < \varepsilon$ et donc $m - \varepsilon < m_n \leq m$ (puisque m est un majorant de la suite).

Dans le cas considéré, on a même $m_n < m$. Fixons $n = N$. Le nombre m_N étant le plus grand minorant de A_N, le nombre m n'est pas un minorant de A_N. Donc il existe $x \in A_N \subset A$ tel que $m_N \leq x < m$. En particulier, on a

$$x \neq m \text{ et } |m - x| = m - x < m - m_N < \varepsilon$$

2ème cas : Il existe un entier $n > 0$ tel que $m_n = m$.
On a alors $m_n = m_{n+1} = m$. L'égalité $m_{n+1} = m_n$ se réécrit $\inf(B_n \setminus \{\inf(B_n)\}) = \inf(B_n)$. D'après le lemme 3.4, on déduit que le nombre $\inf(B_n)$ est un point d'accumulation de B_n. Comme $B_n \subset A$, c'est *a fortiori* un point d'accumulation de A.

Cela termine la preuve de $(ii) \Rightarrow (iii)$. $\square$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Soient $(u_n)_{n>0}$ une suite bornée. L'ensemble $A = \{u_n | n > 0\}$ de ses termes est donc une partie de $\mathbb{R}$ bornée. On distingue alors deux cas.

1er cas : A est infini.
D'après (iii), l'ensemble A a un point d'accumulation a. D'après le lemme 2.6, a est automatiquement une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n>0}$.

2ème cas : A est fini. (par exemple pour $u_n = (-1)^n$).
Dans ce cas, il existe au moins un élément de A qui s'écrit $a = u_n$ pour un infinité d'entiers $n > 0$ (principe des tiroirs). Soit $(u_{p_n})_{n>0}$ la suite extraite de $(u_n)_{n>0}$ consistant en tous les termes de la suite $(u_n)_{n>0}$ égaux à a. La suite $(u_{p_n})_{n>0}$ est la suite constante égale à a et converge donc vers a. Le nombre réel a, limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n>0}$, est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n>0}$. $\square$

$(iv) \Rightarrow (v)$ Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite de Cauchy. D'après le lemme 2.10, elle est bornée. D'après l'hypothèse (iv), elle a alors une valeur d'adhérence . D'après le lemme 2.11, elle a une limite $\ell \in \mathbb{R}$. $\square$

$(v) \Rightarrow (i)$ Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite décroissante et minorée. Soit a un minorant de la suite. On va montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ est de Cauchy. L'hypothèse (v) permettra alors de conclure qu'elle a une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Il s'agit de montrer que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall p, q \geq N)(|u_p - u_q| < \varepsilon) \tag{3}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit un entier n tel que $(u_1 - a)/2^n < \varepsilon$. Puis on divise l'intervalle $[a, u_1]$ en 2^n intervalles égaux (de longueur $(u_1 - a)/2^n$). Les $2^n + 1$ points de cette subdivision sont les points

$$a_k = a + \frac{k(u_1 - a)}{2^n}, \; k = 0, 1, \ldots, 2^n$$

Soit k_o le plus petit entier tel que l'intervalle $[a_k, a_{k+1}[$ contienne au moins un terme de la suite $(u_n)_{n>0}$. Notons u_N ce terme et vérifions que (3) est satisfaite pour cet entier N. Soient p, q deux entiers $\geq N$. Les termes u_p et u_q sont d'une part $\leq u_N$ (décroissance de $(u_n)_{n>0}$) et d'autre part $\geq a_{k_o}$ (par minimalité de k_o). Comme $u_N < a_{k_o+1}$, u_p et u_q sont tous deux dans l'intervalle $[a_{k_o}, a_{k_o+1}[$. On déduit

$$|u_p - u_q| \leq a_{k_o+1} - a_{k_o} = \frac{u_1 - a}{2^n} < \varepsilon \qquad \square$$

Le Th.3.3 affirme que 5 propriétés sont équivalentes. En fait non seulement ces propriétés sont équivalentes mais elles sont vraies. Pour le voir, il suffit de vérifier l'une d'entre elles. Or que l'une de ces propriétés soit satisfaite est vrai par définition de $\mathbb{R}$. Le but de la section suivante est de préciser un peu cette définition qui n'a jamais été donnée de façon précise.

§ 4 Définition de $\mathbb{R}$

DEFINITION 4.1 — *Un corps commutatif totalement ordonné* $(R, +, \times, \leq)$ *est dit archimédien si pour tout* $a \in R$ *et tout* $b \in R$ *tel que* $b > 0$, *il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $nb > a$.

Exemple : le corps $\mathbb{Q}$.

THEOREME 4.2 — *Le Th.3.3 reste vrai si on remplace* $\mathbb{R}$ *par tout corps commutatif archimédien* R.

Preuve. La démonstration du Th.3.3 se généralise sans difficultés. On n'a en fait utilisé que des propriétés d'un corps commutatif archimédien en général. □

THEOREME 4.3 (admis) — *Il existe un corps archimédien vérifiant l'une (et donc toutes) des conditions (i), (ii), (iii), (iv), (v). De plus si deux corps archimédiens vérifient ces conditions, alors ils sont isomorphes.*

DEFINITION 4.4 — *Ce corps, unique à isomorphisme près, est noté* $\mathbb{R}$.

DEFINITION 4.5 — *Un corps commutatif archimédien est dit complet s'il vérifie la condition (v) du Th.3.3. Le corps* $\mathbb{R}$ *est donc par définition le seul (à isomorphisme près) corps commutatif archimédien complet.*

Le Th.2.9 est donc une conséquence de la définition de $\mathbb{R}$ et du Th.3.3.

Contre-exemple. Le corps $\mathbb{Q}$ est un exemple de corps archimédien non complet. Il existe des suites $(u_n)_{n>0}$ à termes $u_n \in \mathbb{Q}$ de Cauchy mais qui n'ont pas de limite dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par récurrence par $u_1 = 1/2$ et $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{8}$ est une suite de $\mathbb{Q}$ décroissante et minorée par 0. Elle est donc de Cauchy. Si elle avait une limite $\ell \in \mathbb{Q}$, cette limite serait solution de $\ell = \ell^2 + \frac{1}{8}$. Or cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$. (En fait, cette suite a une limite dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

§3. SUITES RECURRENTES D'ORDRE 1.

Il n'y a pas de méthode systématique précise pour l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$. On peut seulement dégager un certain nombre de principes (Cf. Conclusion plus bas).

Exemple 1 (a) Soit $f(x) = x^3-3x^2+3x$. Montrer que
(i) $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [1,2]$
(ii) $f([1,2]) = [1,2]$.
(b) Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie par $u_1 = 3/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Déduire de (a) que la suite est décroissante et minorée. A-t-elle une limite? Justifier. Si oui, donner sa valeur.

Solution. (a) L'inégalité (i) s'obtient en factorisant $f(x)-x$:

$$f(x)-x = x^3-3x^2+2x = x(x^2-3x+2) = x(x-1)(x-2)$$

On fait une étude rapide de la cubique $f(x)$. La fonction $f(x)$ est croissante sur R. En effet:

$$f'(x) = 3x^2-6x+3 = 3(x-1)^2$$

En particulier, f est croissante sur le segment [1,2] et

$$f([1,2]) = [f(1),f(2)] = [1,2]$$

(b) Montrons par récurrence que $u_n \in [1,2]$ pour tout $n > 0$. C'est vrai pour $n = 1$ par hypothèse. Supposons $u_n \in [1,2]$. On a alors

$$u_{n+1} = f(u_n) \in f([1,2]) = [1,2] \qquad \text{(d'après (ii))}$$

La propriété est donc démontrée. On écrit maintenant l'inégalité (i) pour $x = u_n$. On obtient

$$f(u_n) \leq u_n \qquad \text{soit} \qquad u_{n+1} \leq u_n$$

La suite $(u_n)_{n>0}$ est donc décroissante. Comme elle est minorée par 1, elle a une limite L. En passant à la limite dans l'égalité valable pour tout $n > 0$

$$u_{n+1} = u_n^3-3u_n^2+3u_n,$$

on obtient

$$L = L^3-3L^2+3L \iff L(L-1)(L-2) = 0 \iff L = 0,\ 1 \text{ ou } 2$$

Mais en passant à la limite dans l'inégalité $1 \leq u_n \leq 2$, on obtient que $1 \leq L \leq 2$. Cela exclut la valeur $L = 0$. D'autre part, la suite étant décroissante, on a $u_n \leq u_1 = 3/2$ pour tout $n > 0$ et donc $L \leq 3/2$. D'où finalement $L = 1$.

Attention! Le raisonnement donnant la décroissance de $(u_n)_{n>0}$ doit être fait après avoir montré que $u_n \in [1,2]$ pour tout $n > 0$. En effet, c'est à cette condition qu'on peut faire $x = u_n$ dans (i).

Généralisation

Une partie du raisonnement se généralise sans difficultés. Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite définie par $u_1 = a \in R$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x)$ est une fonction construite à partir des fonctions usuelles du Ch.3 (ou plus généralement une fonction continue (Cf. Ch.6)). Supposons qu'on connaisse un segment $S = [a,b]$ ayant les trois propriétés suivantes (dans l'exemple 1, $S = [1,2]$):

(i) $u_1 = a \in S$
(ii) La fonction $f(x)-x$ est de signe constant sur S.
(iii) $f(S) \subset S$ (on dit que S est stable par f).

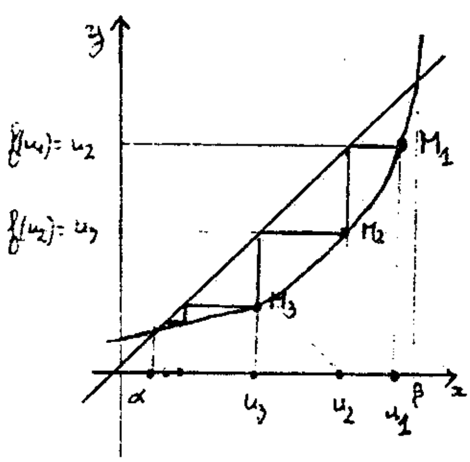
Alors, on montre facilement, en généralisant l'exemple 1, que:

- pour tout $n > 0$, $u_n \in S$, en particulier, la suite $(u_n)_{n>0}$ est bornée,
- la suite $(u_n)_{n>0}$ est monotone,
- par conséquent, la suite $(u_n)_{n>0}$ a une limite $L \in \mathbb{R}$,
- cette limite L est une solution de l'équation $f(x) = x$; on dit que L est un point fixe de f. D'autre part, $L \in S$.

Il reste que le segment S vérifiant (i), (ii), (iii) n'est pas donné a priori. Il n'est d'ailleurs pas garanti que ce segment existe et que la méthode indiquée soit exactement celle à suivre. Il faut commencer par faire une étude graphique. Précisément, on trace sur un même graphique le graphe G_f et la première bissectrice $y = x$. La procédure suivante permet de suivre graphiquement le comportement des termes de la suite.

Procédure graphique

On reporte sur la figure le point $M_1(u_1, f(u_1))$ du graphe G_f. A partir du point M_1, on se déplace horizontalement jusqu'à couper la 1ère bissectrice, on se déplace alors verticalement jusqu'à couper le graphe G_f en un point M_2. Ce point est le point de coordonnées $(u_2, f(u_2))$. On répète la même procédure à partir du point M_2 etc... On obtient de cette façon une suite de points $(M_n)_{n>0}$ dont les abscisses constituent la suite $(u_n)_{n>0}$.



Par exemple, sur la figure ci-contre, on voit que la suite $(u_n)_{n>0}$ converge en décroissant vers le point fixe α de f le plus petit. Il faut ensuite démontrer ce qu'on a observé graphiquement. Dans le cas présent, on peut suivre la méthode exposée plus haut en prenant pour S le segment $[\alpha,\beta]$ où β désigne le point fixe de f le plus grand.

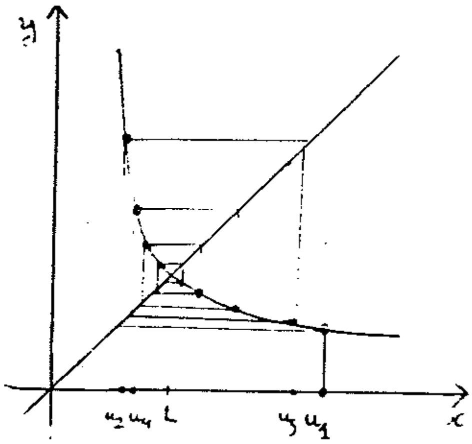
Remarque. Le premier terme u_1 est une donnée déterminante de la définition d'une suite récurrente. Par exemple, on observe que si $u_1 < \alpha$ dans l'exemple graphique précédent, la suite converge en croissant vers α, et si $u_1 > \beta$, la suite tend vers $+\infty$ en croissant.

Exemple 2 Etudier la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par $u_1 = 5/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = x^2-4x+6$.

Exemple 3 Reprendre l'exemple 3 du §2 avec cette nouvelle méthode.

Un autre exemple

L'exemple ci-contre est différent. On observe que les termes de la suite $(u_n)_{n>0}$ convergent vers le point fixe L de f en "tournant autour" de L. Plus précisément, la suite des termes d'indice pair converge vers L en croissant et la suite des termes d'indice impair converge vers L en décroissant. Dans cette situation, on peut procéder de la façon suivante. Les suites $(v_n)_{n>0}$ et $(w_n)_{n>0}$ de terme général $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$



vérifient les relations de récurrence $v_{n+1} = fof(v_n)$ et $w_{n+1} = fof(w_n)$. On calcule fof(x) et on montre que

• Les intervalles [0,L] et [L,+∞[sont stables par fof; on en déduit, en raisonnant par récurrence, que $v_n \in [0,L]$ et $w_n \in [L,+\infty[$ pour tout $n > 0$.
• $fof(x) > x$ pour tout $x \in [0,L]$, ce qui entraîne que la suite $(v_n)_{n>0}$ est croissante.
• $fof(x) < x$ pour tout $x \in [L,+\infty]$, ce qui entraîne que la suite $(w_n)_{n>0}$ est décroissante.

On en déduit que les suites $(v_n)_{n>0}$ et $(w_n)_{n>0}$ ont une limite. Cette limite est nécessairement égale à L, le seul point fixe de fof. D'après l'exercice 13, on peut conclure que la suite $(u_n)_{n>0}$ a pour limite L.

Exemple 4 Etudier la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par $u_1 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$.

Conclusion On retiendra les points suivants pour l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.
- L'étude graphique, qui donne une idée précise du comportement de la suite $(u_n)_{n>0}$.
- La recherche d'intervalles stables par f: si $f(I) \subset I$ et si $u_1 \in I$, tous les termes de la suite $(u_n)_{n>0}$ sont dans I; on obtient de cette façon des majorants et des minorants de la suite $(u_n)_{n>0}$.
- L'étude du signe de $f(x)-x$: la suite $(u_n)_{n>0}$ est monotone si $f(x)-x$ est de signe constant sur un intervalle qui contient tous les termes de la suite.
- La recherche des points fixes de f: si f est construite à partir des fonctions usuelles (ou, plus généralement continue), la limite de la suite $(u_n)_{n>0}$, si elle existe, est un point fixe de f.

Remarque. Dans le cas particulier où f(x) est croissante, on peut aussi, pour la monotonie de la suite, utiliser la remarque suivante. La suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante si $u_2 \geq u_1$ et décroissante si $u_2 \leq u_1$.

§4. SERIES NUMERIQUES.

4.1 Définitions et exemples.

Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite réelle. Considérons la suite $(U_n)_{n>0}$ construite à partir de $(u_n)_{n>0}$ de la façon suivante: pour tout entier $n > 0$, U_n est la somme des n premiers termes de la suite $(u_n)_{n>0}$, i.e.,

$$U_n = u_1+u_2+\ldots+u_n,$$

ce qu'on peut noter aussi

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

La suite $(U_n)_{n>0}$ des "sommes partielles" U_n, est appelée série de terme général u_n. La série est dite convergente si elle a une limite finie et divergente sinon. Quand elle existe, la limite de la suite $(U_n)_{n>0}$ est appelée somme de la série de terme u_n et est notée

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Exemple 1 (Séries géométriques) Etudier la convergence de la série de terme général r^{n-1} $(n > 0)$.

Solution. On commence par calculer la somme partielle des n premiers termes

$$U_n = 1+r+r^2+ \dots +r^{n-1}$$

Pour cela, on calcule $(r-1)U_n$. On obtient

$$(r-1)U_n = r^n-1$$

d'où la formule, valable pour $r \neq 1$

$$U_n = \frac{r^n-1}{r-1}$$

Conclusions:

$$\begin{cases} \text{si } |r| < 1 & \text{la série est convergente de somme } 1/(1-r) \\ \text{si } |r| > 1 & U_n \underset{+\infty}{\sim} r^{n-1}/r-1, \text{ la série diverge} \\ \text{si } r = 1 & U_n = n, \text{ la série diverge, sa somme vaut } +\infty \\ \text{si } r = -1 & U_n = (-1)^{n-1}, \text{ la série diverge} \end{cases}$$

Exemple 2 L'exemple 6 du §2 montre que la série de terme général $1/n^2$ est une série convergente.

Exemple 3 (Séries de Riemann) Plus généralement, la série de terme général $1/n^s$ est une série convergente si $s > 1$ et divergente si $s \leq 1$. Plus précisément, si $s \leq 1$, les sommes partielles

$$U_n = 1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s}$$

tendent vers $+\infty$. La preuve de ce résultat important est proposée en exercice (Cf. Ch. 7 Exercice 24).

Remarque. Comme pour les suites, la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. Précisément, si p est un entier fixé, la convergence de la série de terme u_n est équivalente à la convergence de la série de terme u_{n+p}. En revanche, s'il y a convergence, les sommes de ces deux séries diffèrent. On a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+p} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{p} u_n$$

Le point essentiel de l'étude d'une série est celui de sa convergence. Déterminer ensuite la valeur exacte de sa somme est un problème difficile qu'on ne sait pas faire en général. Dans la suite de cette section, nous allons donner les principaux tests de convergence. Ceux-ci reposent pour la plupart sur les résultats du début de chapitre sur les suites, qu'on applique à la suite des sommes partielles.

PROPOSITION 4.1 *Si la série de terme général* u_n *est convergente, alors la suite* $(u_n)_{n>0}$ *a pour limite* 0.

La première chose à vérifier quand on étudie une série, c'est que son terme général tend vers 0. Attention! Cela ne suffit pas pour que la série converge. La suite $(1/n)_{n>0}$ tend vers 0 mais la série de terme général 1/n diverge (Cf. Exercice 8).

Preuve de la Prop.4.1. Si U_n désigne la somme partielle $U_n = u_1+u_2+...+u_n$, on a

$$U_n-U_{n-1} = u_n$$

Par définition, la série de terme u_n converge ssi la suite $(U_n)_{n>0}$ tend vers une limite finie S. D'après l'égalité ci-dessus, la suite $(u_n)_{n>0}$ est donc une suite convergente, de limite S-S = 0.

PROPOSITION 4.2 *Si* u_n *et* v_n *sont les termes de séries convergentes et si* α *et* β *sont deux nombres réels quelconques, alors la série de terme général* $\alpha u_n+\beta v_n$ *est convergente. Et on a alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n+\beta v_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Preuve. Pour tout entier n > 0, on a:

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n}(\alpha u_k+\beta v_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} u_k + \beta \sum_{k=1}^{n} u_k$$

ce qui, en introduisant les suites $(U_n)_{n>0}$, $(V_n)_{n>0}$, $(W_n)_{n>0}$ des sommes partielles de termes respectifs u_n, v_n, $\alpha u_n+\beta v_n$, se note

$$W_n = \alpha U_n + \beta V_n$$

Par hypothèse, les suites $(U_n)_{n>0}$, $(V_n)_{n>0}$ ont une limite quand n tend vers $+\infty$. D'après les théorèmes généraux sur la convergence des suites, la suite $(W_n)_{n>0}$ est également convergente. Cela signifie exactement que la série de terme $\alpha u_n+\beta v_n$ est convergente. On obtient la formule de la Prop.4.2 en passant à limite dans (*).

4.2 Séries à termes positifs.

Dans ce paragraphe, on ne considère que des séries dont les termes u_n sont tous positifs (ou nuls). La remarque de base dans ce cas est que la suite $(U_n)_{n>0}$ des sommes partielles est une suite croissante. D'après le Th.2.2, on a donc

PROPOSITION 4.3 *Pour une série à termes u_n positifs,*
– ou bien les sommes partielles U_n sont majorées par un réel A (indépendant de n) et alors la série est convergente.,
– ou bien les sommes partielles U_n ne sont pas majorées et alors les sommes partielles tendent vers $+\infty$; la série est divergente.

Note. La Prop.4.3 et plus généralement les résultats de ce paragraphe s'appliquent
- si la série considérée est à termes positifs, mais seulement à partir d'un certain rang (Cf. §4.1 Remarque).
- si la série considérée est à termes négatifs (on applique les résultats à la série de termes opposés).

De la Prop.4.3, on va déduire le résultat le plus important de cette section.

THEOREME 4.4 *Soient $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ deux suites à termes positifs.*
(a) *On suppose que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n > 0$. Si la série de terme v_n est convergente, alors la série de terme u_n l'est aussi. De façon équivalente, si la série de terme v_n est divergente, alors la série de terme u_n l'est aussi.*
(b) *On suppose que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors la convergence de la série de terme u_n est équivalente à la convergence de la série de terme v_n.*

Preuve. (a) Sous l'hypothèse, on a, pour tout $n > 0$

$$U_n = u_1+...+u_n \leq V_n = v_1+...+v_n$$

Donc, si la suite $(V_n)_{n>0}$ est majorée, la suite $(U_n)_{n>0}$ l'est aussi. Le résultat se déduit donc de façon immédiate de la Prop.4.3.

(b) Par hypothèse, la suite $(u_n/v_n)_{n>0}$ tend vers 1. En faisant $\varepsilon = 1$ dans la définition, on obtient que, pour n suffisamment grand, (précisément, supérieur à un certain entier N), on a

$$1/2 \leq u_n/v_n \leq 3/2,$$

et donc

$$\frac{v_n}{2} \leq u_n \leq \frac{3v_n}{2}$$

L'énoncé (b) découle maintenant du résultat (a). Si la série de terme u_n converge, la série de terme v_n aussi, d'après la première inégalité. Si la série de terme u_n diverge, la série de terme v_n aussi d'après la seconde inégalité.

De façon pratique, pour étudier la convergence d'une série à termes positifs, on essaie de comparer son terme général (en le majorant, en le minorant ou en cherchant un équivalent) au terme général d'une série de référence dont on sait si elle converge ou si elle diverge. Comme série de référence, on utilise le plus souvent les séries de Riemann de terme $1/n^s$ (Cf. Exemple 3) ou les séries géométriques de terme r^n (Cf. Exemple 1).

Exemple 4 Etudier la convergence des séries de terme général

(a) $u_n = \dfrac{1}{n^2-\cos(n)}$ (b) $u_n = (n^2+3)^{1/2}-n$

(c) $u_n = \left(\dfrac{1}{\mathrm{Log}(n)}\right)^{\mathrm{Log}(n)}$ (d) $u_n = \left(1-\dfrac{1}{\mathrm{Log}(n)}\right)^{\mathrm{Log}(n)}$

Solution. (a) $\dfrac{1}{n^2-\cos(n)} \leq \dfrac{1}{n^2+1}$ et $\dfrac{1}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$

La série de Riemann de terme $1/n^2$ est convergente.
Conclusion: La série de terme u_n est convergente.

(b) Un calcul d'équivalents donne

$$(n^2+3)^{1/2}-n \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2n}$$

Il y a donc divergence.

(c) On a

$$\left(\frac{1}{\mathrm{Log}(n)}\right)^{\mathrm{Log}(n)} = \exp[-\mathrm{Log}(n)\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(n))] \leq \exp[-2\mathrm{Log}(n)] = 1/n^2$$

dès que n est assez grand (précisément dès que $\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(n)) \geq 2$). Il y a donc convergence.

(d) On a: $\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{Log}(n)}\right)^{\mathrm{Log}(n)} = \exp\left(\mathrm{Log}(n)\mathrm{Log}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{Log}(n)}\right)\right)$

Or $\mathrm{Log}(n)\mathrm{Log}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{Log}(n)}\right) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{Log}(n)\dfrac{1}{\mathrm{Log}(n)} = 1$

Conclusion: la suite $(u_n)_{n>0}$ tend vers $e \neq 0$. La série de terme u_n ne converge donc pas.

Du Th.4.4, on peut déduire un certain nombre de règles de convergence classiques.

PROPOSITION 4.5 *Soit* $(u_n)_{n>0}$ *une suite à termes positifs.*

(a) Règle "$n^\alpha u_n$". (Cf. Exercice 30)

S'il existe $\alpha > 1$ *tel que* $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, *alors la série de terme* u_n *est convergente. S'il existe* $\alpha < 1$ *tel que* $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, *alors la série de terme* u_n *est divergente.*

(b) Règle de Cauchy. (Cf. Exercice 31)

La série de terme u_n *est convergente si* $\lim_{n\to+\infty} u_n^{1/n} < 1$ *et divergente si* $\lim_{n\to+\infty} u_n^{1/n} > 1$. *La règle de Cauchy ne permet* *pas de conclure si la suite* $(u_n^{1/n})_{n>0}$ *a pour limite* 1 *ou n'a pas de limite.*

(c) Règle de D'Alembert. (Cf. Exercice 32)
On suppose ici en plus que tous les termes u_n *sont non nuls. La série de terme* u_n *est convergente si* $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n < 1$ *et divergente si* $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n > 1$. *La règle de D'Alembert ne permet pas de conclure si la suite* $(u_{n+1}/u_n)_{n>0}$ *a pour limite* 1 *ou n'a pas de limite.*

Exemple 5 Etudier la convergence des séries de terme général

(a) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$ (b) $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$

(c) $u_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^n$ (d) $u_n = \dfrac{n!}{5^n}$

Solution. (a) Règle "$n^\alpha u_n$" avec $\alpha = 2$: convergence.
(b) Règle de d'Alembert ou de Cauchy: divergence.
(c) Règle de Cauchy: convergence.
(d) Règle de d'Alembert: divergence.

4.3 Séries à termes de signe quelconque.

Convergence absolue Pour une série dont les termes u_n ne sont pas de signe constant quelconque, on peut tout d'abord essayer de se ramener à la situation du paragraphe précédent en regardant la série de terme $|u_n|$. Une série de terme général u_n est dite absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

THEOREME 4.6 *Si une série de terme* u_n *est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Nous admettrons ce résultat dont la démonstration utilise la notion de suite de Cauchy.

Exemple 6 La série de terme $\sin(n)/n\sqrt{n}$ est absolument convergente. En effet, on a:

$$\left|\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

La série de terme $\sin(n)/n\sqrt{n}$ est donc convergente.

Dans la pratique, pour montrer qu'une série est convergente, on commence par chercher à montrer qu'elle est absolument convergente. On dispose pour cela de tous les résultats établis pour les séries à terme positif. Attention! La réciproque du Th.4.6 est fausse: il existe des séries qui sont convergentes mais pas absolument convergentes. Par exemple, la série de terme $(-1)^n/n$ n'est pas absolument convergente. Les résultats suivants vont montrer que c'est une série convergente.

Séries alternées Une série de terme genéral u_n est dite alternée si ses termes prennent alternativement les signes "+" et "-" et si la suite $(|u_n|)_{n>0}$ tend vers 0 en décroissant.

THEOREME 4.7 *Toute série alternée est convergente.*

Exemple 7 La série de terme $(-1)^n/n$ est alternée et est donc convergente. On peut montrer qu'elle converge vers Log(2) (Cf. Ch.9 Exercice 26).

Exemple 8 Montrer que la série de terme $(-1)^n \mathrm{Log}^2(n)/\sqrt{n}$ est convergente. (Indic.: montrer qu'elle est alternée à partir d'un certain rang).

Preuve du Th.4.7. Le terme général u_n d'une série alternée peut se mettre sous l'une des deux formes

$$u_n = (-1)^n x_n \quad \text{ou} \quad u_n = (-1)^{n-1} x_n$$

où $(x_n)_{n>0}$ est une suite à termes positifs tendant vers 0 en décroissant. Quitte à changer u_n en $-u_n$, on peut toujours se ramener à la première forme. Il s'agit de montrer que la suite $(U_n)_{n>0}$ des sommes partielles a une limite finie. On va montrer que les suites $(U_{2n})_{n>0}$ et $(U_{2n+1})_{n>0}$ sont adjacentes ([...] ci dessous). Le Th.2.3 permettra de conclure que ces deux suites convergent vers la même limite $L \in \mathbf{R}$. Ce qui, d'après l'exercice 13, montrera que la suite $(U_n)_{n>0}$ converge vers L.

[Vérifions les 3 conditions définissant les suites adjacentes.

(1) $(U_{2n})_{n>0}$ est décroissante et $(U_{2n+1})_{n>0}$ est croissante:

$U_{2(n+1)}-U_{2n} = u_{2n+2}+u_{2n+1} = x_{2n+2}-x_{2n+1} \leq 0$

$U_{2n+3}-U_{2n+1} = u_{2n+3}+u_{2n+2} = -x_{2n+3}+x_{2n+2} \geq 0$

(2) $U_{2n+1} \leq U_{2n}$ pour tout entier $n > 0$:

$U_{2n+1}-U_{2n} = u_{2n+1} = -x_{2n+1} \leq 0$

(3) La suite de terme $U_{2n+1}-U_{2n} = -x_{2n+1}$ tend vers 0.]