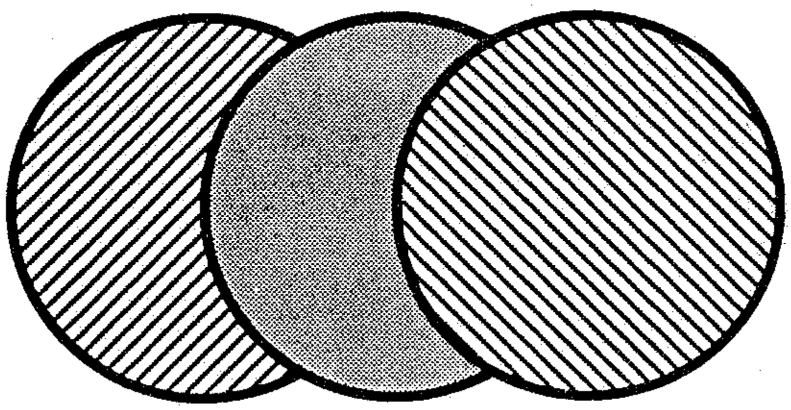
MATHEMATIQUES

Cahier d'exercices



1er semestre

• <u>Exercices de base</u>:

CH1: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 18, 20, 29, 33, 35, 38, 41, 42, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 58.

CH2: 2, 5, 8, 12, 16, 19, 32, 33, 35, 38, 41, 42, 44, 46, 48, 49, 55, 57, 61, 65.

CH3: 1, 4, 7, 9, 12, 16, 19, 20, 21, 25, 28, 30, 33.

CH4: 3, 13, 20, 25, 27, 29, 31, 33, 41, 43, 47, 50, 56.

CH5: 1, 7.

CH6: 1, 2, 4, 6, 9, 29, 32, 35, 40.

CH7: 1, 5, 9, 11, 14, 15, 16, 20, 22, 26, 30, 33, 36, 40, 45, 46, 48, 51, 53, 56, 58, 59, 61, 63, 67, 69, 71, 72, 76, 78.

CH8: 10, 11, 15, 16, 19, 27, 30, 33, 38, 40.

CH9: 3, 5, 7, 8, 11, 13, 16, 20, 22.

• Les exercices marqués du symbole " # " demandent plus d'initiative. Ils sont recommandés aux étudiants de la filière MASS, en complément des exercices de base.

• Les solutions des exercices non marqués # sont données brièvement dans la 2nde partie de ce cahier.

EXERCICES CH1

Dans le plan

1#. Vérifier sur les composantes les propositions suivantes.
(a) $1\vec{u} = \vec{u}$ (b) $0\vec{u} = \vec{0}$ (c) $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$
(d) $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
(e) $(h + k)\vec{u} = h\vec{u} + k\vec{u}$
(f) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
(g) I est le milieu de A et B ssi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

2#. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:
(i) les segments [A,C] et [B,D] ont même milieu
(ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
(iii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
Un quadrilatère (A,B,C,D) qui a les propriétés (i), (ii), (iii) est un **parallélogramme**.

3. Former l'équation de la droite D_1 passant par les points A(2,-3) et B(4,-5), puis de la droite (D_2) passant par C(1,-3) et parallèle au vecteur $\vec{v}(-1,2)$.

4. Former l'équation de la droite D_1 passant par les points A(1,-2) et B(-4,5), puis de la droite (D_2) passant par C(-1,-3) et parallèle au vecteur $\vec{v}(1,-2)$.

5. Former l'équation de la droite D_1 passant par le point A(-2,5) et de pente m = 2, puis de la droite (D_2) passant par C(-1,3) et perpendiculaire au vecteur $\vec{v}(-3,2)$.

6. Soit D_1 la droite d'équation $x-2y-2 = 0$ et D_2 la droite parallèle à D_1 et passant par le point A de coordonnées (0,1) . Donner l'équation de D_2 ainsi qu'un vecteur normal à D_2.

7. On considère le rectangle (ABDC); on donne les points A et C: A(-2,1) et C(-1,-2). Donner un vecteur directeur de la droite (AC) puis l'équation de la droite Δ passant par les milieux respectifs I et J des côtés AC et BD ainsi qu'un vecteur directeur de Δ.

8. Soient D_1 la droite passant par les deux points A(-2,-2) et B(0,1) et D_2 la droite orthogonale à D_1 en B . Donner un vecteur directeur de D_1, l'équation de D_2 et un vecteur directeur de D_2.

9. On considère le triangle (ABC) de sommets les points A(-2,1), B(3,2) et C(1,-2). On note D la hauteur du triangle issue de B. Donner un vecteur directeur de la droite (AC) puis l'équation de D ainsi qu'un vecteur directeur de D.

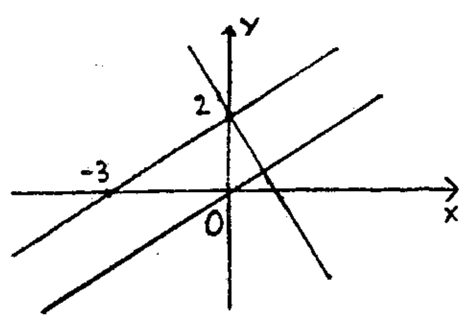
10. On considère le triangle (ABC) de sommets les points A(0,2), B(2,3) et C(3,0). Quelle est l'équation de la hauteur D issue de A?

11. On considère les droites D_1: $x-y+1 = 0$ et D_2: $mx+y+3 = 0$, (m paramètre réel). Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de D_1, puis de D_2. Trouver m de sorte que ces deux droites soient orthogonales.

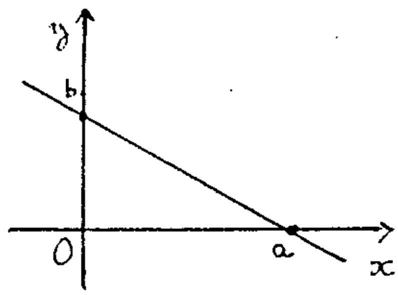
12. On considère les droites D_1: $x-my+1 = 0$ (m paramètre réel) et D_2: $2x+y+3 = 0$. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de D_1, puis de D_2. Trouver m de sorte que ces deux droites soient orthogonales.

13. Les droites suivantes sont-elles parallèles, orthogonales, égales? Faire une figure.
D_1: $x-y+1 = 0$
D_2: $-2x+2y+3 = 0$
D_3: $x+y-1 = 0$.
Donner les points d'intersection de D_1 et D_3 puis de D_2 et D_3. Calculer la distance d entre ces ceux points. Montrer que pour tous points P de D_1 et Q de D_2, on a $d(P,Q) \geq d$.

14. Donner les équations des droites définies par le schéma suivant.



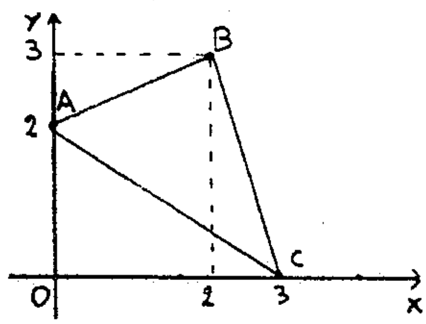
15. Soient a, b deux nombres réels $\neq 0$. Montrer que la droite qui intercepte les axes Ox et Oy respectivement en a et b (voir figure ci-dessous) est d'équation
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$



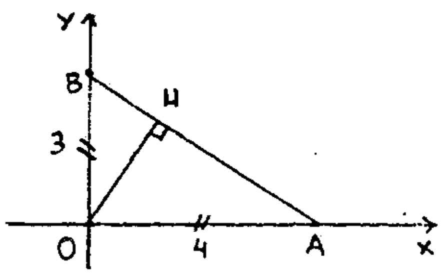
16. Représenter graphiquement le domaine D de R^2 défini par les inéquations:

$$\begin{cases} 2x+3y < 6 \\ y-x < 0 \\ y > -1 \end{cases}$$

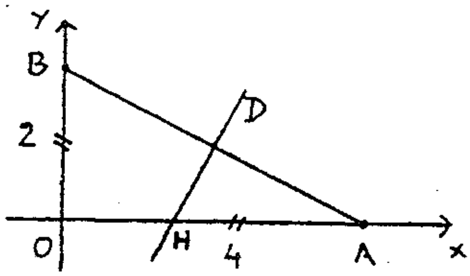
17. On considère le triangle ABC ci-dessous. Déterminer les équations des trois médianes du triangle. Montrer qu'elles se coupent en un point.



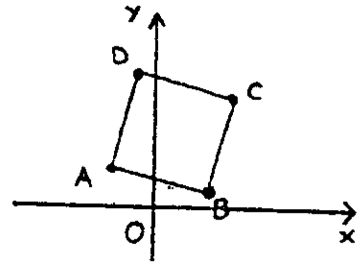
18. On considère le triangle OAB ci-dessous . Déterminer l'équation de la hauteur D issue de O puis les coordonnées du point d'intersection H des droites D et (AB).



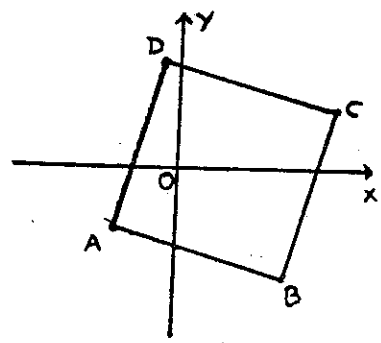
19. On considère le triangle OAB ci-dessous. Déterminer l'équation de la médiatrice D du côté AB puis les coordonnées du point d' intersection H des droites D et (OA).



20. On considère le carré ABCD ci-dessous. On donne A(-1,1) et C(2,3). Déterminer les équations des diagonales (AC) et (BD).



21. On considère le carré ABCD ci-dessous. On donne A(-1,-1) et C(2,1). Déterminer les équations des diagonales (AC) et (BD).



22. Déterminer l'équation de la tangente au cercle C(O,2) au point $A(1,\sqrt{3})$. Faire une figure.

23. Déterminer l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants.

(a) $\vec{u} = (\sqrt{3},2)$; $\vec{v} = (1,3\sqrt{3})$

(b) $\vec{u} = (1,\sqrt{2})$; $\vec{v} = (\sqrt{2}-2,\sqrt{2}+2)$

24. Déterminer les trois angles du triangle de sommets:

$A(-1,0)$; $B(1/2,\sqrt{3}/2)$; $C(1/2,-\sqrt{3}/2)$.

25#. (a) Vérifier les formules

(i) $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

(ii) $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$

(iii) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

(iv) $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2$

(b) En déduire que, pour $x \in \mathbf{R}$,

$(x\vec{u}+\vec{v}).(x\vec{u}+\vec{v}) = (\vec{u}.\vec{u})x^2+2(\vec{u}.\vec{v})x+(\vec{v}.\vec{v})$

(c) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz: pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a

$$-||\vec{u}||\,||\vec{v}|| \le \vec{u}.\vec{v} \le ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$$

avec égalité à droite ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles et de même sens et égalité à gauche ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles et de sens opposé (Indic.: considérer le discriminant du trinôme en x de la question (b)).

26#. (a) Vérifier la formule

$$\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$$

où $\vec{u} = (a,b)$ et $\vec{v} = (a',b')$ sont deux vecteurs.
(b) En déduire que les diagonales d'un losange (i.e., d'un parallélogramme dont les côtés sont de même longueur) sont orthogonales.

27#. (a) Vérifier la formule

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4\vec{u}.\vec{v}$$

où $\vec{u} = (a,b)$ et $\vec{v} = (a',b')$ sont deux vecteurs du plan. (On pourra la déduire de 26.(a)).
(b) En déduire que les diagonales d'un rectangle (i.e., d'un parallélogramme dont les côtés sont orthogonaux) ont la même longueur.

28#. Montrer que la somme des carrés des longueurs des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses diagonales.

29. Déterminer les points d'intersection de la courbe d'équation $x = y^2-2y$ et de la droite d'équation $x-y+2 = 0$.

30. Calculer en fonction du paramètre m les coordonnées du sommet (minimum) de la parabole d'équation $y = x^2+mx-1$. Pour quelle valeur de m la parabole passe-t-elle par le point (-2,3)?

31. Calculer en fonction du paramètre m les coordonnées du sommet (minimum) de la parabole d'équation $y = x^2-mx+1$. Pour quelle valeur de m la parabole passe-t-elle par le point (-2,3)?

32. Donner l'équation de la parabole d'axe vertical passant par les trois points A(2,3), B(0,1) et C(-1,2).

33. Donner l'équation de la parabole d'axe vertical passant par les trois points A(0,1), B(3,1) et C(-1,5).

34. On considère la courbe C d'équation

$$y = x^3+3x^2+4x+5.$$

Quelle est l'équation de la courbe C' déduite de C par la translation de vecteur $\vec{v} = (1,-3)$? En déduire les coordonnées du centre de symétrie S de C.

35. On considère la courbe C d'équation

$$y = x^3-3x^2+2x-2.$$

Quelle est l'équation de la courbe C' déduite de C par la translation de vecteur $\vec{v} = (-1,2)$? En déduire les coordonnées du centre de symétrie S de C.

36#. Soit D la droite d'équation $ax+by+c = 0$. Soit $M(x_0,y_0)$ un point du plan. On note d(M,D) la distance du point M à la droite D, i.e., la distance la plus petite entre M et un point de D.
(a) Montrer que

$$d(M,D) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(on pourra commencer par déterminer la projection orthogonale $H(x_H,y_H)$ de M sur D).
(b) Montrer que si $\vec{n} \neq \vec{0}$ désigne un vecteur normal à D et A un point de D, la distance d(M,D) s'écrit aussi

$$d(M,D) = \frac{|\vec{n}.\vec{AM}|}{\|\vec{n}\|}$$

37. Par quelles transformations déduit-on les courbes ci-dessous de la parabole $y = x^2$.
(a) $y = x^2-3x+2$
(b) $y = -x^2+2x+3$
(c) $y = -5x^2+2x$
En déduire les coordonnées des points d'ordonnée extrémale sur ces courbes.

38. Reconnaître et tracer les courbes d'équations suivantes
(a) $x+y = 2$
(b) $xy = -2$
(c) $x^2+y^2-x+y = 7/2$
(d) $x^2-x+y = 7/2$
(e) $y^2-x+y = 7/2$
(f) $2xy+y-x+1 = 0$
(g) $9x^2+4y^2 = 36$
(h) $4x^2+9y^2 = 36$.

39. Etudier en fonction de m la nature de la conique

$$4x^2+ (m-1)y^2 = m.$$

Pour quelle valeur de m est-ce un cercle? une hyperbole équilatère?

40. Soient A(a,a) ($a \in \mathbb{R}$) et D la droite d'équation $x+y = 0$. Soit C l'ensemble des points M(x,y) vérifiant $d(M,A)/d(M,D) = \sqrt{2}$. Trouver l'équation de C. Le représenter graphiquement.

Dans l'espace

41. Donner l'équation paramétrique, puis l'équation cartésienne de la droite $D(A;\vec{u})$ pour A et $\vec{u}$ donnés ci-dessous.

(a) A(1,1,0) $\vec{u} = (1,-1,2)$
(b) A(1,-2,1) $\vec{u} = (3,0,2)$
(c) A(0,2,1) $\vec{u} = (6,1,2)$
(d) A(3,0,-1) $\vec{u} = (2,1,1)$

42. Donner un point et un vecteur directeur de la droite D d'équation cartésienne

(a) $\begin{cases} x-4y-z+9 = 0 \\ 2y-z-3 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x+y-3z+3 = 0 \\ -4x-5y+6z-12 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x-y-z-4 = 0 \\ x-3y+z-2 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x+y-z-4 = 0 \\ x+3y+z-4 = 0 \end{cases}$

Vérifier que l'on retrouve les droites de l'exercice précédent (pas nécessairement dans l'ordre).

43. Sous quelle forme générale peut se mettre l'équation d'une droite verticale? parallèle à Ox? parallèle à Oy? d'une droite horizontale? d'un plan horizontal? d'un plan vertical?

44. Représenter les points A(1,1,2), B(1,1,3), C(1,0,2), D(0,1,1). Lesquels sont sur un même plan horizontal? sur un même plan vertical? Préciser quand il y a lieu les équations de ces plans. Généralisation: montrer qu'étant donnés deux points, il existe toujours un plan vertical qui les contient.

45. Soit P le plan passant par le point A(1,-2, 3) et orthogonal à la droite D d'équation paramétrique:

$$\begin{cases} x = 4+2t \\ y = 3-t \\ z = -2+3t \end{cases}$$

Donner un vecteur orthogonal au plan P, puis l'équation de P. Déterminer le/les points d'intersection de D et de P.

46. Soit P le plan passant par le point A(-1,2,4) et orthogonal à la droite D d'équation paramétrique:

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2-2t \\ z = 4+t \end{cases}$$

Donner un vecteur orthogonal au plan P, puis l'équation de P. Déterminer le/les points d'intersection de D et de P .

47. Soient P_1, P_2 et P_3 les plans d'équations:

P_1: $x+y-2z = 1$
P_2: $x-y+4z = 3$.
P_3: $2x-y+z = 1$.

Trouver l'équation paramétrique de la droite D, intersection de P_1 et de P_2. Puis déterminer le/les points d'intersection de D et de P_3.

48. Soient P_1, P_2 et P_3 les plans d'équations:

P_1: $3x+2y-2z = 1$
P_2: $x+y+z = 3$.
P_3: $2x-y+z+4 = 0$.

Trouver l'équation paramétrique de la droite D, intersection de P_1 et de P_2. Puis déterminer le/les points d'intersection de D et de P_3.

49. Soit D la droite d'équation

$$\begin{cases} x = 3+mt \\ y = 5+2t \\ z = -2-t \end{cases}$$

et P le plan d'équation $x+y-4z = d$.
Trouver m tel que la droite D soit parallèle au plan P. Quelle doit être alors la valeur de d pour que P contienne la droite D?

50. Soit D la droite d'équation

$$\begin{cases} x = 2+mt \\ y = -2+t \\ z = 5-2t \end{cases}$$

et P le plan d'équation $2x+4y-z = d$. Trouver m tel que la droite D soit parallèle au plan P. Quelle doit être alors la valeur de d pour que P contienne la droite D?

51. Soit D la droite passant par A(-3,2,1) et orthogonale au plan P d'équation $2x-y+z = 5$. Donner un vecteur directeur de D, puis l'équation paramétrique de D. Déterminer le/les points d'intersection de la droite D et du plan P .

52. Soit D la droite passant par A(-2,1,4) et orthogonale au plan P d'équation $x-2y+z = 6$. Donner un vecteur directeur de D, puis l'équation paramétrique de D. Déterminer le/les points d'intersection de la droite D et du plan P .

53. Soient A(2,3,-1) et B(m,1,3) deux points. Trouver m tel que la droite (AB) soit orthogonale à la droite D d'équation

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3+t \\ z = -2+3t \end{cases}$$

Déterminer alors l'équation du plan P orthogonal à (AB) et qui contient D.

54. Soient A(1,2,3) et B(-1,3,m) deux points. Trouver m tel que la droite (AB) soit orthogonale à la droite D d'équation

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3+t \\ z = -2+3t \end{cases}$$

Déterminer alors l'équation du plan P orthogonal à (AB) et qui contient D.

55. Soient A(1,-1,2) et B(m,1,2) deux points.
(a) Trouver m tel que la droite (AB) soit orthogonale à la droite D d'équation

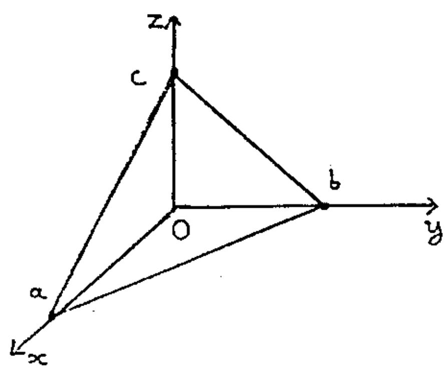
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2-t \\ z = -t \end{cases}$$

Quelle est l'intersection de D et (AB)?
(b) Refaire l'exercice avec D d'équation

$$\begin{cases} x = 2-t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$$

56. Soient a, b, c trois nombres réels $\neq 0$. Montrer que le plan qui intercepte les axes Ox, Oy et Oz respectivement en a, b et c (voir figure ci-dessous) est d'équation

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1.$$



57. Reconnaître les surfaces S suivantes.
(a) S est d'équation $x^2+(y-1)^2 = 1$
(b) S est d'équation $x^2+y^2 = 2z^2$
(c) S est d'équation $x^2+z^2 = y^2$

58. On demande de reconnaître et de donner l'allure de la courbe intersection d'une surface S et d'un plan P dans les cas suivants.
(a) S est le cône de Cobb-Douglas et P le plan d'équation, successivement $z = 1$, $z = -1$, $z = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 1$, $x+y = 1$.
(b) S est d'équation $xyz = 1$ et P est le plan d'équation $y = 1$, puis $z = 1$.
(c) S est d'équation $x^2+y^2+z^2-2z = 0$ et P d'équation $z = 1/2$.
(d) S est le cône $z = (x^2+y^2)^{1/2}$ et P d'équation $z = 1$, puis $x = 0$.
(e) S est le paraboloïde $z = x^2+y^2$ et P d'équation $z = 1$, puis $x = 0$.

59. Vérifier que les vecteurs
$\vec{u} = (2,1,-1)$, $\vec{v} = (3,7,13)$, $\vec{w} = (20,-29,11)$
sont deux à deux orthogonaux.

60#. (a) Vérifier les formules dans $\mathbf{R}^3$:
(i) $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
(ii) $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$
(iii) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
(iv) $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2$
(b) Etablir comme dans l'exercice 25 l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

61#. Vérifier l'identité du parallélogramme

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 + ||\vec{u}-\vec{v}||^2 = 2||\vec{u}||^2 + 2||\vec{v}||^2$$

En donner une interprétation géométrique.

62#. Montrer que dans tout triangle, la somme des carrés des longueurs des médianes est égale aux trois quarts de la somme des carrés des longueurs des côtés.

63#. Soient A, B, C trois points sur un cercle. Montrer que si A et B sont diamétralement opposés, alors les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{CB}$ sont orthogonaux. (<u>Indic.</u>: Ecrire les deux vecteurs

$$\vec{AC} = \vec{AO}+\vec{OC} \text{ et } \vec{CB} = \vec{CO}+\vec{OB}$$

où O est le centre du cercle et calculer leur produit scalaire).

64. Soient $\vec{a}$ et $\vec{u}$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$. On suppose $\vec{u}$ de norme 1. Décrire les surfaces suivantes.
(a) $S_1 = \{ M \mid \vec{OM}.\vec{a} = 1\}$
(b) $S_2 = \{ M \mid ||\vec{OM} - \vec{a}|| = 1\}$
(c) $S_3 = \{ M \mid ||\vec{OM} - (\vec{OM}.\vec{u})\vec{u}|| = 1\}$
Les représenter pour $\vec{u} = (1,0,0)$ et $\vec{a} = (0,1,0)$.

65#. Montrer que l'intersection d'une sphère et d'un plan horizontal est soit vide soit un cercle.

66. Une droite D est donnée comme intersection de deux plans P_1 et P_2 d'équation respective

$F_1(x,y,z) = 0$ et $F_2(x,y,z) = 0$. Donner des équations de plans contenant la droite D.

67. Trouver les règles de transformation des coordonnées d'un point $M(x,y,z)$ pour les symétries suivantes: symétrie par rapport à O, par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, par rapport aux trois plans de coordonnées.

68. Dans le plan, comment vérifier que deux cercles donnés par leur équation sont tangents intérieurement? extérieurement? Même question avec deux sphères dans l'espace.

69. Comment vérifier qu'un plan est tangent à une sphère?

70#. Montrer que, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathbf{R}^3$, on a:

$$(\vec{u}.\vec{v})^2 + ||\vec{u}\wedge\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2\,||\vec{v}||^2.$$

En déduire que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors

$$||\vec{u}\wedge\vec{v}|| = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||.$$

Plus généralement, établir la formule (**) de §2.2, i.e.,

$$|\sin(\theta)| = \frac{||\vec{u}\wedge\vec{v}||}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}$$

où θ désigne l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

71. Déterminer l'angle formé par l'axe Ox des abscisses et le vecteur $\vec{u} = (\sqrt{6},1,-1)$.

72. Soit P le plan d'équation $6x+3y+z = 6$. Trouver un point A sur P. Donner l'équation d'une droite D_1 orthogonale à P. Déterminer deux droites orthogonales D_2 et D_3 contenues dans le plan P.

73#. (a) Trouver une formule pour la distance d'un point M au plan P passant par A et normal à $\vec{n}$ (<u>Indic</u>.: évaluer le produit scalaire $\vec{n}.\vec{AM}$).
(b) Trouver une formule pour la distance d'un point M à la droite D passant par A et dirigée par $\vec{u}$ (<u>Indic</u>.: évaluer la quantité $||\vec{u}\wedge\vec{AM}||$).

<u>REVISION CH1</u>

1. Quelles sont les différentes façons d'écrire les équations d'une droite dans le plan, dans l'espace. Pour chaque type, y-a-t-il unicité de l'écriture de l'équation?

2. Si une droite est donnée dans le plan ou dans l'espace par son équation cartésienne, comment vérifie-t-on qu'un point donné y appartient, n'y appartient pas? Même question si la droite est donnée par son équation paramétrique.

3. Comment, à l'aide d'une équation paramétrique, vérifie-t-on qu'une droite est parallèle à un plan donné, orthogonale à un plan donné?

4. Qu'appelle-t-on la pente d'une droite du plan. Comment la calcule-t-on à partir des différentes équations?

5. Si deux droites du plan sont données par leur équation cartésienne, comment vérifier qu'elles sont orthogonales, parallèles, confondues? Même question avec deux droites dans l'espace.

6. Qu'est-ce que le déterminant de deux vecteurs dans le plan? Quelle est son utilité? Qu'est-ce que le produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace? Quelle est son utilité? Peut-on définir le déterminant de deux vecteurs dans l'espace, le produit vectoriel de deux vecteurs dans le plan?

7. Quelle est la différence entre produit scalaire et produit vectoriel. Quelle est la signification géométrique d'un produit scalaire nul, d'un produit vectoriel nul?

8. Quelle est la norme d'un vecteur? Quelle relation y-a-t-il entre norme et distance?

9. Quelle est la relation entre la courbe plane d'équation $F(x,y) = 0$ et la surface dans l'espace d'équation $F(x,y) = 0$?

10. Rappeler les équations canoniques des coniques données dans la section §1.

11. Rappeler les règles de transformation d'un point du plan pour une symétrie (/O, /Ox, /Oy, /Δ), pour une homothétie, pour une translation.

12. Rappeler l'équation de la courbe C', transformée de la courbe C d'équation $F(x,y) = 0$ par une translation, une symétrie etc... Traiter le cas de la droite $y = ax$, la parabole $y = ax^2$, l'hyperbole $y = a/x$ et le cercle $x^2+y^2 = a^2$.

EXERCICES CH2

1. Donner le domaine de définition de la fonction donnée par
(a) $f(x) = |x-1| + (2x+3)/(1+x)^2$
(b) $f(x) = |2-x| + (3x-2)/(2+x)^3$

2. Représenter le graphe de la fonction définie par $f(x) = x-|2x-1|$. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = b$ pour $b = 0$, pour $b = 1$.

3. Soient les fonctions
$$f(x) = x-1 \text{ et } g(x) = x^2+x-3$$
Donner les domaines de définition de f, de g, la valeur de gof(x) et le domaine de gof.

4. Soient les fonctions
$$f(x) = x-2 \text{ et } g(x) = (2-x^2-x)^{1/2}.$$
Donner les domaines de définition de f, de g, de gof et l'expression de gof(x).

5. Soient les fonctions
$$f(x) = (x-1)/(x+1) \text{ et } g(x) = (x-3)/x.$$
Donner les domaines de définition de f, g, gof et la valeur de gof(x). Résoudre l'équation gof(x) = 2.

6. Soient les fonctions
$$f(x) = x-1 \text{ et } g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{2-x}.$$
Donner les domaines de définition de f, de g, de gof et l'expression de gof(x).

7. Soient les fonctions
$$f(x) = x+3 \text{ et } g(x) = \sqrt{4-x} - 1/\sqrt{x-3}.$$
Donner les domaines de définition de f, de g, de gof et l'expression de gof(x).

8. On sait que le prix P d'un produit peut varier entre 10 F et 15 F. Quelles sont les productions Q possibles, si prix et productions sont reliés par la relation
(a) $Q-10P+2 = 0$.
(b) $PQ^{-2} = 5$.
(c) $P^{-2}Q = 1$.

9. A quelle condition la droite d'équation $ax+by+c = 0$ est-elle le graphe d'une fonction?

10. Déterminer la parité, l'imparité et la périodicité éventuelles des fonctions suivantes:
(a) $x \to [x]$
(b) $x \to [x]+[-x]$
(c) $x \to \sin^2(x)$
(d) $x \to \cos(x^2)$
(e) $x \to |\sin(x)|+\cos(2x)$
(f) $x \to \sin(x+\pi/3)$
(g) $x \to \mathrm{Log}(|\mathrm{tg}\, x|)$
(h) $x \to \mathrm{tg}(2x)+\sin(3x)$

11. Soit $f(x) = |x+1|+|x-1|$. La fonction f est-elle paire, impaire? Représenter son graphe et résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 4$.

12. Soit $f(x) = |x+1|-|x-1|$. La fonction f est-elle paire, impaire? Représenter son graphe et résoudre graphiquement l'inéquation $-1 \leq f(x) \leq 1$.

13. Soit $f(x) = |x+1|+|x-1|-2|x|$. La fonction f est-elle paire, impaire? Représenter son graphe et résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$.

14. Soit $f(x) = |x-1|-|x+1|$. La fonction f est-elle paire, impaire? Représenter son graphe et résoudre graphiquement l'inéquation $-1 \leq f(x) \leq 1$.

15. Soit $f(x) = x^2+2x-|x+1|+2$. Représenter son graphe et montrer qu'il admet un axe de symétrie.

16. Soit $f(x) = |x|-|2-x|$. Représenter son graphe et montrer qu'il admet un centre de symétrie.

17#. (a) Montrer qu'une fonction paire et impaire est identiquement nulle.
(b) Montrer que si f est une fonction impaire, alors $f(0) = 0$.

18#. Soit f une fonction définie sur **R**. On note f^+ et f^- les fonctions définies par
$$\begin{cases} f^+(x) = f(x)+f(-x) \\ f^-(x) = f(x)-f(-x) \end{cases}$$
(a) Montrer que f^+ est paire, f^- est impaire et que
$$f = \frac{1}{2}(f^+ + f^-).$$
(b) Calculer f^+ et f^- pour $f(x) = x^3+x^2+x+1$.

19. On note [x] la fonction "partie entière" de x. Pour les fonctions f indiquées ci-dessous, donner la (plus petite) période $T > 0$, simplifier l'expression de f pour $x \in [0,T[$ et tracer le graphe de f.
(a) $f(x) = 3x-[3x]+1$
(b) $f(x) = 2x-[2x]-1$

20. Donner la (plus petite) période de f, l'expression de $f \circ g(x)$ et la période de $f \circ g$ pour
(a) $f(x) = [x]-x$ et $g(x) = 2x-1$.
(b) $f(x) = [x]-x$ et $g(x) = 1-3x$.

21. Représenter le graphe des fonctions f et g définies par
$f(x) = \sqrt{x-[x]}$ et $g(x) = x-[x] + \sqrt{x-[x]}$

22#. Montrer que si une fonction périodique f a une plus petite période strictement positive T, alors toute période de f est un multiple entier de T.

23#. Soient f et g les fonctions définies sur **R** par $f(x) = k$ ($k \in \mathbf{R}$) et

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ est rationnel} \\ 1 \text{ si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

Montrer que 1, 1/2, -5/4 sont des périodes de f et de g. Déterminer toutes les périodes de f, de g. En déduire que ni f ni g n'ont pas de plus petite période strictement positive.

24#. Soient f et g deux fonctions périodiques ayant une plus petite période > 0, qu'on note respectivement S et T. Montrer que si le rapport S/T est un nombre irrationnel, alors f et g n'ont pas de période commune.

25#. Montrer que si une fonction f admet deux axes de symétrie distincts $x = a$ et $x = b$, alors f est périodique de période $2(b-a)$.

26#. (a) Montrer qu'une fonction f(x) définie sur **R** qui est à la fois paire et monotone est constante.
(b) Montrer qu'une fonction définie sur **R** qui est à la fois périodique et monotone est constante.

27#. (a) Montrer qu'une fonction périodique de période $T > 0$ et bornée sur $[0,T]$ est bornée sur **R**.
(b) Donner un exemple de fonction périodique non bornée.

28. Soit $f(x)= 1/x$. Tracer son graphe. En déduire le graphe de $g(x) = 1/(x-2)$.
Par quelle transformation du plan le second graphe se déduit-il du premier?

29. Soit $f(x) = x^2-3|x|+1$. Tracer le graphe de f. La fonction f admet-elle un axe de symétrie? Expliquer comment, par des transformations géométriques simples, on peut déduire de la courbe représentative de f pour $x \geq 3/2$, le tracé de toute la courbe.

30. Mettre la fonction $f(x) = (x-2)/(x+3)$ sous la forme $f(x) = a + c/(x+d)$. Tracer successivement les courbes d'équations suivantes:
$y = 1/x$; $y = c/x$; $y = c/(x+d)$; $y = a + c/(x+d)$.
En déduire le tracé des courbes d'équations
$y = 5/|x+3|$ et $y = 1 + 5/|x+3|$.

31. Pour les fonctions f données ci-dessous, définir par des équations ou inéquations le domaine de définition D_f de f et représenter graphiquement D_f en hachurant les parties du plan qui ne sont pas dans le domaine et en barrant les parties du bord qui n'y sont pas.

(a) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y-x}}{x} + \dfrac{1}{\mathrm{Log}(x)}$

(c) $f(x,y) = \mathrm{Log}(\dfrac{1}{x-y}) + \dfrac{y}{x}$

(d) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$

(e) $f(x,y) = \mathrm{Log}\{(2x+3y-2)(3x+y)\}$.

(f) $f(x,y) = \sqrt{(x+2y)(2x+3y+1)}$.

(g) $f(x,y) = (y-x^2-1)^{-1/2}$

(h) $f(x,y) = \mathrm{Log}\{(x+y+2)(x+y-2)\}$.

(i) $f(x,y) = \sqrt{(x+y)/(y-2x^2)}$.

(j) $f(x,y) = \mathrm{Log}(y^2-x) + \sqrt{x-y}$.

(k) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{xy-1}}{\sqrt{x^2+y^2-4x}}$

32. Pour les fonctions f données ci-dessous, déterminer le domaine de définition de f (grâce à des équations ou inéquations) et le représenter graphiquement (on hachurera la partie du plan représentant le domaine en précisant si les bords sont inclus ou exclus).

(a) $f(x,y) = \mathrm{Log}(2x+y-2)$

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\mathrm{Log}(y)}$

(c) $f(x,y) = \mathrm{Log}(y-x) + \dfrac{1}{x}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{Log}(y-x+1)}{\sqrt{4-xy}}$

(e) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

(f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + \sqrt{4-x^2-y^2}$

(g) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{Log}(x-y^2)}{\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}}$

(h) $f(x,y) = \mathrm{Log}(x^2+y^2-1) + \dfrac{y}{x}$

(i) $f(x,y) = \dfrac{\text{Log}(y-2x+3)}{\sqrt{x-y^2}}$

(j) $f(x,y) = \dfrac{\text{Log}(x+y^2)}{(3-2x-x^2-y^2)^{1/2}}$

(k) $f(x,y) = \text{Log}(36-4x^2-9y^2)$

33. On considère la parabole d'équation $y = -x^2+6x-5$. Déterminer son axe de symétrie, tracer son graphe. Soit g la fonction de 2 variables définie par

$$g(x,y) = \sqrt{y+x^2-6x+5}.$$

Représenter graphiquement son domaine de définition (on hachurera la partie du plan représentant le domaine en précisant si les bords sont inclus ou exclus).

34. On considère la parabole d'équation $y = 3x^2+6x$. Déterminer son axe de symétrie, tracer son graphe. Soit g la fonction de 2 variables définie par

$$g(x,y) = \sqrt{y-3x^2-6x}.$$

Représenter graphiquement son domaine de définition (on hachurera la partie du plan représentant le domaine en précisant si les bords sont inclus ou exclus).

35. Trouver le degré d'homogénéité des fonctions suivantes:

(a) $f(K,L) = K^{\alpha}\, L^{1-\alpha}$
(b) $f(u,v) = u^{\alpha}\, v^{\alpha}$
(c) $f(x,y) = (x^4+y^4+x^2y^2)^{1/2}$
(d) $f(P,Q) = (P^2+QP)/(P+Q)$.

36. On considère la parabole d'équation

$$y = x^2-4x+1.$$

Déterminer son axe de symétrie, tracer son graphe. La fonction $x \to x^2-4x+1$ est-elle injective? Quel est son ensemble image f(**R**)?

37. On considère la parabole d' équation

$$y = -x^2-2x+1.$$

Déterminer son axe de symétrie, tracer son graphe. La fonction $x \to -x^2-2x+1$ est-elle injective? Quel est son ensemble image f(**R**)?

38. On considère l'homographie

$$x \to f(x) = (x-2)/(2x-3).$$

Donner les équations de ses deux asymptotes, son centre de symétrie. Enfin déterminer la réciproque f^{-1}de f (on n'oubliera pas de préciser le domaine de définition de f^{-1}) .

39. On considère l'homographie

$$x \to f(x) = (x+2)/(2x+3).$$

Donner les équations de ses deux asymptotes, son centre de symétrie. Enfin déterminer la réciproque f^{-1} de f (on n'oubliera pas de préciser le domaine de définition de f^{-1}).

40. On considère l'homographie:

$$x \to f(x) = (-2x-3)/(x+1).$$

Donner les équations de ses deux asymptotes, son centre de symétrie. Enfin déterminer la réciproque f^{-1}de f (on n'oubliera pas de préciser le domaine de définition de f^{-1}).

41. Tracer les graphes des fonctions suivantes:

(a) $x \to e^{-x}$	(b) $x \to e^{\|x\|}$
(c) $x \to e^{-\|x\|}$	(d) $x \to -e^{-\|x\|}$
(e) $x \to e^{x-1}$	(f) $x \to e^{\|x-1\|}$
(g) $x \to \|\text{Log}x\|$	(h) $x \to \text{Log}\|x\|$
(i) $x \to \text{Log}\|x-1\|$	(j) $x \to -\|\text{Log}\|x-1\|\|$
(k) $x \to x/(x+1)$	(l) $x \to \|x\|/(x+1)$
(m) $x \to (x-2)/(x-1)$	(n) $x \to \|x-2\|/(x-1)$

42. La relation entre x et y

$$\frac{y-4}{y+2x} = x-3$$

définit-elle y implicitement en fonction de x? La relation définit-elle x implicitement en fonction de y? Dans les 2 cas, on justifiera sa réponse.

43. Dans les relations ci-dessous, quelles sont les variables qui sont définies implicitement en fonction des autres?

(a) $y^3+y+x = 0$	(f) $2u+3y-w^2 = 0$
(b) $PQ-Q-1 = 0$	(g) $2e^{3x^2y} - 5 = 0$
(c) $P^2Q-Q-1 = 0$	(h) $\exp((x+y)/x^2y) = 2$
(d) $u^2+v^2+w^2 = 1$	

44. Montrer que la relation

$$xz+y^2+yz-2z-x = 0$$

définit implicitement z en fonction de x et y. Expliciter la fonction z(x,y). Puis représenter graphiquement l'ensemble D de tous les points M(x,y) du plan vérifiant $z(x,y) > 0$.

45. La relation entre x et y

$$\frac{y-x^2}{y+1} = x-2$$

définit-elle y implicitement en fonction de x? La relation définit-elle x implicitement en fonction de y? Dans les 2 cas, on justifiera sa réponse.

46. La fonction

$$x \to f(x) = -x/(2x+1).$$

est-elle injective? Si oui, donner son ensemble image et sa réciproque.

47. La fonction

$$x \to f(x) = (3x-2)/(x-1)$$

est-elle injective? Si oui, donner son ensemble image et sa réciproque.

48. Montrer que la relation

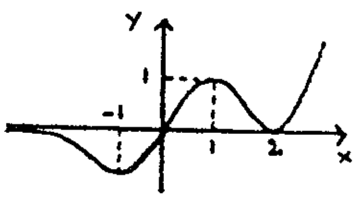
$$y = \frac{-2e^x+3}{e^x-5}$$

définit implicitement x en fonction de y. La fonction

$$x \to \frac{-2e^x+3}{e^x-5}$$

est-elle injective? Si oui, donner son ensemble image et sa réciproque.

49. Soit f la fonction dont le graphe est dessiné ci-dessous.
(a) Sur quels intervalles la fonction f est-elle injective?
(b) Déterminer les ensembles $f(\mathbf{R})$, $f(\mathbf{R}_+)$, $f(\mathbf{R}^*_-)$, $f([0,1])$, $f([1,2])$, $f([-1,2])$ et $f([2,+\infty])$.



50. Montrer que les fonctions suivantes sont injectives et déterminer leur réciproque. On précisera le domaine de définition et l'ensemble image de f ainsi que ceux de f^{-1}.

(a) $f(x) = \dfrac{e^x-3}{e^x+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

(c) $f(x) = \sqrt{x-3}+1$

(d) $f(x) = \exp\left(\dfrac{3\sqrt{x}-2}{5\sqrt{x}+1}\right)$

51. Montrer que la fonction $f(x) = x^2-x$ est injective sur $I =]-\infty,1/2]$ et sur $J = [1/2,+\infty[$ mais pas sur **R**. Déterminer la réciproque de $f|_I$ et celle de $f|_J$.

52#. Soit f une fonction injective. Montrer que:
(i) pour tout $x \in D_f$, $(f^{-1}of)(x) = x$
(ii) pour tout $y \in f(D_f)$, $(fof^{-1})(y) = y$.

53#. (a) Montrer qu'une fonction strictement monotone sur un intervalle I est nécessairement injective.
(b) Montrer en donnant un contre-exemple que la réciproque est fausse. (En fait, la réciproque est vraie si f est supposée en plus continue (Cf. Ch.6 Th.2.8)).

54#. (a) Soit f strictement croissante sur un intervalle I. On suppose $fof(x) = x$ pour tout $x \in I$. Montrer que $f(x) = x$ pour tout $x \in I$. (Indic.: Montrer que $f(x) > x$ et $f(x) < x$ sont impossibles).
(b) Montrer que le résultat est faux si "croissante" est remplacée par "décroissante".

55. Montrer que la relation

$$2xy-2x+y-2 = 0$$

définit implicitement y(x) et x(y). Représenter graphiquement ces deux fonctions. Montrer qu'elles sont injectives; déterminer leur réciproque.

56. Soit D le plan $\mathbf{R}^2$ privé des deux points $m_1(-1,1)$ et $m_2(-4,-2)$. Montrer que la relation

$$-xz-y^2+yz-2z-x = 0 \quad (\text{avec } (x,y) \in D)$$

définit implicitement z en fonction de x et y. Expliciter la fonction z(x,y). Puis représenter graphiquement l'ensemble de tous les points M(x,y) du plan vérifiant $z(x,y) > 0$.

57. Représenter la ligne de niveau k de la fonction f dans les cas suivants.

(a) $f(x,y) = 2x+3y$	$k = 1,2,-1.$
(b) $f(x,y) = y^2$	$k = 1,-1,4,2$
(c) $f(x,y) = \mathrm{Log}(x+y)$	$k = 0, 1.$
(d) $f(x,y) = 4x^2+25y^2$	$k = 100.$
(e) $f(x,y) = \exp\left(\dfrac{x^2-x}{y-y^2}\right)$	$k = e.$
(f) $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}$	$k = 2.$
(g) $f(K,L) = \sqrt{KL}$	$k = 1, 2, 3.$

58. Donner l'allure du graphe des fonctions suivantes.

(a) $f(x,y) = x$ (b) $f(x,y) = 1-x-y$
(c) $f(x,y) = y^2$ (d) $f(x,y) = y^3$

(e) $f(x,y) = x^2+y^2$ (f) $f(x,y) = 2x^2+3y^2$
(g) $f(x,y) = 1-x^2-y^2$ (h) $f(x,y) = y^2-x^2$
(i) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ (j) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

59#. Soit $f(x,y) = \varphi(ax+by)$ où φ est une fonction d'une variable et $a,b \in \mathbf{R}$. Montrer que le graphe de f est une réunion de droites. Donner des exemples.

60#. Montrer qu'un graphe de révolution est invariant par rotation autour de l'axe Oz.

61. Soit f la fonction de deux variables définie par:

$$f(x,y) = \left(\frac{4x^2}{2x-y^2}\right)^{1/2}.$$

Déterminer (grâce à des équations ou des inéquations) le domaine de définition D_f et I_f^2, la courbe de niveau 2? Représenter graphiquement D_f et I_f.

62. Soit f la fonction de deux variables définie par:

$$f(x,y) = \left(\frac{y^2}{2y-x^2}\right)^{1/2}$$

Déterminer (grâce à des équations ou des inéquations) le domaine de définition D_f et I_f^1, la courbe de niveau 1? Représenter graphiquement D_f et I_f^1.

63. Soit $f(x,y) = \exp\left(\frac{y+2x}{x^2y-1}\right)$

Quelle est l'équation de $I_f^{\exp(2)}$, la courbe de niveau exp(2)? Cette équation définit-elle implicitement y(x)? x(y)?

64. Soit $f(x,y) = \left(\frac{x+2y}{y^2x-1}\right)^3$

Quelle est l'équation de I_f^8, la courbe de niveau 8? Cette équation définit-elle implicitement y(x)? x(y)?

65. Soit f la fonction de 2 variables définie par:

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y^2}{4y^2-x}}$$

Quel est son domaine de définition? Le représenter graphiquement. Montrer que les courbes de niveau c sont des paraboles sauf dans quelques cas que l'on précisera. Les représenter pour c = 1/4, 1/2, 1.

REVISION CH2

1. Redéfinir les propriétés de parité, de périodicité, d'injectivité d'une fonction à une variable. Quelles sont les propriétés géométriques correspondantes du graphe?

2. Quelles sont les coordonnées du symétrique d'un point M(x,y) par rapport à A(a,b)? Sous quelle condition sur f le graphe de f est-il symétrique par rapport à A? Donner deux exemples de fonctions dont le graphe est symétrique par rapport à A(1,2).

3. Quelles propriétés permettent de réduire l'intervalle d'étude d'une fonction à une variable? Comment?

4. Dessiner le graphe d'une fonction qui soit
(a) paire et périodique
(b) impaire et non injective
(c) impaire et injective.
Pourquoi une fonction paire n'est-elle jamais injective?

5. Dessiner le graphe d'une fonction qui soit
(a) définie sur [0,1], non injective, d'ensemble image [2,3]
(b) définie sur]0,+∞[, injective, d'ensemble image]1,2[. Quel est alors le graphe de la réciproque?

6. Ecrire la condition d'homogénéité d'une fonction d'une variable, de deux variables. Quelle propriété géométrique possède le graphe d'une fonction homogène de degré 1? Quelles sont les fonctions d'une variable qui sont homogènes de degré 1?

7. Soit f(x,y) une fonction de deux variables. Quelle est la différence entre les ensembles suivants?
(a) $\{ (x,y,z) \mid f(x,y) = z \text{ et } (x,y) \in D_f \}$
(b) $\{ z \mid f(x,y) = z \text{ et } (x,y) \in D_f \}$
(c) $\{ (x,y) \mid f(x,y) = z \text{ et } (x,y) \in D_f \}$

8. Quel test géométrique permet de vérifier l'injectivité d'une fonction d'une variable? Comment trouve-t-on géométriquement les antécédents d'une valeur image donnée pour une fonction d'une variable? de deux variables? Quelle est la différence entre test des horizontales et test des verticales?

9. Quelle est la différence entre la ligne de niveau c et la section du graphe par le plan horizontal $z = c$?

10. Rappeler la définition d'un isoquant, d'une courbe d'indifférence.

11. Représenter le graphe de la fonction de Cobb-Douglas pour $\alpha = 1/2$. Est-il invariant par homothétie? Tracer les courbes de niveau, les sections horizontales du graphe, les graphes des fonctions partielles.

12. Quand dit-on que la relation $F(x,y) = 0$ définit implicitement y en fonction de x? Donner un exemple de relation $F(x,y) = 0$ qui ne définit pas implicitement y en fonction de x ni x en fonction de y.

13. La consommation d'un bien est fonction du revenu R du consommateur, de son prix unitaire p et du prix q d'un autre bien. Les fonctions partielles sont-elles croissantes? décroissantes? constantes? A quelle classification des biens ce problème conduit-il? (Consulter un manuel d'Economie).

EXERCICES CH 3

1. On considère la cubique d'équation
$$y = x^3+6x^2+9x+3$$
Déterminer son centre de symétrie, tracer son graphe. La fonction
$$x \to x^3+6x^2+9x+3$$
est-elle injective?

2. On considère la cubique d'équation:
$$y = -x^3+6x^2-9x+1$$
Déterminer son centre de symétrie, tracer son graphe. La fonction
$$x \to -x^3+6x^2-9x+1$$
est-elle injective?

3. Tracer la courbe C d'équation
$$y = -x^3+3x^2-2x+1$$
Déterminer s'il y a lieu centre de symétrie et points extrémaux. Discuter suivant la valeur de k, le nombre de points d'intersection de C et de la droite $y = k$. La courbe symétrique de C par rapport à la première bissectrice est-elle le graphe d'une fonction?

4. Tracer la courbe d'équation
$$y = x^3-x^2+x+1$$
Cette équation définit-elle implicitement x en fonction de y? Peut-on expliciter x(y)? Montrer que la fonction $f(x) = x^3-x^2+x+1$ admet une réciproque f^{-1}; tracer son graphe et prouver qu'il admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.

5. Quel est le centre de symétrie du graphe d'une fonction polynôme de degré 3 et qui admet les points $M_1(-5,1)$ et $M_2(3,-3)$ pour points extrémaux. Donner l'équation de ce graphe et le tracer.

6#. Soit C la courbe d'équation $y = ax^3+bx^2$ (avec $a \neq 0$). Montrer les propriétés suivantes et vérifier chacune d'elles sur l'exemple indiqué.
(a) O centre de symétrie de C ssi $b = 0$ ($y = 3x^3$).
(b) O maximum relatif ssi $b < 0$ ($y = -x^3+x^2$).
(c) O minimum relatif ssi $b > 0$ ($y = x^3-x^2$).
(d) O extremum situé le plus à droite ssi $ab > 0$ ($y = 2x^3+3x^2$).

7. Tracer la courbe C d'équation
$$y = (-5-x)/(x+1)$$
Déterminer les points d'intersection de C et des droites $y = x$, $y = x+4$, $y = x+5$ et $y = -x-2$.

8. Tracer le graphe des fonctions suivantes:
(a) $f(x) = (x-1)/(x+1)$
(b) $g(x) = (1-x)/(x+1)$
(c) $h(x) = (x-1)/|x+1|$
(d) $k(x) = |x-1|/(x+1)$
Lesquelles sont injectives? Préciser leur ensemble image respectifs et leur réciproque éventuelle.

9. Tracer sur un même graphe les fonctions
(a) x^2, x^3, x^4
(b) $x^{1/2}$, $x^{1/3}$, $x^{1/4}$
(c) $x^{-1/2}$, $x^{-1/3}$, $x^{-1/4}$.

10. Tracer le graphe de la fonction
$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$
Montrer que f est injective et trouver son ensemble image. Déterminer sa réciproque f^{-1}. Tracer le graphe de f^{-1}.

11#. (a) Montrer que la réciproque d'une fonction injective impaire est impaire.
(b) Montrer que la réciproque d'une fonction injective croissante (resp. décroissante) est croissante (resp. décroissante).

12. Simplifier les expressions suivantes
(a) $24^{2/3}\ 9^{1/3}\ 32^{1/3}\ 54^{1/3}$
(b) $\dfrac{\sqrt[4]{100}\ (\sqrt{5})^{-1/2}}{\sqrt{2}}$.
(c) $\mathrm{Log}(e^{(-1/2)}) + \mathrm{Log}(1/2) + \mathrm{Log}(2^{-2}\sqrt{e})$
(d) $\mathrm{Log}(8\sqrt{2})$, $\mathrm{Log}(27/\sqrt{3})$, $\mathrm{Log}(9e^2/\sqrt{e})$
(e) $\mathrm{Log}(4^4\sqrt{e}/25)$, $\mathrm{Log}(e^{3x}x^5)$.

13. Simplifier les expressions suivantes (on les mettra sous la forme aLog(2)+bLog(3)):
(a) $\mathrm{Log}[(6\sqrt{3})^3] - \mathrm{Log}[(2\sqrt{6})^3]$
(b) $\mathrm{Log}[(6\sqrt{2})^3] - \mathrm{Log}[(3\sqrt{6})^3]$

14. Simplifier les expressions suivantes (on les mettra sous la forme a+bLog(3)+cLog(5)):
(a) $\mathrm{Log}[(15\sqrt{5})^3] - \mathrm{Log}[(3\sqrt{15})^3]$
(b) $\mathrm{Log}[(15\sqrt{3})^3] - \mathrm{Log}[(5\sqrt{15})^3]$
(c) $\mathrm{Log}((45e)^{-1/4}) + \mathrm{Log}(1/15)$

15. Simplifier les expressions suivantes (on les mettra sous la forme a+bLog(2)+cLog (5)):
(a) $\mathrm{Log}[(10\sqrt{5})^3] - \mathrm{Log}[(2\sqrt{10})^3]$
(b) $\mathrm{Log}[(10\sqrt{2})^3] - \mathrm{Log}[(5\sqrt{10})^3]$
(c) $\mathrm{Log}((\frac{e}{10})^{1/7}) + \mathrm{Log}(100)$

16. Donner l'allure des graphes des fonctions suivantes:

(a) $x \to 2^x$	(e) $x \to 3^{-x}$	(i) $x \to e^{\lvert x \rvert}$
(b) $x \to 3^x$	(f) $x \to e^{-x}$	(j) $x \to e^{x-1}$
(c) $x \to e^x$	g) $x \to 2^{\lvert x \rvert}$	(k) $x \to e^{1-x}$
(d) $x \to 2^{-x}$	(h) $x \to 3^{\lvert x \rvert}$	(l) $x \to e^{\lvert x-1 \rvert}$

17. Soit $f(x) = e^x/(e^{2x}+1)$. Montrer que la fonction f est paire.

18. On considère les deux fonctions suivantes:
$ch(x) = (e^x+e^{-x})/2$ et $sh(x) = (e^x-e^{-x})/2$
Etudier ces fonctions et tracer leur graphe.
Montrer les relations suivantes:

$$\begin{cases} ch^2(x)-sh^2(x) = 1 \\ ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y) \\ sh(x+y) = ch(x)sh(y) + sh(x)ch(y) \\ (ch(x))' = sh(x) \\ (sh(x))' = ch(x) \end{cases}$$

(Les fonctions ch(x) et sh(x) sont appelées respectivement fonctions "cosinus hyperbolique" et "sinus hyperbolique").

19. Résoudre les équations suivantes.

(a) $e^x = e^{1-x}$ (b) $e^{3x}-2e^{-x} = 0$

(c) $2^{x^2} = 4.2^{-x}$ (d) $3^x-2^{x^2} = 0$

20. Résoudre les équations ou systèmes d'équations suivants:

(a) $Log(x^2-1) + 2Log\ 2 = Log(4x-1)$

(b) $e^{2x} - 3 = 4\ e^{-2x}$

(c) $4^x - 12\ 2^x + 32 = 0$

(d) $\begin{cases} e^x\ e^{y-5} = 1 \\ (2^x)^y = 64 \end{cases}$

21. Un capital initial de 15 francs est placé au taux d'intérêt mensuel de 1%. Quelle est l'expression du capital acquis après 6 mois? Quel est le taux d'intérêt g instantané du placement? Quel taux d'intérêt annuel i_{an} conduirait au même capital après un an?

22. Un capital initial de 15 francs est placé au taux d'intérêt annuel de 12%. Quelle est l'expression du capital acquis après 5 ans? Quel est le taux d'intérêt g instantané du placement? Quel taux d'intérêt i_m mensuel conduirait au même capital après un an?

23. Un capital initial de 30 francs est placé au taux d'intérêt annuel de 40%. Quelle est l'expression du capital acquis après 4 ans? Quel est le taux d'intérêt g instantané du placement? Quel taux d'intérêt i_s semestriel conduirait au même capital après un an?

24. (a) Une somme d'argent A est placée au taux d'intérêt annuel r. On suppose qu'après 3 ans et 4 ans, le capital vaut respectivement C(3) = 1080 et C(4) = 1296. Que valent r et A?
(b) Même question avec C(2) = 480 et C(3) = 640.

25. Quelle fonction représente le croissance d'une population qui est multipliée par 2 chaque jour (resp. par 1,5, par 3, divisée par 3). On supposera qu'au jour 0, la population vaut 10.

26. Un nénuphar double de taille chaque jour. Sachant qu'au bout d'un mois, il occupe la surface totale du bassin dans lequel il est placé, calculer au bout de combien de temps il occupe seulement la moitié du bassin.

27. Calculer pour les fonctions suivantes les taux d'accroissement et taux de croissance pour un accroissement $\Delta x = 1$, pour $\Delta x = h$, puis les taux d'accroissement et taux de croissance instantanés:

(a) $f(x) = ax+b$	(d) $f(x) = a/x^2$
(b) $f(x) = ax^2$	(e) $f(x)= 2^x$
(c) $f(x) = a/x$	(f) $f(x) = (1+c)^{2x}$

28. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes:

(a) $x \to \sqrt{\sin(2x)}$	(e) $x \to 1/Log(1+\sin(x))$
(b) $x \to Log(tg(x))$	(f) $x \to Log(x) + 1/\cos(x)$
(c) $x \to 1/Log(\sin(x))$	(g) $x \to (3x-1)^{Log(x)}$
(d) $x \to \sqrt{x+tg(x)}$	(h) $x \to (Log(x))^{3x-1}$

29. Donner l'allure des graphe des fonctions suivantes:

(a) $x \to \sin(2x)$	(g) $x \to \lvert x \rvert \sin(x)$
(b) $x \to \sin(x/2)$	(h) $x \to x^2\sin(x)$
(c) $x \to \sin(x^2)$	(i) $x \to \sin(x)/x$
(d) $x \to \sin(x^3+x)$	(j) $x \to x+\sin(x)$
(e) $x \to \sin(1/x)$	(k) $x \to x^2+\sin(x)$
(f) $x \to x \sin(x)$	(l) $x \to (\sin(x))^n$

30. Résoudre les équations suivantes:

(a) $\cos(3x) = \sqrt{3}/2$ (b) $\sin(2x) = 1/2$

(c) $tg(x+2) = \sqrt{3}$ (d) $\sin^2(x) = \cos^2(x)$

(e) $\sqrt{3}\sin(2x)+\cos(2x) = a$ ($a \in \mathbf{R}$)

31. Exprimer cos(3x) en fonction de $\cos^3(x)$ et cos x. Résoudre $4\cos^3(x)-3\cos(x) = 1/2$.

32. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, il existe 2 polynômes P_n et Q_n vérifiant:

$$\begin{cases} \cos(nx) = P_n(\cos(x)) \\ \sin(nx) = \sin(x).Q_n(\cos(x)) \end{cases}$$

Donner les formules reliant P_{n+1} et Q_{n+1} à P_n et Q_n. Quel est le degré des polynômes P_n et Q_n?

33. (a) Calculer $\sin(\alpha)$ et $tg(\alpha)$ sachant que $\cos(\alpha) = -3/5$ et $-\pi < \alpha < -\pi/2$

(b) Calculer $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ sachant que $tg(\alpha) = -2$ et $-\pi < \alpha < 0$

(c) Calculer $\cos(\alpha)$ et $tg(\alpha)$ sachant que $\sin(\alpha) = 12/13$ et $-3\pi/2 < \alpha < -\pi$

34#. Notons $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ l'ensemble des nombres réels auquel on a ajouté un point, le point à l'infini ∞. On peut prolonger toute homographie $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$ à $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ en posant $f(-d/c) = \infty$ et $f(\infty) = a/c$.

(a) Montrer que f devient alors une bijection de $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ sur $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$.

(b) Montrer qu'étant donnés α, β, γ dans $\mathbf{R}$, il existe une unique homographie $f(x)$ telle que $f(0) = \alpha$, $f(1) = \beta$ et $f(\infty) = \gamma$.

(c) En déduire qu'étant donnés α, β, γ, α', β',γ' dans $\mathbf{R}$, il existe une unique homographie $f(x)$ telle que $f(\alpha) = \alpha'$,$f(\beta) = \beta'$ et $f(\gamma) = \gamma'$.

35#. (a) Montrer que si f est une fonction continue sur $]0,+\infty[$, on a, pour x et y > 0:

$$\int_x^{xy} f(t)dt = x\int_1^y f(xu)du$$

(b) Démontrer la propriété fondamentale du logarithme $Log(xy) = Log(x)+Log(y)$ (Indic.: écrire

$$Log(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}dt = \int_1^{x} \frac{1}{t}dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}dt$$

et utiliser (a)).

(c) En déduire la propriété fondamentale de l'exponentielle.

REVISION CH3

1. Quelles sont les 6 configurations possibles du graphe d'une cubique de centre de symétrie $A(\alpha,\beta)$? A quel type appartient la cubique d'équation $y = ax^3-x$ quand $a > 0$, quand $a < 0$?

2. Si f est un polynôme de degré 3, quel renseignement sur le graphe de f donne la dérivée seconde f"? la dérivée première f'?

3. Le graphe d'une fonction homographique a-t-il un centre de symétrie? Si oui, comment le trouve-t-on? Utilise-t-on f"?

4. La réciproque, quand elle existe, d'une cubique, d'un trinôme, d'une homographie est-elle une cubique, un trinôme, une homographie?

5. Les polynômes de degré 0, 1, 2, 3 ont-ils un centre de symétrie, un axe de symétrie?

6. Parmi les relations suivantes, lesquelles sont vraies? lesquelles sont fausses? Donner des contre-exemples quand la relation est fausse.

(a) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ $\quad \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

(b) $(x+y)^n = x^n + y^n$ $\quad (xy)^n = x^ny^n$

(c) $1/x < 1/x^2$ si $x > 0$, si $x > 1$

(d) $1/x^a < 1/x^b$ si $x > 1$ et $a > b$

(e) $1/x^a > 1/x^b$ si $x < 1$ et $a > b$

(f) $(x^{1/n})^m = x^{1/nm}$

(g) $(x^n)^{1/m} = x^{n/m}$

(h) $(x^a)^b = x^{a+b}$

7. Qu'appelle-t-on taux de croissance d'une fonction? taux de croissance instantané? Quelles fonctions ont un taux de croissance constant?

8. Dans quelle situation apparaissent les fonctions $x \to (1+\frac{r}{2})^{2x}$ et $x \to (1+r)^x$. Sont-elles égales? Y en a-t-il une plus grande que l'autre?

9. Parmi les fonctions étudiées dans ce chapitre, lesquelles vérifient

(a) $f(xy) = f(x)+f(y)$

(b) $f(xy) = f(x)f(y)$

(c) $f(x+y) = f(x)+f(y)$

(d) $f(x+y) = f(x)f(y)$?

10. Comment obtient-on le graphe de la fonction sin(x) à partir de celui de cos(x)? Rappeler les propriétés des fonctions sin(x) et cos(x).

EXERCICES CH 4

1. Déterminer les points intérieurs, les points adhérents, les points d'accumulation et les points frontières des sous-ensembles de **R** suivants.
(a) $A =]0,1[\cup]1,2]$
(b) $A = \mathbf{Z}$
(c) $A = \{1/n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$

2#. Montrer que si un point n'est pas intérieur à un ensemble A, il est adhérent au complémentaire de A. Montrer que si un point n'est pas adhérent à un ensemble A, il est intérieur au complémentaire de A. En déduire:

$$C\mathring{A} = \overline{CA} \quad \text{et} \quad C\overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{CA}}$$

2.1#. Vérifier les propriétés suivantes:
(i) $\varnothing$ et $\mathbf{R}^n$ sont des ouverts.
(ii) Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
(iii) Toute intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.
Enoncer et démontrer des propriétés analogues pour les fermés.

2.2#. Montrer que, pour A et B deux parties quelconques de $\mathbf{R}^n$, on a:

(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$

(ii) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Montrer que les inclusions de droite sont strictes en général.

2.3#. Soit A une partie quelconque de $\mathbf{R}^n$. Montrer que la frontière Fr(A) de A est un fermé, que les trois ensembles $\mathring{A}$, $\overline{A}$ et Fr(A) constituent une partition de $\mathbf{R}^n$. Démontrer que

$\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$; $\mathrm{Fr}(\mathring{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$; $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(CA)$

2.4#. Donner un exemple de partie A de **R** pour laquelle les 7 ensembles

$$A,\ \mathring{A},\ \overline{A},\ \overline{\mathring{A}},\ \mathring{\overline{A}},\ \overline{\mathring{\overline{A}}},\ \mathring{\overline{\mathring{A}}}$$

sont distincts. Montrer que pour toute partie A de $\mathbf{R}^n$, on a

$$\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$$

2.5#. Soient O un ouvert et A une partie quelconque de $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'on a

$$O \cap \overline{A} \subset \overline{O \cap A}$$

Montrer que le résultat est faux si on ne suppose pas O ouvert.

3. Donner la définition de:
(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
(b) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ y \to -\infty}} f(x,y) = 5^+$
(c) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2^-}} f(x,y) = +\infty$
(d) $\lim\limits_{\substack{u \to 2 \\ v \to 1^+}} f(u,v) = 3$

4. Donner la définition de:
(a) $\lim\limits_{t \to 3} f(t) = -\infty$
(b) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ y \to -\infty}} f(x,y) = 5$
(c) $\lim\limits_{\substack{u \to 1 \\ v \to 2^-}} f(u,v) = 7$
(d) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1^+ \\ z \to -\infty}} f(x,y,z) = 2$

5#. En revenant à la définition, montrer que
(a) $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$ (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+x-1}{x^2-1} = 1$

6. Etudier les limites suivantes
(a) $f(x) = x-[x]$ (en 0)
(b) $f(x) = x(x-[x])$ (en 0).

7#. Que peut-on dire d'une fonction périodique qui admet une limite finie en $+\infty$?

8#. Soit f une fonction ayant une limite L non nulle en un point x_0. Montrer qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel f ne s'annule pas.

9#. (a) Soit f une fonction ayant une limite **L** en un point x_0. Montrer que

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |L|.$$

(b) Montrer que la réciproque est fausse.
(c) Montrer que la réciproque est vraie si **L = 0**.

10. Montrer qu'il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x > A$, on a:

$$x\, e^{-x} < 1/x^2$$

(<u>Indic.</u>: partir de $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{-x} = 0$).

11. Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2 \sin(y)}{x^2+y^2}$.

Montrer que pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$|f(x,y)| \leq |\sin(y)| \, .$$

En déduire la limite de f quand le point (x,y) tend vers (0,0).

12. Soit $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^3}{x^2+y^2}$.

Montrer que pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$|f(x,y)| \leq x^2 + |y| .$$

En déduire la limite de f quand le point (x,y) tend vers (0,0).

13. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\cos(x) = +\infty$

14. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2[x]-x = +\infty$

15. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-3\sin(x)} = 0$

16#. Soient f(x) et g(x) deux fonctions vérifiant

$$\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq 1 \\ 0 \leq g(x) \leq 1 \end{cases} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 1$.

Montrer que f(x) et g(x) tendent vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

17#. Les limites suivantes existent-elles? Justifier votre réponse.

(a) $f(x) = x\sin(x)$ en $+\infty$

(b) $f(x) = e^{-1/x}$ en 0

(c) $f(x) = x/[x]$ en 0 et $+\infty$

18#. Les limites suivantes existent-elles? Justifier votre réponse.

(a) $f(x) = e^x \cos(x)$ en $+\infty$

(b) $f(x) = \sin(1/x)$ en 0

(c) $f(x) = x/(x+\sin(x))$ en 0 et $+\infty$.

19#. Soit f une fonction monotone sur un intervalle I. Montrer qu'en tout point intérieur de I, f admet une limite à droite et une limite à gauche (pas forcément égales). (<u>Indic.</u>: S'inspirer de la démonstration du Th.2.4(b)).

20. Soit $f(x,y) = (x^2+2y)/y^2$.

(a) Représenter sur un même graphe, le domaine de définition de f, la courbe de niveau -1 notée I^{-1}, la courbe de niveau 0, notée I^0, la droite D d'équation y-x = 0

(b) Etudier les limites de f(x,y) lorsque (x,y) tend vers (0,0) en restant sur I^{-1}, sur I^0, sur D.

(c) Cette fonction admet-elle une limite en O(0,0)?

21. Soit $f(x,y) = (x^2+y)/(x+y^2)$.

(a) Représenter sur un même graphe, le domaine de définition de f, la courbe de niveau -1, notée I^{-1}, la courbe de niveau 0 , notée I^0, la droite D d'équation y-x = 0

(b) Etudier les limites de f(x,y) lorsque (x,y) tend vers (0,0) en restant sur I^{-1}, sur I^0, sur D.

(c) Cette fonction admet-elle une limite en O(0,0)?

22. Soit $f(x,y) = (xy-x+y)/xy$.

(a) Représenter sur un même graphe, le domaine de définition de f, la courbe de niveau 1, notée I^1, la courbe de niveau 2 , notée I^2, la droite D d'équation y+x = 0

(b) Etudier les limites de f(x,y) lorsque (x,y) tend vers (0,0) en restant sur I^{-1}, sur I^0, sur D.

(c) Cette fonction admet-elle une limite en O(0,0)?

23#. La fonction $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ admet-elle une limite quand (x,y) tend vers (0,0)?

24#. La fonction $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ admet-elle une limite quand (x,y) tend vers (0,0)?

25. Calculer la limite des fonctions suivantes aux points indiqués entre parenthèses. On s'efforcera de faire usage d'équivalents.

(a) $f(x) = \dfrac{-x+1}{x^2-4x+4}$ (en 0, 2, $+\infty$,$-\infty$)

(b) $f(x) = \dfrac{2x+3x^2}{\sqrt{x^2(x+2)^2}}$ (en 0, -2, $+\infty$,$-\infty$)

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ (en a et en $+\infty$)

26. Calculer la limite des fonctions suivantes aux points indiqués entre parenthèses. On s'efforcera de faire usage d'équivalents.

(a) $f(x) = \dfrac{5x^3+2x^2-x}{x^2-2x}$ (en 0, 2, $+\infty$,$-\infty$)

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ (en 0^+ et $+\infty$)

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|\cos(x)(\cos(x/2)+\sin(x/2))|}}{2x-3\pi}$

(en $3\pi/2$ et ∞)

27. Calculer la limite des fonctions suivantes en ∞. On s'efforcera de faire usage d'équivalents.

(a) $f(x) = \dfrac{(x-1)\sqrt{3x+2}}{\sqrt{5x^3-2}}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^4-x^5+x^6}}{(x+x^2)(2x-4x^2)}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2+5x} - \sqrt{x^2+1}$

(d) $f(x) = \sqrt{x^4+2x^2} - x^2$

(e) $f(x) = \sqrt{x^6+3x+1} - \sqrt{x^6+x^2-1}$

28. Calculer la limite des fonctions suivantes en ∞. On s'efforcera de faire usage d'équivalents.

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6x^4+x^5+x^6}}{(x+x^2)(2x-3x^2)}$

(b) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+x}{x^2+4x+1}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2-2x-2} - \sqrt{x^2+2x+2}$

(d) $f(x) = \sqrt{x^3+1} - x\sqrt{x+1}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^6+3x^2} - \sqrt{x^6-3x^2}$

29. Etudier les limites à droite et à gauche de x_0 de la fonction f. Y a-t-il une limite au point x_0?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{|x-4|}$ en $x_0 = 4$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{|x-1|}$ en $x_0 = 2$

(c) $f(x) = \dfrac{|\sin(x-1)|}{x^2-1}$ en $x_0 = 1$

(d) $f(x) = \dfrac{|x\sin(x)|}{x}$ en $x_0 = 0$

(e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x^2-3x+2|}{x-1}}$ en $x_0 = 1$

(f) $f(x) = x + \dfrac{|x+1|}{x^2-1}$ en $x_0 = -1$

(g) $f(x) = [x] + [-x]$ en $x_0 = 0$

30. Calculer les limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\mathrm{Log}(x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x^{1/x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} (x+\sqrt{x})\mathrm{Log}(1/x)$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\sqrt{x^2+1}$

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x+\mathrm{Log}x}{x+1} + x^2e^{-x}$

31. Donner un équivalent simple et la limite au point 0 des fonctions suivantes.

(a) $\dfrac{\sin(3x)}{\sin(6x)}$ (b) $\dfrac{\sin(3x)}{(5x+3x^2)}$

(c) $\dfrac{\mathrm{Log}(1+8x)}{(x^2-x)}$ (d) $\dfrac{\sin^2x}{2x^2+x^3}$

(e) $\dfrac{\cos(3x)-1}{(\sin(2x))^2}$ (f) $\dfrac{1-\cos(x)}{\mathrm{tg}^2x}$

(g) $\dfrac{[\mathrm{Log}(1+2x)]^3}{e^{3x}-1}$ (h) $\dfrac{e^{x^3}-1}{x\sin(2x)}$

(i) $\dfrac{\mathrm{tg}(5x^3)^2}{1-\cos(3x)}$ (j) $\dfrac{\mathrm{Log}(1+x^2)}{2\mathrm{tg}^2(3x)}$

(k) $\sqrt{1+3x^2+6x}-1$ (l) $\dfrac{\sin(2x^2+x^3)}{(3x+2x^2+x^3)^2}$

(m) $\sin(2x)-\sin(2x)\cos(x)$

32. Donner un équivalent simple et la limite au point 0 des fonctions suivantes.

(a) $\dfrac{\sin(2x)}{5x+3x^2}$ (b) $\dfrac{\mathrm{Log}(1+7x)}{x^2-x}$

(c) $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x^2+x^5}}$ (d) $\dfrac{\mathrm{Log}(1+x^2)}{2\mathrm{tg}^2(3x)}$

(e) $\mathrm{Log}(1+3x^3+5x^2)$ (f) $\sqrt[3]{(1+3x^2+6x)}-1$

(g) $\dfrac{[\mathrm{Log}(1-3x)]^2}{e^{5x}-1}$ (h) $\dfrac{e^{x^2}-1}{2\sin(3x)}$

(i) $\dfrac{(1-\cos(2x))^2}{(\mathrm{tg}(3x^2))^3}$ (j) $\dfrac{\mathrm{Log}(1+2x^2+x^3)}{(\sin(2x))^2}$

(k) $\dfrac{\mathrm{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}$ (l) $\dfrac{\cos(5x^2-x^3)-1}{(\sin(2x))^2}$

33. Calculer les limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{1/x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^n)^{1/x^m}$ (n, m > 0)

34. Calculer les limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin(x))^{1/x}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{x}{n})^n$

35. Donner un équivalent simple et la limite en ∞ des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = (x^2+2x)\sin(3/x^2)$

(b) $f(x) = \cos(3/x)$

(c) $f(x) = \sqrt{x^3+x^4}\ \left[tg(4/\sqrt{x})\right]^3$

(d) $f(x) = 3x^2e^{-x} + 2$

(e) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-2e^x}$

(f) $f(x) = \dfrac{Log((x+1)/x)}{2\sin(1/x)}$

(g) $f(x) = (x^3+2x)^{1/3}-x$

36. Donner un équivalent simple et la limite en ∞ des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = (-x^3+2x)\ \sin(5/x^2)$

(b) $f(x) = tg\left(\dfrac{\pi(x+1)}{4x}\right)$

(c) $f(x) = (x+5x^3)\ Log\ (1+2/x)$

(d) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{xe^x+2e^{2x}}$

(e) $f(x) = x + \sqrt{x^n+1}$ $(n > 0)$

(f) $f(x) = (x^3+x^2)^{1/3} - x$

(g) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$

37. Donner un équivalent simple au voisinage de 2 de la fonction

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x^3-4x}}$$

Quelle est la limite quand x tend vers 2 de la fonction $(x-2)f(x)$?

38. Donner un équivalent simple au voisinage de -3 de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x^2-9}$$

Quelle est la limite quand x tend vers -3 de $(x+3)f(x)$?

39. Donner un équivalent simple et la limite au point (0,0) des fonctions suivantes.

(a) $f(x,y) = \sin(y)\left(\dfrac{x^3+1}{x^2}\right)$

(b) $f(x,y) = \dfrac{(\cos(y)-1)^2}{y}\ \dfrac{\sin(x)}{x}$

(c) $f(x,y) = \sqrt{x^5+x}\ \left(\dfrac{\sin(2y)}{y^2+y^3}\right)$

(d) $f(x,y) = \dfrac{\cos(y)-1}{y} + \dfrac{\sin(x)}{x}$

(e) $f(x,y) = \sin(y)\ \dfrac{(2x^2+3x^3)(2x+4)}{-2x+3}$

(f) $f(x,y) = \sin^3(y)\ \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x^2+x^3}}$

40. Soit $f(x,y) = \dfrac{\sin(3x)\ Log(1+2y)}{\exp(x^2+x)-1}$

Représenter le domaine de définition de f. Donner un équivalent simple de f(x,y) au voisinage de (0,0). Quelle est la limite de f en ce point? Quelle est la limite de f lorsque (x,y) tend vers $(-1^+,2)$?

41. Donner un équivalent simple et la limite éventuelle des fonctions suivantes au(x) point(s) indiqué(s) entre parenthèses.

(a) $f(x) = Log(2-x)/(1-x)$ (en 1 et $-\infty$)

(b) $f(x) = \dfrac{Log(3-x)}{(2-x)}$ (en 2 et en $-\infty$)

(c) $f(x) = 3\ \exp(x^2)$ (en 0 et ∞)

(d) $f(x) = \cos\ (\pi+x)$ (en 0)

(e) $f(x) = (x^2+x^3)^{1/3}-x$ (en 0 et $+\infty$)

(f) $f(x) = x\ \exp(1/2x) -x$ (en 0^+ et $+\infty$)

(g) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+Log(x)}$ (en $+\infty$ et 0^+)

42. Donner un équivalent simple et la limite éventuelle des fonctions suivantes au(x) point(s) indiqué(s) entre parenthèses.

(a) $f(x) = (x-1)Log(1-1/x)$ (en 1^+ et $+\infty$)

(b) $f(x) = \dfrac{Log(2+x)}{e^{x+1}-1}$ (en -1 et $+\infty$)

(c) $f(x) = 2\exp\ x^3$ (en 0 et en ∞)

(d) $f(x) = \sin\ (\pi/2+x)$ (en 0)

(e) $f(x) = \dfrac{2e^x-x^2}{e^x-2x^2}$ (en 0 et $+\infty$)

(f) $f(x) = \dfrac{x^3+e^x}{2e^x+x^5e^{-x}}$ (en 0 et ∞)

43. Déterminer une valeur approchée des nombres suivants

(a) $A = \sqrt[3]{1+\sin(2/100)}$

(b) $A = \sqrt[50]{e}$

(c) $A = \sqrt{\cos(1/100)}$

44. Déterminer une valeur approchée du nombre

(a) $A = \sqrt[5]{Log(1+\frac{1}{10}) + 1}$

(b) $A = \cos\ (\sqrt[20]{e}-1)$

45#. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

(a) $x = o(x^2)$ pour $x \to 0$, pour $x \to \infty$.

(b) $x = o(\sqrt{x})$ pour $x \to 0$, pour $x \to \infty$.

(c) ($f \sim x$ et $g \sim x^2$) $\Rightarrow$ $f+g \sim x$ pour $x \to 0$, pour $x \to \infty$.

(d) ($f \sim x$ et $g \sim x^2$) $\Rightarrow$ $f+g \sim x^2$ pour $x \to 0$, pour $x \to \infty$.

(e) $f \sim g \Rightarrow f\text{-}g = o(g)$ pour $x \to x_0$.

(f) $f \sim g \Rightarrow f^2 \sim g^2$ pour $x \to x_0$.

(g) $f = o(g) \Rightarrow f^2 = o(g^2)$.

(h) $1-\cos(x) = o(x)$ pour $x \to 0$, pour $x \to \infty$.

(i) $x^2-3x+2 = o(x-1)$ pour $x \to 0$.

(j) $f = o(x) \Rightarrow f = o(x^2)$ pour $x \to 0$ et $x \to \infty$.

46. Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{(1-\cos(2x))^2}{(tg(3x^2))^3}.$$

Que peut-on en déduire quant à l'allure du graphe de f au voisinage de 0?

47. Etudier les branches infinies des fonctions suivantes

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{8x^3+2x^2+3}}{(\sqrt{x+2})^3}$

(b) $f(x) = \sqrt{x+x^2+Log(x)}$

(c) $f(x) = \dfrac{3x^2+2x+1}{x-1}$

(d) $f(x) = \sqrt{4x^2-2x+Log(3x)}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^3-2x}$

(f) $f(x) = \sqrt{x^3-2x} - \sqrt{x^3+x}$

(g) $f(x) = \sqrt[3]{-x^3+x^2Log(x)}$

48. Etudier les branches infinies des fonctions suivantes

(a) $f(x) = \dfrac{(x+3)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{2x^3+1}}$

(b) $f(x) = \sqrt{9x^2-6x-Log(x)}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2-x+2}$

(d) $f(x) = \dfrac{-2x^3+x^2-x+1}{x^2+1}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+3x^2}$

(g) $f(x) = \sqrt[3]{-x^3+x^2\sqrt{x}}$

49#. (a) En revenant à la définition, montrer que la fonction Log est croissante.
(b) En déduire que la fonction exponentielle est croissante.
(c) Montrer que $Log(2) \geq 1/2$
(d) En déduire que $Log(2^n) \geq n/2$ et que la fonction Log n'est pas majorée.
(e) Montrer que la fonction exponentielle n'est pas majorée.

50. Trouver un équivalent au voisinage de 0, de $+\infty$ et de $-\infty$ des fonctions ch(x) et sh(x) (Cf. Ch.3 Exercice 18). Utiliser ces résultats pour préciser le graphe de ces fonctions (allure en 0, branches infinies...).

REVISION CH4

1. Quelle différence y a-t-il entre point adhérent à un ensemble et point d'accumulation d'un ensemble?

2. Quels sont les nombres x qui vérifient
(a) $(\forall \varepsilon > 0)(x < \varepsilon)$
(b) $(\forall \varepsilon > 0)(x-2 < \varepsilon)$
(c) $(\forall \varepsilon > 0)(|x-2| < \varepsilon)$
(d) $(\forall \varepsilon > 1)(|x-2| < \varepsilon)$?

3. On sait qu'une fonction f(x) vérifie l'inégalité $|f(x)| < 1/(100)^2$. On ne peut pas dire que f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Pourquoi?
Mais si on sait que $|f(x)| \leq 1/x^2$ pour $x \geq 100$, alors on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Pourquoi?

4. Donner des exemples de fonctions f(x)
(a) qui n'admettent pas de limite (finie ou infinie) en $+\infty$.
(b) qui n'admettent pas de limite (finie ou infinie) en 0.
(c) qui n'admettent pas de limite en 1.
Donner un exemple de fonction de deux variables qui n'admet pas de limite en (0,0).

5. Si $x \leq f(x) \leq x^2$ pour $x \geq 1$, que valent les limites de f en 1^+ et en $+\infty$. Quel théorème du cours utilise-t-on?

6. Quelle est la règle de comparaison exponentielle, puissance et logarithme. En quels points

s'applique-t-elle. Donner des exemple où elle ne s'applique pas.

7. Deux fonctions équivalentes en un point ont-elles une limite en ce point? Lorsque c'est le cas, que peut-on dire de ces limites? Si deux fonctions ont la même limite en un point, sont-elles équivalentes en ce point?

8. Comment trouve-t-on un équivalent d'une fonction polynôme en 0 et en $+\infty$? Quelles sont les 7 fonctions dont il faut connaître un équivalent en 0?

9. Donner un exemple où la somme des équivalents n'est pas un équivalent de la somme. Comment peut-on faire pour trouver un équivalent des fonctions $x+\sin(x)$, e^x+x et $\sqrt{x^2+1}+x$ en 0?

10. Si f(x) et g(x) sont équivalents en O, à quelle condition peut-on affirmer que

(a) $f(x+1)$ et $g(x+1)$ sont équivalents

(a) $f(*)$ et $g(*)$ sont équivalents

(a) $f(u(x))$ et $g(u(x))$ sont équivalents?

11. Comment compare-t-on deux infiniment grands?

12. Les fonctions suivantes sont-elles des infiniment grands en $+\infty$? Les classer.

(a) $f(x) = 2$ (b) $f(x) = \sqrt{x}$

(c) $f(x) = e^{x/1000}$ (d) $f(x) = e^x$

(e) $f(x) = \mathrm{Log}\ x$ (f) $f(x) = x^{100}$

(g) $f(x) = x$

13. Rappeler la procédure d'étude des branches infinies d'une fonction d'une variable. Donner de nouveaux exemples pour chaque cas.

EXERCICES CH 5

1. Etudier la limite des suites suivantes. En donner si possible un équivalent simple.

(a) $u_n = (n^2-2)/(n+3)$

(b) $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^6+2n^3-1}}{(\sqrt{n}+1)^2(n-n^2)}$

(c) $u_n = \mathrm{Log}(n)/\sqrt{n}$

(d) $u_n = \mathrm{Log}(1/n)$

(e) $u_n = \sqrt[n]{3n}$

(f) $u_n = \cos(3/n)$

(g) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{3n}\right)^n$

(h) $u_n = (n^2+2n)\sin(3/n^2)$

(i) $u_n = \sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2+1}$

(j) $u_n = \sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3-n^2}$

2. Etudier la limite des suites suivantes. En donner si possible un équivalent simple.

(a) $u_n = \dfrac{2n^3-n}{1+n-n^3}$

(b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{2}}{n-2}$

(c) $u_n = e^{1/n}$

(d) $u_n = (ne^n)^{1/n}$

(e) $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$

(f) $u_n = (1+n)^{1/2n}$

(g) $u_n = n(\sqrt[n]{5}-1)$

(h) $u_n = \sqrt{\mathrm{Log}(n+1)} - \sqrt{\mathrm{Log}(n)}$

(i) $u_n = \sqrt[3]{n^3+2n} - n$

3#. Etudier la limite des suites suivantes.

(a) $u_n = 2^n/3^{n-1}$

(b) $u_n = 1/(n+\cos(n))$

(c) $u_n = \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$

(d) $u_n = n/(n+\sin(n))$

4#. Etudier la limite des suites suivantes.

(a) $u_n = a^n/n!$ $(a > 0)$

(b) $u_n = C_n^p$ (où p est un entier fixé et C_n^p désigne le coefficient binomial

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}$$

(c) $u_n = C_n^p/n^a$ (p fixé, $a > 0$)

(d) $u_n = C_n^p/n^n$ (p fixé)

5#. (a) Soit n un entier > 0. Montrer que pour tout entier p tel que $2 \le p \le n-2$, on a

$$C_n^p \ge n(n-1)/2$$

(b) On considère la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par

$$u_n = \sum_{p=0}^{n} 1/C_n^p$$

Montrer que pour tout $n \ge 3$, on a

$$2 + \frac{2}{n} \le u_n \le 2 + \frac{2}{n} + \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$$

(c) En déduire la limite L de la suite $(u_n)_{n>0}$ ainsi qu'un équivalent de u_n-L.

6#. (a) Montrer que pour tout entier n,

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \in \mathbf{Z}$$

(b) En utilisant (a), montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par

$$u_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$$

tend vers 0.

7. Les suites suivantes sont-elles majorées, minorées, bornées, convergentes?

(a) $u_n = n + 1/n$

(b) $u_n = \cos^3(n)$

(c) $u_n = -e^n$

(d) $u_n = e^{1/n}$

8#. (a) En revenant à la définition du logarithme, montrer que

$$1/(n+1) \le \mathrm{Log}(n+1) - \mathrm{Log}(n) \le 1/n.$$

En déduire

(b) que la suite $(u_n)_{n>0}$ de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

a pour limite $+\infty$.

(c) que la suite $(v_n)_{n>0}$ de terme général

$$v_n = u_n - \mathrm{Log}(n)$$

est décroissante et minorée, donc convergente. (Sa limite est appelée constante d'Euler-Mascheroni et vaut approximativement 0,577215661).

9#. Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie par

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{3u_n}.$$

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ est majorée par 3.

(b) Montrer que pour tout $x \in [0,3]$, on a

$$\sqrt{3x}-x \geq 0$$
et en déduire que la suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante.
(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ converge vers 3.
(d) Retrouver le résultat de (c) en exprimant u_n en fonction de n.

10. Montrer que les suites $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ définies par:

$$\begin{cases} u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)} \qquad (n > 0) \end{cases}$$

sont des suites adjacentes. (Elles sont donc convergentes; on peut montrer que leur limite est le nombre e).

11. Soit x un nombre réel. Les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ des approximations décimales de x par défaut et par excès sont respectivement définies par

$$u_n = \frac{[10^n x]}{10^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{[10^n x]+1}{10^n}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ sont des suites adjacentes. Quelle est leur limite?

12#. Les suites suivantes sont-elles convergentes?
(a) $u_n = (-1)^n + \frac{3}{n}$ (b) $u_n = (-1)^n(2+\frac{3}{n})$
(c) $u_n = (-1)^n/2n$ (d) $u_n = (-1)^{n(n-1)/2}$

13#. Montrer que si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n>0}$ et $(u_{2n+1})_{n>0}$ d'une suite $(u_n)_{n>0}$ convergent vers la même limite L, alors la suite $(u_n)_{n>0}$ converge vers L.

14#. Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_n = 1 & \text{si n est premier} \\ u_n = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) La suite $(u_n)_{n>0}$ est-elle convergente?
(b) Montrer que toute suite extraite du type $(u_{kn})_{n>0}$ où k est un entier ≥ 2 est convergente.
(c) Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n/n$ est convergente. Donner sa limite.

15#. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n>0}$ croissante qui admet une sous-suite convergeant vers un nombre réel L converge elle aussi vers L. (Indic.: On pourra commencer par montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ est majorée).

16#. Etudier la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par
(a) $u_1 = 3/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = x^2-2x+2$
(b) $u_1 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 6/(x+1)$

17#. Etudier la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par
(a) $u_1 = 3/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = -x^2+4x-2$
(b) $u_1 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = (-2x+7)/(2x+3)$
(c) $u_1 = \pi/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \sin(x)$

18#. Etudier la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par $u_1 = b$ (avec $b > 0$) et $u_{n+1}u_n = (a+u_n^2)/2$ (avec $a > 0$).

19#. Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie par $u_1 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{3}{4}u_n^2-2u_n+3$.
(a) Montrer que si $a \in [2/3,2]$, alors la suite $(u_n)_{n>0}$ converge vers 2.
(b) On suppose $a \notin [2/3,2]$. Montrer que $u_n > 2$ pour tout $n > 0$, puis que la suite de terme général $v_n = u_{n+1}-u_n$ est croissante. En déduire que la suite $(u_n)_{n>0}$ tend vers $+\infty$.

20#. Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite
$\sqrt{2}, (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}, (\sqrt{2})^{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})}, \dots$
où, de façon générale, $u_{n+1} = (\sqrt{2})^{u_n}$.
(Indic.: montrer que $u_n \leq 2$ pour tout n, que $f(x) = (\sqrt{2})^x$ est croissante etc...).

21#. (Suites récurrentes affines d'ordre 1).
Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite vérifiant la relation:
(*) $u_{n+1} = au_n+b$ pour tout $n > 0$,
où a et b sont deux réels donnés et $a \neq 0$.
(a) On suppose $a \neq 1$. Montrer que l'équation $x = ax+b$ a une unique solution $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer qu'on a alors:
$(u_n-\alpha) = a^{n-1}(u_1-\alpha)$ pour tout $n > 0$.
(Indic.: faire une récurrence). Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n>0}$.
(b) Montrer que si $a = 1$, on a $u_n = u_1+(n-1)b$ pour tout $n > 0$. La suite $(u_n)_{n>0}$ converge-t-elle?
(c) Vérifier graphiquement les résultats précédents.

22#. (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2).
Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite vérifiant la relation:
(*) $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n = 0$ pour tout $n > 0$,
où a, b et c sont trois réels donnés et $ac \neq 0$.
On pose $P(X) = aX^2+bX+c$.
(a) Montrer que si t est une racine réelle de l'équation $P(t) = 0$, la suite $(t^n)_{n>0}$ vérifie (*).
(b) On suppose que le trinôme P(X) a deux racines réelles t_1 et t_2 distinctes. Montrer que le système

$$\begin{cases}\alpha t_1+\beta t_2 = u_1\\ \alpha t_1^2+\beta t_2^2 = u_2\end{cases}$$

a une solution unique (α,β). Montrer qu'on a alors:

$$u_n = \alpha t_1^n+\beta t_2^n \quad \text{pour tout } n > 0$$

(Indic.: faire une récurrence).

(c) On suppose que le trinôme P(X) a une racine double t. Montrer que le système

$$\begin{cases}\alpha t+\beta t = u_1\\ \alpha t^2+2\beta t^2 = u_2\end{cases}$$

a une solution unique (α,β). Montrer qu'on a alors:

$$u_n = \alpha t^n+\beta n t^n \quad \text{pour tout } n > 0$$

(Indic.: récurrence; se rappeler que $t = -b/2a$).

23#. (Suites récurrentes homographiques). Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite réelle vérifiant la relation:

(*) $u_{n+1} = f(u_n)$ $(\forall\ n > 0)$ avec $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

où $ad-bc \neq 0$ et $c \neq 0$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$).

(a) A quelle condition sur a, b, c, d l'équation $f(z) = z$ a-t-elle 2 solutions α et β réelles distinctes?

(b) On suppose que cette condition est remplie et que $u_1 \neq \alpha$. On pose

$$v_n = \frac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}$$

Montrer que, pour tout $n > 0$, on a

$$v_{n+1} = kv_n \quad \text{où } k = \frac{c\alpha+d}{c\beta+d}$$

En déduire que $v_n = k^{n-1}v_1$ pour tout $n > 0$. Conclure quant à la convergence des suites $(v_n)_{n>0}$ et $(u_n)_{n>0}$.

(c) Que se passe t-il si $u_1 = \alpha$? Que se passe t-il si l'équation $f(z) = z$ n'a pas de solution réelle?

24#. (Suite de Fibonacci). Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie par $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et la relation

(*) $u_{n+2} = u_{n+1}+u_n$ pour tout $n > 0$.

(a) Montrer que, pour tout n, u_n et u_{n+1} sont deux entiers premiers entre eux.

(b) Exprimer u_n en fonction de n. (Indic.: utiliser l'exercice 22).

(c) Etudier la suite de terme $v_n = u_{n+1}/u_n$ $(n > 2)$. (Indic.: remarquer que $v_{n+1} = 1 + 1/v_n$).

25# (Moyennes de Césaro). Soit $(a_n)_{n>0}$ une suite à termes positifs non nuls. On suppose que la série de terme a_n est divergente.

(a) Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite convergeant vers $L = 0$. Montrer que la suite de terme général

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k \Big/ \sum_{k=0}^{n} a_k$$

tend vers $L = 0$.

(b) Montrer que le résultat subsiste si la limite L est un réel quelconque. (Indic.: introduire la suite de terme $v_n = u_n-L$ et utiliser (a)).

(c) Montrer que le résultat subsiste si $L = \pm\infty$.

26#. (a) Soit $(v_n)_{n>0}$ une suite réelle telle que $v_{n+1}-v_n$ tend vers L. Montrer que v_n/n tend vers L. (Indic.: appliquer l'exercice 25 avec $a_n = 1$ et $u_n = v_{n+1}-v_n$).

(b) Soit $(w_n)_{n>0}$ une suite à termes > 0 telle que w_{n+1}/w_n tend vers L. Montrer que $\sqrt[n]{w_n}$ tend vers L. (Indic.: appliquer le (a) avec $v_n = \mathrm{Log}(w_n)$).

27#. (Cf. Prop.4.3). Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite à termes positifs. Montrer que la suite $(U_n)_{n>0}$ des "sommes partielles"

$$U_n = u_1+u_2+\ldots+u_n$$

est croissante. En déduire que la série de terme u_n est convergente ssi la suite $(U_n)_{n>0}$ est majorée.

28#. Etudier la convergence des séries de terme général

(a) $\dfrac{(\sqrt{n}+1)^3}{(1+n-n^2)^2}$	(b) $\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n^2+n}$
(c) $\sqrt{n+1}\sin(1/n^2)$	(d) $\mathrm{Log}(n^2+1)-2\mathrm{Log}(n)$
(d) $\dfrac{(-1)^n}{n^3+\cos(n)}$	(e) $(\sin(n)\sin(1/n))^2$
(f) $\dfrac{(-1)^n(n^2+1)}{n^3-n}$	(g) $\mathrm{Log}(n)/n^2$
(g) $\dfrac{a^n}{n!}$ $(a \in \mathbf{R})$	(h) $\dfrac{(n!)^2}{(2n!)}$
(i) $\dfrac{3^n+2}{5^n-1}$	(j) $\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

29#. Montrer que les séries de terme u_n sont convergentes. Calculer leur somme.

(a) $u_n = a^{n-1}$ $(|a| < 1)$ (b) $\dfrac{2.3^n-3.2^n}{5^n}$

(c) $u_n = 1/(n^2-1)$ (d) $u_n = \mathrm{Log}\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

(Indic.: (c) $2u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$)

30#. (Règle "$n^\alpha u_n$"). Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite à termes positifs.
(a) Montrer que si $n^\alpha u_n$ tend vers 0 avec $\alpha > 1$, alors, pour tout n suffisamment grand, on a:

$$0 \leq u_n \leq 1/n^\alpha$$

En déduire que la série de terme u_n est convergente.
(b) Montrer que si $n^\alpha u_n$ tend vers $+\infty$ avec $\alpha < 1$, alors, pour tout n suffisamment grand, on a:

$$u_n \geq 1/n^\alpha$$

En déduire que la série de terme u_n est divergente.

31#. (Règle de Cauchy). Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite à termes positifs. On suppose que $L = \lim_{n\to+\infty} u_n{}^{1/n}$ existe.
(a) Montrer que si $L < 1$, alors il existe $M < 1$ tel que, pour tout n suffisamment grand, on a

$$0 \leq u_n \leq M^n$$

(<u>Indic.</u>: choisir M dans l'intervalle $]L,1[$ et écrire la définition de $L = \lim_{n\to+\infty} u_n{}^{1/n}$ pour $\varepsilon = M-L$).
En déduire que la série de terme u_n est convergente.
(b) Montrer que si $L > 1$, alors il existe $M > 1$ tel que, pour tout n suffisamment grand, on a

$$u_n \geq M^n.$$

(<u>Indic.</u>: choisir M dans l'intervalle $]1,L[$ et écrire la définition de $L = \lim_{n\to+\infty} u_n{}^{1/n}$ pour $\varepsilon = L-M$).
En déduire que la série de terme u_n est divergente.

32#. (Règle de D'Alembert). Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose que $L = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n$ existe.
(a) Montrer que si $L < 1$, alors il existe $M < 1$ et un entier n_0, tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$0 \leq u_{n+1} \leq Mu_n$$

(<u>Indic.</u>: choisir M dans l'intervalle $]L,1[$ et écrire la définition de $L = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n$ pour $\varepsilon = M-L$).
En déduire que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$0 \leq u_n \leq M^{n-n_0} u_{n_0}$$

et que la série de terme u_n est donc convergente.
(b) Montrer que si $L > 1$, alors il existe $M > 1$ et un entier n_0, tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$u_{n+1} \geq Mu_n$$

(<u>Indic.</u>: choisir M dans l'intervalle $]1,L[$ et écrire la définition de $L = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n$ pour $\varepsilon = L-M$).
En déduire que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$u_n \geq M^{n-n_0} u_{n_0}$$

et que la série de terme u_n est donc divergente.

REVISION CH5

1. Donner des exemples de suites définies
- par une formule explicite
- par une relation de récurrence d'ordre 1, 2, 3.
- d'une autre façon;

Calculer les premiers termes.

2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Si non, donner un contre-exemple.
(a) Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante.
(b) Une suite décroissante de nombres positifs est convergente.
(c) Une suite convergente de nombres positifs est décroissante.
(d) Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
(e) Une suite non majorée tend vers $+\infty$.

3. Rappeler les résultats principaux sur les suites monotones, les suites adjacentes.

4. Comment montre-t-on qu'une suite n'a pas de limite, finie ou infinie?

5. Rappeler les règles de convergence pour les séries et donner un exemple pour chacune d'elles.

6. Une série dont le terme général tend vers 0 est-elle convergente? Donner des exemples (ou contre-exemples).

7. Quelles sont les séries de référence qu'on utilise pour montrer la convergence d'une série? et celles pour montrer la divergence d'une série?

8. Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite telle que $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} 1/n$. La série de terme u_n est-elle divergente? Donner des exemples (ou contre-exemples). La réponse change-t-elle si la suite est à termes positifs?

EXERCICES CH 6

1. Etudier la continuité des fonctions suivantes en précisant la nature des discontinuités éventuelles. Peut-on les prolonger par continuité?

(a) $\begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq \pi/4 \\ \cos(x) & \text{si } x < \pi/4 \end{cases}$

(b) $\dfrac{x^2-4}{|x-2|}$ (c) $\sqrt{x}\ \cos(1/x)$

(d) $(1+x)^x$ (e) x^x

(f) $(1+x)^{1/x}$ (g) $\mathrm{Log}(x-\dfrac{1}{x})$

(h) $\exp\left(\dfrac{1}{(t-a)(t-b)}\right)$ $(a < t < b)$

2. Déterminer les valeurs des paramètres a et b pour que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{pour } x < -2 \\ ax+b & \text{pour } -2 \leq x \leq 1 \\ \mathrm{Log}(x) & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$

soit continue.

3. Déterminer les valeurs des paramètres a, b et c pour que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{pour } x < -1 \\ ax^2+bx+c & \text{pour } -1 \leq x \leq 1 \\ x+2 & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$

soit continue et vérifie f(0) = 0.

4. Déterminer les valeurs du paramètre a pour que la fonction f soit continue.

(a) $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{2/x} & \text{pour } x < 0 \\ 3e^x-a & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}e^{1/x} + \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ a^2(x+1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2ax+(ax)^2 & \text{pour } x \geq 1 \\ \cos(\pi x) & \text{pour } x < 1 \end{cases}$

5. Pour quelle valeur de a peut-on prolonger par continuité les fonctions suivantes?

(a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x}\ \mathrm{Log}(2-x) & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{e^{x-1}-a}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} (x+1)\ \mathrm{Log}(1+x) & \text{si } x > -1 \\ \dfrac{a-5}{2+e^{1/x+1}} & \text{si } x < -1 \end{cases}$

6. Peut-on prolonger par continuité en 0 les fonctions suivantes? Si non, est-ce possible à droite, à gauche?

(a) $\dfrac{[\mathrm{Log}(1+2x)]^3}{1-\cos(2x)}$ (b) $\dfrac{2x+3x^2+4x^4}{\sqrt{x^2+2x^3}}$

(c) $\dfrac{e^{3x}-1}{\sqrt{4x^2+1}-1}$ (d) $\dfrac{\exp(4x^2)-1}{\sin^2(3x)}$

(e) $\dfrac{\sqrt{3x^2-2x^3}}{x+5x^2-3x^4}$ (f) $\dfrac{\mathrm{tg}(2x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

(g) $\dfrac{\exp(x^2)-1}{2x\sin(3x)}$ (h) $\dfrac{(e^{3x}-1)^2}{\mathrm{Log}(1+5x^2)}$

(i) $\dfrac{\mathrm{Log}(\cos(x))}{\sin(x)}$ (j) $\dfrac{\sin(\mathrm{tg}(x))}{\sqrt{\cos(x)}-1}$

7. Donner un équivalent simple au voisinage de -3 de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x^2-9}$$

Peut-on prolonger f par continuité en -3? A droite, à gauche de -3? Peut-on prolonger la fonction g(x) = (x+3)f(x) par continuité en -3?

8. Etudier la continuité des fonctions suivantes. Peut-on les prolonger par continuité en (0,0)?

(a) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{2x^2+2y^2}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{tg}^3(x)\sin(y^2)}{x^2\ \mathrm{Log}(1+y)}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{tg}(x^2+2y^2)}{e^{x^2}(e^{y^2})^2-1}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{x^2\ \mathrm{Log}(1+y)}{x^2+y^2}$

9. Soit $f(x,y) = (y^2+2x)/x^2$. Représenter sur un même graphe le domaine de définition D_f de f et les courbes I^{-1} et I^0 de niveau -1 et 0 de f.
(a) Etudier les limites de f(x,y) lorsque (x,y) tend vers (0,0) en restant sur I^{-1}, sur I^0.
(b) Peut-on prolonger la fonction f par continuité en (0,0)?

10. Soit f(x,y) = exp(x/(x-y)). Quel est le domaine de définition D_f de f? Existe-t-il des points de $R^2 \setminus D_f$ où on puisse prolonger f par continuité?

11. Soit f(x,y) = (xy+x+y)/xy.
(a) Représenter sur un même graphe le domaine de définition D_f de f et les courbes I^{-1} et I^0 de niveau -1 et 0 de f.

(b) Etudier la limite de $f(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ en restant sur la partie de la droite $y = x$ située dans le premier quadrant.
(c) Peut-on prolonger la fonction f par continuité en $(0,0)$?

12. Soit $f(x,y) = (x^2-y)/(x-y^2)$.
(a) Représenter sur un même graphe le domaine de définition D_f de f et les courbes l^1 et l^0 de niveau 1 et 0 de f.
(b) Etudier les limites de $f(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ en restant sur l^1, sur l^0.
(c) Peut-on prolonger la fonction f par continuité en $(0,0)$?

13#. Soit f une fonction continue en x_0 et g une fonction discontinue en x_0.
(a) Montrer que f+g est discontinue en x_0.
(b) Montrer (a) est faux si on remplace f+g par fg.
(c) Montrer que si de plus $f(x_0) \neq 0$ alors fg est discontinue en x_0.

14#. (a) Montrer que si une fonction f est continue en un point m_0, alors $|f|$ est également continue en m_0.
(b) Vérifier que si a et b sont deux nombres réels quelconques, alors

$$\begin{cases} \max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2} \\ \min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2} \end{cases}$$

(c) Montrer que si f et g sont continues en m_0, alors les fonctions max(f,g) et min(f,g) sont continues en m_0.

15#. Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite définie par une relation de récurrence d'ordre 1

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{et } u_1 = a \in \mathbb{R},$$

où f est une fonction continue sur R. Montrer que si la suite $(u_n)_{n>0}$ a une limite $L \in \mathbb{R}$, alors L est nécessairement un point fixe de f (i.e., $f(L) = L$). (Indic.: s'inspirer de l'exemple 3 du §2 du Ch.5).

16#. Montrer qu'il peut arriver dans la situation de l'exercice 15, il peut arriver que f ait un point fixe mais que la suite $(u_n)_{n>0}$ ne converge pas.

17#. Soit A un sous-ensemble de R. Montrer qu'un nombre réel x est adhérent à A ssi il existe une suite $(a_n)_{n>0}$ d'éléments de A qui converge vers x. (Indic.: Ecrire les définitions et s'inspirer de la démonstration du Th.1.5).

18#. (a) Montrer: $|\sin(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (Indic.: Revenir à la définition de sin(x)).
(b) En déduire que la fonction sin est continue en 0.
(c) Montrer que la fonction cos est continue en 0. (Ecrire $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).
(d) En écrivant $\sin(x_0+h)$ en fonction de sin(h) et cos(h), montrer que

$$\lim_{h \to 0} \sin(x_0+h) = \sin(x_0)$$

En déduire que la fonction sinus est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
(e) Montrer que les fonctions sin, cos et tg sont des fonctions continues.

19#. Soient f et g deux fonctions équivalentes au voisinage de 0. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \,]-\alpha,\alpha[$,

$$\frac{1}{2}|g(x)| \leq |f(x)| \leq \frac{3}{2}|g(x)|$$

20#. (a) Montrer qu'il existe un voisinage I de 1 tel que, pour tout $x \in I$, on ait $e^x < (x+1)^2$.
(b) Plus généralement, soient f et g sont deux fonctions continues en x_0 telles que $f(x_0) < g(x_0)$. Montrer qu'il existe un voisinage I de 1 tel que, pour tout $x \in I$, on ait $f(x) < g(x)$.

21#. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. On suppose $f(a) \geq g(a)$ et $f(b) \leq g(b)$. Montrer que les graphes de f et de g se coupent au moins une fois. (Indic.: Considérer la fonction $f(x)-g(x)$).

22#. Soit f une fonction continue sur [0,1] prenant ses valeurs dans [0,1]. Montrer que f a au moins un point fixe (c'est-à-dire: il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$) (Indic.: considérer la fonction $f(x)-x$).

23#. Montrer que si $a_0 < 0$, alors l'équation

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

admet une racine positive.

24#. Montrer que l'équation $tg(x) = x$ a une racine dans chaque intervalle de la forme $]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$.

24.1#. Soient f(x) et g(x) deux fonctions continues et positives sur un intervalle [a,b]. On suppose de plus que $f(a) = g(b) = 0$. Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda g(c)$.

25#. (a) Un intervalle de R peut être ouvert, fermé, semi-ouvert, borné, non borné etc... Combien y a-t-il de types d'intervalles?
(b) Montrer qu'on peut caractériser les intervalles de la façon suivante:
(*) un sous-ensemble I de R est un intervalle ssi pour tous x, y ∈ I tels que $x \leq y$, le segment $[x,y]$ est contenu dans I.
(Indic.: introduire les bornes supérieures et inférieures de I quand elles existent).

25.1#. Soit f(x) une fonction définie sur R telle que $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$. Soit K une partie bornée de R. Montrer que l'ensemble noté $f^{-1}(K)$ défini par:

$$f^{-1}(K) = \{x \in R \mid f(x) \in K\}$$

est borné.

26#. (a) Soient $a(a_1,a_2)$ et $b(b_1,b_2)$ deux points de R^2. Montrer que les points du segment joignant a à b sont de la forme

$$m((1-t)a_1+tb_1,(1-t)a_2+tb_2)$$

où $t \in [0,1]$.
(b) Soient $B = B(m_o,r)$ une boule (i.e., un disque) de R^2 et $a(a_1,a_2)$ et $b(b_1,b_2)$ deux points de B. Montrer que le segment joignant a à b est contenu dans B. (On dit que les disques sont des ensembles convexes).

27#. Soient f(x,y) une fonction continue sur une boule B de R^2 et $a(a_1,a_2)$ et $b(b_1,b_2)$ deux points de B. On suppose que f ne s'annule pas sur B. Montrer que f(a) et f(b) sont du même signe. (Indic.: appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $\varphi(t)$ définie sur [0,1] par $\varphi(t) = f((1-t)a_1+tb_1,(1-t)a_2+tb_2))$.

28#. Soit f(x,y) une fonction continue sur une boule B de R^2. Montrer que l'image par f de B est un intervalle de R. (Indic.: Utiliser l'exercice 27). Généraliser le résultat à $f(x_1,...,x_n)$ fonction continue sur une boule B de R^n.

29. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ x^3+1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Tracer le graphe de f. Montrer que f est strictement croissante et continue sur R. Déterminer sa réciproque.

30#. (a) Montrer que l'équation $y^3+y+x = 0$ définit implicitement y(x).
(b) Montrer que la fonction $x \to y(x)$ est définie sur R et a pour ensemble image R.
(c) Montrer que la fonction $x \to y(x)$ est strictement décroissante.
(d) Conclure que la fonction $x \to y(x)$ est continue et injective. Quelle est sa réciproque?

31#. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. En utilisant les Th.2.5, Th.2.7 et Th.2.8, montrer qu'il y a équivalence entre les assertions suivantes.
(i) f est continue et injective.
(ii) f est strictement monotone et l'ensemble image par f de I est un intervalle.

32. Donner les valeurs des expressions suivantes.
(a) $\text{Arcsin}(\sqrt{3}/2)$ (b) $\text{Arcos}(-1/2)$
(c) $\text{Arctg}(-1/\sqrt{3})$ (d) $\text{Arcsin}(1)$

33. Donner les valeurs des expressions suivantes.
(a) $\sin(\text{Arcsin}(-1/2))$
(b) $\text{Arcsin}(\sin(5\pi/6))$
(c) $\text{Arccos}(\cos(-\pi/4))$
(d) $\text{tg}(\text{Arctg}(2/7))$

34#. Etablir les relations suivantes:
(a) $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}(x)$
(b) $\text{Arcsin}(x) + \text{Arcos}(x) = \pi/2$
(c) $\begin{cases} \sin(\text{Arcos}(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \text{tg}(\text{Arcos}(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \end{cases}$
(d) $\begin{cases} \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \text{tg}(\text{Arcsin}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$
(e) $\begin{cases} \cos(\text{Arctg}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \sin(\text{Arctg}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

35. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont fermés? lesquels sont bornés?
(a) $[0,1] \cup [2,3]$ (b) $[0,1[\cup]1,3]$
(c) $\{2^{-n} \mid n \in N^*\}$ (d) $\{2^{-n} \mid n \in N^*\} \cup \{0\}$
(e) N^* (f) R
(g) Q

36#. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues sur $[0,1]$. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 < f(x) < g(x)$.
(a) Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, on ait $g(x) \geq kf(x)$.
(b) En déduire que la suite de terme général

$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)^n dx$$

tend vers $+\infty$.

37#. Soit $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$.
On suppose que n est pair.
(a) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout x tel que $|x| > A$, on ait $f(x) > f(0)$.
(b) En déduire qu'il existe un réel x_0 vérifiant $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. (Indic.: montrer que x_0 tel que $f(x_0) = \min\{f(x) \mid x \in [-A,A]\}$ convient).

38#. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ prenant ses valeurs dans $[a,b]$. On suppose que, pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \geq |x|$.
(a) Montrer qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ vérifiant $|f(x)| \leq |f(x_0)|$, pour tout $x \in [a,b]$.
(b) Montrer que $c = f(x_0)$ vérifie $|f(c)| = |c|$.

39#. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Montrer que l'ensemble image $f([a,b])$ est un intervalle $[\mu,M]$ fermé et borné de $\mathbf{R}$. (Indic.: combiner le Th.2.5 et le Th.2.12).

40. Donner un encadrement de l'intégrale I de f sur l'intervalle $[a,b]$ indiqué, pour
(a) $f(x) = x^2$; $[-2,3]$
(b) $f(x) = 1/x$; $[1,a]$ $(a > 1)$
(En déduire une minoration de Log(a)).
(c) $f(x) = 1/\sqrt{x^2+1}$; $[-2,1]$.

41. Démontrer que si f est continue sur un intervalle I, on a, pour a,b,c dans I

$$\int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

42#. Démontrer, en revenant à la définition, que si f est continue sur un intervalle $[a,b]$ et k et h sont des nombres réels non nuls, on a

$$\int_a^b f(kx+h)dx = \frac{1}{k}\int_{ka+h}^{kb+h} f(u)du$$

43#. En utilisant l'exercice 42, montrer que
(a) Si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et périodique de période T, on a, pour tout $a \in \mathbf{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

(b) Si f est une fonction paire continue sur $\mathbf{R}$, on a, pour tout $a \in \mathbf{R}$,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

(c) Si f est une fonction impaire continue sur $\mathbf{R}$, on a, pour tout $a \in \mathbf{R}$,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

44#. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

(Indic.: Utiliser les résultats du paragraphe §2.4).

45#. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$ et qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

(Indic.: Utiliser les résultats du paragraphe §2.2).

46#. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que

$$\int_a^b |f(x)|dx = 0$$

Montrer que la fonction f est identiquement nulle.
(Indic.: Déduire le résultat de l'exercice 45).

47#. Montrer que le résultat de l'exercice 45 devient faux si on ne suppose plus f continue.

48#. On dit qu'une fonction f est uniformément continue sur $[a,b]$ si

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \alpha > 0)(\forall\, x,y \in [a,b])\quad (|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon)$$

(a) Ecrire la définition de "f continue sur [a,b]" et faire la différence avec la définition ci-dessus.
(b) Démontrer l'énoncé (a) du Th.3.1 en supposant f uniformément continue. (Indic.: poser

$$\varepsilon_n = \max\{|f(x)-f_n(x)| \mid x \in [a,b]\}$$

et montrer que la suite $(\varepsilon_n)_{n>0}$ tend vers 0).

REVISION CH6

1. Décrire divers cas de discontinuité en un point x_0. Donner des exemples graphiques.

2. Quelle propriété de la fonction f: $x \rightarrow x^2+3x$ permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$?
Trouver une fonction f telle que $f(1) = 4$ et pour laquelle $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq 4$

3. Soit f une fonction d'une variable. On note
$L_1 = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ et $L_2 = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$
Que peut-on conclure
(a) si $L_1 = L_2$
(b) si $L_1 \neq L_2$?

4. Soit f une fonction d'une variable. On note
$L_1 = \lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in Ox}} f(x)$ et $L_2 = \lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in Oy}} f(x)$
Que peut-on conclure
(a) si $L_1 = L_2$
(b) si $L_1 \neq L_2$?

5. Enoncer les deux formes du théorème des valeurs intermédiaires. Rappeler pourquoi elles sont équivalentes.

6. Que peut-on dire d'une fonction continue sur un intervalle et qui prend ses valeurs dans Z?

7. Donner des exemples d'ensemble fermés et pas bornés, bornés et pas fermés, ni fermés ni bornés.

8. Quelle différence y a-t-il entre les propriétés suivantes?
(a) f est bornée supérieurement sur E
(b) f a un maximum sur E.

9. Rappeler les propriétés de base de l'intégrale. Les illustrer graphiquement.

10. Rappeler le principe de la construction de l'intégrale des fonctions continues.

EXERCICES CH 7

1. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes.
(a) $f(x) = x^3\sqrt{1-x}$
(b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \\ \sqrt{-x+1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

2. Soit
$$f(x) = \begin{cases} -e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ xe^{(x-1)/x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
Montrer que f(x) peut être prolongée par continuité en 0. La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable?

3. Soit
$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
Montrer que la fonction f est dérivable.

4#. Soit f(x) une fonction admettant une direction asymptotique y = ax en +∞. On pose
$$\begin{cases} \varphi(x) = 1/f(1/x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$
Montrer que la fonction φ est continue et dérivable à droite de 0. Quelle est sa dérivée $\varphi'_d(0)$?

4.1#. (a) Soit f(x) une fonction dérivable en a.
Montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a)$.
(b) Montrer que la réciproque est fausse; c'est-à-dire, trouver un exemple de fonction pour lequel la limite ci-dessus existe et qui n'est pas dérivable en a.

5. Calculer la dérivée des fonctions suivantes.
(a) x^{3x^2} (b) $2x\ e^{x-1}\sin(2x)$
(c) $\text{Log}(\dfrac{4x^2+1}{x^2+4})$ (d) $\sin(3x)\ \exp(\sqrt{x})$
(e) $\sqrt{\sin(2x)}$ (f) $(\text{tg}(x))^{-\text{Log}(\sin(x))}$

6. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3. Généraliser en établissant une formule pour la dérivée p-ième.
(a) x^n (b) $1/(ax+b)^m$
(c) $\cos(2x)$ (d) $\sqrt{x}$
(e) $(2x)^n$ (f) $\text{Log}(x)$

7. Soit $f(x) = \exp(t^2)$. Montrer que
$$f^{(n)}(t) = P_n(t)\exp(t^2)$$
où $P_n(t)$ est un polynôme de degré n. Vérifier la formule
$$P_{n+1}(t) = 2tP_n(t) + P'_n(t).$$

8#. (a) Montrer que la fonction $f(t) = \exp(t^2)$ vérifie
$$f^{(n+1)}(t) = 2tf^{(n)}(t) + 2nf^{(n-1)}(t)).$$
En déduire que
$$P_{n+1}(t) = 2tP_n(t) + 2nP_{n-1}(t)$$
où les $P_n(t)$ sont les polynômes de l'exercice 7.
(b) Déduire de (a) et de l'exercice 7 l'identité suivante satisfaite par $P_n(t)$:
$$P''_n(t) + 2tP'_n(t) - 2nP_n(t) = 0$$

9. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes.
(a) $f(x,y) = (y+2)^{x+2}$
(b) $f(x,y) = e^{x^2/y}\cos(y)$
(c) $f(x,y) = (\cos(x^2y))^{1/5}$
(d) $f(x,y,z) = (xy)^{yz}$

10. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes.
(a) $f(x,y) = x(y+1) - 3$
(b) $f(x,y) = e^{x^2}\cos(y)$
(c) $f(x,y) = x^{y^2}$
(d) $f(x,y,z) = \text{Arctg}(y/x)$

11. Soit $f(x,y) = \exp(\dfrac{x^2+y^2}{xy})$.
Montrer que pour tout $(x,y) \in D_f$, on a:
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

12. Soit $f(x,y) = \text{Log}(x^2+y^2)$. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on a:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

13. La distance l parcourue par une automobile roulant à vitesse constante v pendant un temps t est donnée par la formule
$$l = vt$$
Vérifier que
$$\frac{\partial l}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial l} = -1$$

14. Déterminer les primitives de f sur des intervalles inclus dans D_f.
(a) $f(x) = \cos(x)$ (b) $f(x) = \sin(x)$
(c) $f(x) = \sin(ax)$ $(a \neq 0)$ (d) $f(x) = e^x$
(e) $f(x) = e^{ax}$ $(a \neq 0)$ (f) $f(x) = a^x$ $(a \neq 1)$
(g) $f(x) = x^r$ $(r \neq -1)$

15. Montrer que la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{Log}(2x) & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \mathrm{Log}(-3x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est une primitive de $1/x$ sur $\mathbf{R}^*$. La fonction $\mathrm{Log}|x|$ en est une autre; a-t-on $f(x)-\mathrm{Log}|x|$ constant sur $\mathbf{R}^*$? Pourquoi?

16. Déterminer les primitives des fonctions suivantes (sur un intervalle inclus dans D_f).

(a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(b) $f(x) = x^2e^{x^3}$

(c) $f(x) = \sin(x)(\cos(x))^3$

(d) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$

(e) $f(x) = (x^2+1)/(x^3+3x+1)^2$

17. Déterminer les primitives des fonctions suivantes (sur des intervalles inclus dans D_f).

(a) $f(x) = 1/x$

(b) $f(x) = \mathrm{Log}(x)$

(c) $f(x) = 1/(x\mathrm{Log}(x))$

18#. (a) Montrer que $I_n = \int_0^1 \sin(nt)dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(b) Plus généralement, soit f(x) une fonction continue, périodique de période $T > 0$ et telle que

$$\int_0^T f(t)dt = 0.$$

Montrer que $J_n = \int_0^1 f(nt)dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

19#. (Preuve de la Prop.1.11). Soient u(t) une fonction dérivable et de dérivée continue sur un intervalle $[\alpha,\beta]$ et f(u) une fonction continue sur l'intervalle image $I = \varphi([\alpha,\beta])$. Soit F(u) une primitive de f sur I. Montrer que, pour tout $x \in [\alpha,\beta]$, les deux intégrales

$$\int_{u(\alpha)}^{u(x)} f(u)du \qquad \text{et} \qquad \int_\alpha^x f(u(t))u'(t)dt$$

valent

$$F(u(x))-F(u(\alpha))$$

20. Déterminer les primitives des fonctions suivantes (sur un intervalle inclus dans D_f).

(a) $f(x) = xe^x$

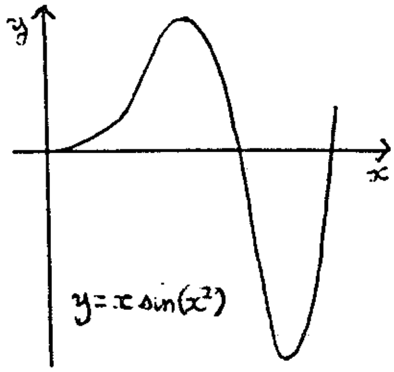
(b) $f(x) = x^2\cos(x)$

(c) $f(x) = \mathrm{Arctg}(x)$

21. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)dx$$

Expliquer ensuite ce que représente l'intégrale I sur la figure ci-dessous.



22. Représenter le graphe de la fonction $x\sin(x)$. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\pi x\sin(x)dx$$

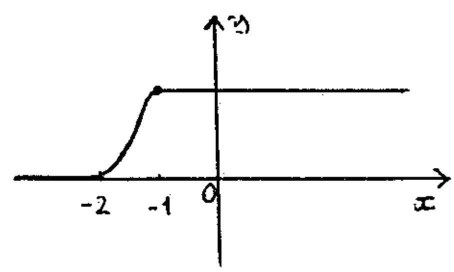
et indiquer sur son graphe ce que représente l'intégrale I.

23. Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \exp(1/(x-a)(x-b)) & \text{si } a<x<b \\ f(x) = 0 & \text{si } x\le a \text{ ou } x\ge b \end{cases}$$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.

(b) On prend $a = -2$ et $b = -1$. Soit F(x) la primitive de f qui s'annule en a. Montrer que le graphe de F a la forme ci-dessous.



(c) Tracer le graphe de la fonction G définie par $G(x) = F(-|x|)$. (La fonction G est appelée fonction "plateau"; son intérêt est qu'elle est infiniment dérivable).

24#. Soit α un nombre réel > 0.

(a) Montrer que pour tout entier $n \ge 2$, on a

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \le \frac{1}{n^\alpha} \le \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha}$$

(b) En déduire que pour tout entier $N \geq 2$, on a
$$\int_2^{N+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^{N} \frac{dx}{x^\alpha}$$
(c) Calculer les termes de droite et de gauche et conclure que la série de terme général $1/n^\alpha$ est convergente si $\alpha > 1$ et divergente si $0 < \alpha \leq 1$.

25#. (Intégrales de Wallis). On pose, pour $n \geq 0$
$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n dt$$
(a) Montrer que $0 < I_n \leq \pi/2$ pour tout $n \geq 0$.
(b) Montrer que la suite $(I_n)_{n>0}$ est décroissante et minorée. Que peut-on en conclure?
(c) Soit $\varepsilon > 0$. En découpant l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$ en $[0,\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}]$ et $[\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\pi}{2}]$, montrer qu'on a l'inégalité:
$$0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}(\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}))^n + \frac{\varepsilon}{2}$$
En déduire que la suite $(I_n)_{n>0}$ tend vers 0.
(d) Montrer, grâce à une intégration par parties que pour tout $n \geq 2$, on a
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$
(e) En déduire les formules, pour $p \geq 0$
$$\begin{cases} I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2} \\ I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$
(f) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_{n+1}/I_n = 1$.
(Indic.: remarquer que $I_{n+1} \leq I_n$).
(g) En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4p+1}(p!)^4}{(2p+1)((2p)!)^2} = \pi$$

25.1#. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose
$$I_n = \int_1^e (\mathrm{Log}(t))^n\, dt.$$
(a) Montrer que $0 < I_n \leq e-1$ pour tout $n \geq 0$.
(b) Montrer que la suite $(I_n)_{n>0}$ est décroissante et minorée. Que peut-on en conclure?
(c) Soit $\varepsilon > 0$. En découpant l'intervalle $[1,e]$ en $[1,e-\frac{\varepsilon}{2}]$ et $[e-\frac{\varepsilon}{2},e]$, montrer qu'on a l'inégalité:
$$0 \leq I_n \leq (e-1)(\mathrm{Log}(e-\frac{\varepsilon}{2}))^n + \frac{\varepsilon}{2}$$
En déduire que la suite $(I_n)_{n>0}$ tend vers 0.
(d) En faisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n > 0$, on a
$$I_{n+1} = e-(n+1)I_n$$
En déduire l'inégalité
$$\frac{e}{n+2} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$
et un équivalent simple de I_n.

26. Déterminer une valeur approchée des nombres suivants.
(a) $\omega = 1,9987 \times 3,0008$
(b) $\omega = e^{0.1}\mathrm{Log}(0.9)$.
(c) $\omega = (16,1)^{1/4}(3,9)^{1/2}$.
(d) $\omega = \sqrt[4]{(1,9)^3+(2,1)^3}$

27. Déterminer une valeur approchée des nombres suivants.
(a) $A = (2,01)(0,98)^2$.
(b) $A = \dfrac{e^{0,2}}{0,9}$
(c) $A = \dfrac{1}{\sqrt{(2,9985)^2+(4,0003)^2}}$

28. Approximer la valeur de f au point indiqué.
(a) $f(x,y) = \mathrm{tg}(xy)$; $(0.99\pi,0.24)$
(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $(3.01,4.02,11.98)$
(c) $f(x,y) = \sin(\pi xy)$; $(1.97,2.05)$.

29. Déterminer une valeur approchée de la longueur de l'hypoténuse h d'un triangle rectangle dont les côtés perpendiculaires sont de longueur 5,13 cm et 11,87 cm.

30. Déterminer une valeur approchée du volume V d'une boîte rectangulaire dont la base est un carré de côté 3,95 m et la hauteur mesure 3,05 m.

31. Déterminer une valeur approchée de la surface V d'une boîte rectangulaire ayant pour dimensions 3,019, 3,979 et 11,973.

32. Un automobiliste veut parcourir 150 kms en 2 h.. Il couvre les 75 premiers kms en 1h 1mn. De combien doit-il augmenter sa moyenne dans la seconde moitié du parcours pour atteindre son objectif?

33. Calculer la différentielle des fonctions suivantes.
(a) $z = 2x^3+xy^2$ en fonction de dx et dy
(b) $z = \sin(x) + \cos(xy)$ en fonction de dx et dy
(c) $z = \dfrac{u}{v} - \dfrac{w}{u}$ en fonction de du, dv et dw

34. Calculer la différentielle des fonctions suivantes.

(a) $z = x/y^2$ en fonction de dx et dy
(b) $z = 2^{p-q}$ en fonction de dp et dq
(c) $z = \dfrac{st}{r^2+rs}$ en fonction de dr,ds et dt.

35. Calculer dz/dt dans les cas suivants
(a) $z = x^2+\dfrac{y}{x}$ avec $x = e^t+t$ et $y = \sin(t^2)$
(b) $z = x^3+(y^2/x)$ avec $x = e^{5t}$ et $y = \sin^2(t)$

36. Soit $z = ue^v$ avec $u = r^2+s$ et $v = s-r$.
Donner l'expression de la différentielle dz en fonction de du et dv, puis en fonction de dr et ds. En déduire les dérivées partielles $\partial z/\partial r$ et $\partial z/\partial s$.

37. Soit $z = \sin(u^2v)$ avec $u = rs$ et $v = r+s$.
Donner l'expression de la différentielle dz en fonction de du et dv, puis en fonction de dr et ds. En déduire les dérivées partielles $\partial z/\partial r$ et $\partial z/\partial s$.

38. Soit $z = (\sin u)v^{1/4}$ avec $u = \mathrm{Log}(v)$
Exprimer dz en fonction de du et dv, puis en fonction de dv seulement. En déduire la dérivée de la fonction
$$g(v) = [\sin(\mathrm{Log} v)]\, v^{1/4}$$

39. Soit $z = \cos(uv)$, avec $u = se^t$ et $v = te^s$.
Exprimer dz en fonction de du et dv, puis en fonction de ds et dt. En déduire les dérivées partielles $\partial z/\partial s$ et $\partial z/\partial t$.

40. Soit x, y, u et t quatre variables liées par
$$u = \mathrm{Log}(1+x+y),\ x = 2t-4\ ,\ y = 2-t$$
(a) Calculer du/dt
(b) Donner une valeur approchée des accroissements de x, y, et u si t varie de 2 à 1,99.

41. Soit x, y, u et t quatre variables liées par
$$u = \sqrt{xy},\ x = 2t+1\ ,\ y = 3t+2$$
(a) Calculer du/dt
(b) Donner une valeur approchée des accroissements de x, y, et u si t varie de 2 à 1,99.

42#. Soit $z = f(x-y)$. Montrer que
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial y}$$

43#. Soit $w = f(x-y,y-z,z-x)$. Montrer que
$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

44. Une automobile roule à 20 km/h sur une route qui croise perpendiculairement une voie ferrée. Si un train s'approche de l'intersection à 100 km/h, à quelle vitesse la distance entre l'automobile et le train diminue-t-elle quand l'automobile se trouve à 0,5 km de l'intersection et le train à 1,2 km?

45. Trouver dy/dx pour y(x) solution des équations suivantes.
(a) $y^3+ye^x+x = 0$
(b) $x^3+4x^2y-3xy^2+2y^3+5 = 0$
(c) $e^{x/y} + \mathrm{Log}(y/x) + 15 = 0$

46. Trouver dy/dx pour y(x) solution de l'équation
$$ye^x + e^y\sin(x) = 0.$$
Calculer y(0), puis déterminer un équivalent de y(x) au voisinage de 0.

47. Trouver dy/dx pour y(x) solution de l'équation
$$y\cos(x) + xe^y = 0.$$
Calculer y(0), puis déterminer un équivalent de y(x) au voisinage de 0.

48. Exprimer $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$ en fonction de x,y et z pour z = z(x,y) solution des équations suivantes.
(a) $x - yz + z\cos(y) = 0$.
(b) $x^2z^2 - 2xyz + z^3y^2 = 2$
(c) $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{x+y+z} = \dfrac{1}{2}$

49. Exprimer $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$ en fonction de x,y et z pour z = z(x,y) solution des équations suivantes.
(a) $z^3 + z + x - 2y = 0$
(b) $z^3 + ze^y + x + 2y = 0$

50. Déterminer un équivalent des fonctions suivantes au voisinage du point indiqué.
(a) $f(x) = 3^x-x^3$ en $x_0 = 3$
(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3+3x^2-2}}{x-1}$ en $x_0 = 1$

51. Trouver la limite quand t tend vers 0 de
(a) $f(t) = \dfrac{\sin(t)-t}{t}$ (b) $f(t) = \dfrac{\sin(3t)-\sin(t)}{\mathrm{tg}(2t)-\mathrm{tg}(t)}$

52#. (a) Soit f une fonction continue en 0. Montrer que si $f(x) = o(x)$, alors f est dérivable en 0 et $f(0)= f'(0) = 0$.
(b) Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^3\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en 0, que $f(x) = o(x^2)$ mais que f n'est pas 2 fois dérivable en 0.

53. Calculer la dérivée des fonctions suivantes. En déduire l'équation de la tangente à la courbe y = f(x) au point indiqué.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{16+x^2}}$; $m_0(0,0)$

(b) $f(x) = \exp(\dfrac{x^2-1}{x-3})$; $m_0(1,1)$

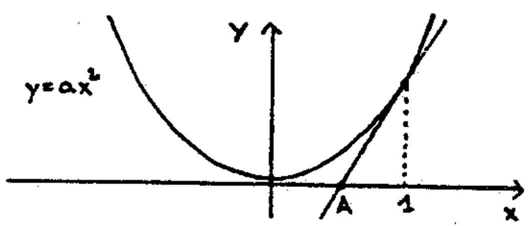
(c) $f(x) = \exp(\dfrac{x-3}{x^2-4})$; $m_0(3,1)$

(d) $f(x) = e^{x^2}\sin(x)$; $m_0(0,0)$

(e) $f(x) = x^{2x}$; $m_0(1,1)$

(f) $f(x) = \sqrt{x^6+3x^3}$; $m_0(1,2)$

54. Déterminer l'abscisse du point A sur la figure ci-dessous.



55. Soit $y(x) = x^\alpha$ ($\alpha \geq 0$). Tracer le graphe de la fonction y pour différentes valeurs de α (inférieures et supérieures à 1). Etudier la variation de la tangente au point (1,1) en fonction de α.

56. Montrer que la droite L d'équation $y = 9x-5$ est tangente au graphe G_f de la fonction f définie par $f(x) = x^3+3x^2$. Déterminer le point de tangence M_1. Existe-t-il un autre point M_2 du graphe G_f où la tangente soit parallèle à L? Vérifier graphiquement ses résultats.

57. Trouver la direction du plan Oxy dans laquelle f augmente le plus rapidement au point donné.

(a) $f(x,y) = \text{Log}(x^2+y^2)$; $m_0(2,0)$

(b) $f(x,y) = \sqrt{e^{xy^2}}$; $m_0(1,2)$.

Dans quelle direction les fonctions ci-dessus décroissent-elles le plus rapidement en m_0?

58. Le masque à oxygène d'un alpiniste fuit. Si la surface de la montagne a pour équation

$$z = 24-x^2-2y^2$$

et si l'alpiniste se trouve au point A(3,2,7), dans quelle direction doit-il aller pour descendre le plus rapidement?

59. Pour f(x,y), c et m_0 donnés ci-dessous, donner l'équation de la courbe I_f^c de niveau c de f et celle de la tangente D à I_f^c au point m_0. Représenter I_f^c et D sur un même graphique.

(a) $f(x,y) = \text{Log}(y-x^2)$; $c = 0$; $m_0(-1,2)$

(b) $f(x,y) = 2xy-3x+y+3$; $c = 6$; $m_0(1,2)$

(c) $f(x,y) = y^2+2-x$; $c = -2$; $m_0(5,1)$

60. Pour f(x,y), c et m_0 donnés ci-dessous, donner l'équation de la courbe I_f^c de niveau c de f et celle de la tangente D à I_f^c au point m_0. Représenter I_f^c et D sur un même graphique.

(a) $f(x,y) = \text{Log}(x-y^2)$; $c = \text{Log } 3$; $m_0(5,\sqrt{2})$

(b) $f(x,y) = 2x^2+3x-y+7$; $c = 4$; $m_0(-1,2)$

(c) $f(x,y) = 2^{xy}$; $c = 4$; $m_0(1,2)$

61. Pour chacune des courbes suivantes, donner un vecteur normal ainsi que l'équation de la tangente au point indiqué.

(a) C: $x^3-3x^2y+y^2 = 5$; $m_0(1,-1)$

(b) C: $e^{x^2y} = 2$; $m_0(1,\text{Log } 2)$

62. Soit f la fonction de 2 variables définie par

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y^2}{2y-x^2}}$$

Déterminer son domaine de définition ainsi que la courbe de niveau 1. Les représenter graphiquement. Enfin déterminer l'équation de la courbe de niveau 2 ainsi que celle de sa tangente au point B(-2,4).

63. Soit Q = Q(K,L) une fonction de production de Cobb-Douglas

$$Q = K^{1/3}L^{2/3}$$

(a) Calculer les productions marginales $\partial Q/\partial K$ et $\partial Q/\partial L$ relatives au capital et au travail.

(b) Montrer que cette fonction est homogène. Vérifier l'identité d'Euler.

(c) Quelle est l'équation de la tangente à la ligne de niveau 45 au point $(K_0,L_0) = (125,27)$.

(d) Donner une valeur approchée de l'accroissement de production induit par un accroissement de 0.1 du travail et du capital au point (K_0,L_0).

64. Soit Q = Q(K,L) une fonction de production de Cobb-Douglas

$$Q = K^{1/4}L^{3/4}$$

(a) Calculer les productions marginales $\partial Q/\partial K$ et $\partial Q/\partial L$ relatives au capital et au travail.
(b) Montrer que cette fonction est homogène. Vérifier l'identité d'Euler.
(c) Quelle est l'équation de la tangente à la ligne de niveau 54 au point $(K_0,L_0) = (16,81)$.
(d) Donner une valeur approchée de l'accroissement de production induit par un accroissement de 0.1 du travail et du capital au point (K_0,L_0).

65. La fonction z(x,y) est définie par

$$z^2 = x^2+2x+y^2-4y \quad ; z \geq 0$$

(a) Calculer les dérivées partielles de z.
(b) Représenter sur un même graphique les courbes I_z^0 et I_z^2 de niveau 0 et 2.
(c) Donner les équations de
- la tangente à I_z^0 en (0,0)
- la tangente à I_z^2 en (2,2)

Reporter ces droites sur le graphique.

66. La fonction z(x,y) est définie par

$$z^2 = y^2+2y-x \quad ; z \geq 0$$

(a) Calculer les dérivées partielles de z.
(b) Représenter sur un même graphique les courbes I_z^0 et I_z^1 de niveau 0 et 1.
(c) Donner les équations de
- la tangente à I_z^0 en (0,0)
- la tangente à I_z^1 en (-1,-2)

Reporter ces droites sur le graphique.

67. Soit $f(x,y) = e^x-(x+2)y$
(a) Calculer le gradient de f.

On suppose dans les questions (b) et (c) que le couple (x,y) varie sur la ligne de niveau 0.
(b) Cette condition définit-elle implicitement y en fonction de x?
(c) Calculer dy/dx de deux façons.
(d) Quelle est l'équation de la tangente à la ligne de niveau -1 au point (0,1)?
(e) Quelle est l'équation du plan tangent au graphe de f au point (0,1,-1)?
(f) Donner une valeur approchée de f(0.01,0.98).

68. Soit $f(x,y) = e^{-x}-(x+1)y$
(a) Calculer le gradient de f.

On suppose dans les questions (b) et (c) que le couple (x,y) varie sur la ligne de niveau 0.
(b) Cette condition définit-elle implicitement y en fonction de x?
(c) Calculer dy/dx de deux façons.
(d) Quelle est l'équation de la tangente à la ligne de niveau -1 au point (0,2)?
(e) Quelle est l'équation du plan tangent au graphe de f au point (0,2,-1)?
(f) Donner une valeur approchée de f(0.01,1.98).

69. Soit C la courbe plane d'équation

$$2x^2-4xy+y^2+2 = 0$$

Déterminer l'équation de la tangente D à C au point (1,2). Trouver le/les points de C où la tangente soit parallèle à D.

70. Soit C la courbe plane d'équation

$$x^2-2xy+3y^2-1 = 0$$

Déterminer l'équation de la tangente D à C au point (-1,0). Trouver le/les points de C où la tangente soit orthogonale à D.

71. Déterminer un vecteur normal ainsi que l'équation du plan tangent au graphe de f au point indiqué.
(a) $f(x,y) = xy-x+y+5$; $M_0(0,2,7)$
(b) $f(x,y) = \sin(\pi xy)$; $M_0(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$

72. Pour chacune des surfaces suivantes, donner un vecteur normal et une équation du plan tangent au point indiqué.
(a) S: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16} = 1$; $m_0(0,0,-4)$
(b) S: $\frac{x^2-y}{x^2+y^2} = z$; $m_0(-1,-1,1)$

73. Soit $f(x,y) = (2+x-y)^2$. Déterminer l'équation du plan P tangent au graphe de f au point (3,-1,36). A partir du point (3,-1), dans quelle direction du plan xoy la fonction f croît-elle le plus rapidement?

74. Soit $f(x,y) = x^3-2y^2$. Déterminer l'équation du plan P tangent au graphe de f au point (1,2,-7). Trouver le/les points du graphe de f où le plan tangent soit parallèle à P.

75. Soit $f(x,y) = x^2-2y^3$. Déterminer l'équation du plan P tangent au graphe de f au point (2,1,2). Trouver le/les points du graphe de f où le plan tangent soit parallèle à P.

76. Soient S la surface d'équation

$$-8x^2+y^2+z^2+4 = 0$$

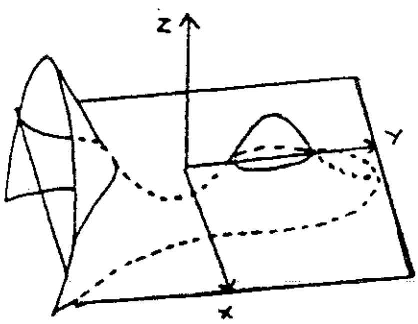
et $f(x,y) = 2x^2$. Montrer que le point P(-1,0,2) est sur S et sur le graphe G_f de f et qu'en ce point, les plans tangents à S et à G_f sont identiques.

77. Montrer que les normales au cône d'équation $z^2 = x^2+y^2$ coupent l'axe Oz.

78. Le graphe G_f de la fonction f définie par

$$f(x,y) = 3y^2-3x^2-6x^2y-y^3-1$$

a l'allure ci-dessous.



(a) Déterminer l'équation du plan P tangent à G_f au point M(1/3,1,0).
(b) On note C la courbe de niveau 0. La représenter grossièrement dans le plan Oxy. Déterminer l'équation de la droite D tangente à C au point m(1/3,1). Comparer à P. Que peut-on conclure?
(c) Tracer le graphe de la cubique

$$y \rightarrow \varphi(y) = y^3-3y^2+1$$

En déduire le nombre de points d'intersection de la courbe C avec l'axe Oy. Monter qu'en ces points, la tangente à C est horizontale. L'équation de C définit-elle implicitement y en fonction de x?

REVISION CH7

1. Qu'appelle-t-on accroissement d'une variable? accroissement relatif d'une variable?

2. A partir de quel indicateur de croissance réel définit-on la dérivée? Quels sont les autres indicateurs de croissance réels d'une fonction? Quels sont les indicateurs instantanés associés?

3. Quelle différence y-a-t-il entre indicateurs réels et instantanés? Quelle est leur utilité respective? Quel avantage possède l'élasticité sur le taux d'accroissement?

4. Quelles fonctions ont
(a) un taux d'accroissement instantané constant?
(b) un taux de croissance instantané constant?
(c) une élasticité constante? nulle? linéaire?

5. Donner un exemple d'une fonction continue mais non dérivable en un point x_0; d'une fonction non continue mais dérivable à droite (resp. à gauche) de x_0.

6. Rappeler la définition des dérivées partielles $(\partial f/\partial x)(x_0,y_0)$ et $(\partial f/\partial x)(x_0,y_0)$ d'une fonction f(x,y) en un point $m_0(x_0,y_0)$. Quelle est leur interprétation géométrique?

7. Rappeler les formules de dérivation d'une fonction composée, d'une fonction inverse.

8. A-t-on

$$(\exp(x^2+1))' = \exp(2x);$$

$$(\sqrt{\mathrm{Log}(x)})' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}\ ?$$

Rappeler les formules donnant les dérivées $(\exp(u))'$ et $(\sqrt{u})'$.

9. Comment montre-t-on, à partir de $(\mathrm{Log}(x))' = 1/x$, que $(e^y)' = e^y$?

10. Pour certaines fonctions (fonctions définies par morceaux, fonctions prolongées, fonctions puissances), les théorèmes généraux sur la dérivation ne s'appliquent pas en tout point. Comment étudie-t-on la dérivabilité de ces fonctions? (Cf. Exemples 9 et 10 du §1)

11. Comment est définie la dérivée n-ième d'une fonction d'une variable? Quelles sont les fonctions dont les dérivées de tout ordre sont égales?

12. A quoi sert le théorème de Schwarz dans la pratique?

13. Quelle est la différence entre primitive et intégrale? Quel est le résultat fondamental liant les deux notions?

14. Dans la formule

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

F désigne <u>une</u> primitive de f. Expliquer pourquoi la formule ne dépend pourtant pas du choix de la primitive.

15. Si m est un point voisin de m_0, qu'appelle-t-on approximation d'ordre 0 de f(m)? d'ordre 1? Comment les calcule t-on? Faire une figure cor-

respondant à ces approximations qui fasse apparaître l'erreur commise.

16. Qu'est-ce que la différentielle d'une fonction en un point?

17. Comment s'appelle la relation liant Δf et df? Quelle est-elle?

18. Refaire le calcul de dz/dt pour $z = z(x,y)$, $x = x(t)$ et $y = y(t)$.

19. Qu'est ce que l'identité d'Euler? A quelles fonctions s'applique-t-elle?

20. Rappeler les trois situations type où on utilise la technique de différentiation implicite.

21. A partir d'un calcul de différentielles, déterminer dy/dx pour y défini implicitement par $F(x,y) = 0$. Plus généralement, calculer les dérivées partielles $(\partial z/\partial x_i)$ d'une fonction $z = z(x_1,\dots,x_n)$ définie implicitement par $F(x_1,\dots,x_n,z) = 0$.

22. Dans quels cas la formule $f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0)$ est-elle valable? Comment peut-on utiliser la dérivée de f pour trouver un équivalent de f au voisinage de x_0 quand elle ne l'est pas?

23. Quels sont les différentes situations où on parle d'espace tangent? Rappeler les diverses constructions géométriques.

24. Rappeler l'équation de la droite tangente à une courbe plane $F(x,y) = 0$. Comment l'équation classique de la tangente à un graphe $y = f(x)$ peut-elle s'en déduire?

25. Rappeler l'équation du plan tangent à une surface $F(x,y,z) = 0$. Comment l'équation du plan tangent à un graphe $z = f(x,y)$ peut-elle s'en déduire?

26. Le gradient de $f(x,y)$ en $m_0(x_0,y_0)$ est-il un vecteur normal au graphe de f en $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$? Sinon, donner la bonne formule pour ce vecteur normal.

27. Soient m_0 et m_1 les points $m_0(x_0,y_0)$ et $m_1(x_1,y_1)$. On considère les points

$$\begin{cases} M_0(x_0,y_0,z_0) \text{ avec } z_0 = f(x_0,y_0) \\ M_1(x_1,y_1,z_1) \text{ avec } z_1 = f(x_1,y_1) \\ M_1'(x_1,y_1,z_1') \text{ avec } z_1' = f(x_0,y_0)+df_{m_0}(\overrightarrow{m_0m_1}) \end{cases}$$

Comparer sur un graphique les positions des points M_1 et M_1'.

EXERCICES CH 8

1#. Montrer que si a et b sont deux racines du polynôme P(x), alors le polynôme P'(x) a une racine comprise entre a et b. Montrer que si P(x) a r racines dans [a,b], alors le polynôme $P^{(k)}(x)$ a au moins r-k racines dans [a,b].

2#. Soient $a_0,a_1,...,a_n$ sont n+1 nombres réels tels que

$$\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+...+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$$

Montrer que l'équation

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$$

a au moins une racine comprise entre 0 et 1.

3. Montrer que si $0<a<b$ et si n est un entier positif, alors

$$na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a).$$

(Indic.: appliquer le théorème des acc. finis).

4#. Soit f une fonction dérivable sur [a,b]. Montrer que
(a) si $f'(x)\geq m$ pour tout $x\in[a,b]$, alors
$$f(b)\geq f(a)+m(b-a)$$
(b) si $f'(x)\leq M$ pour tout $x\in[a,b]$, alors
$$f(b)\leq f(a)+M(b-a)$$

5#. Inégalité des accroissements finis. Soient f et g deux fonctions dérivables sur [a,b]. On suppose que, pour tout $x\in[a,b]$

$$|f'(x)|\leq g'(x)$$

Montrer que

$$|f(b)-f(a)|\leq g(b)-g(a).$$

6#. Montrer que pour tous nombres réels a et b, on a
(a) $|\cos(b)-\cos(a)|\leq|b-a|$
(b) $|\sin(b)-\sin(a)|\leq|b-a|$
(c) $|\mathrm{Arctg}(b)-\mathrm{Arctg}(a)|\leq|b-a|$
(Indic.: utiliser l'exercice 5).

7#. Soit f(x) une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ et telle que, pour un nombre réel k,

$$0\leq f(x)\leq k\int_0^x f(t)dt \quad \text{pour tout } x\geq 0.$$

Montrer que f est la fonction identiquement nulle. (Indic.: poser

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

et montrer que la fonction $e^{-kx}F(x)$ est positive, décroissante et nulle en 0).

7.1#. Soit f(x) une fonction continue sur l'intervalle $[1,+\infty]$. On suppose de plus que

$$0\leq x^2f(x)\leq\int_1^x f(t)dt \quad \text{pour tout } x\geq 1$$

Montrer que f est la fonction nulle sur $[1,+\infty]$. (Indic.: introduire la fonction

$$e^{1/x}\int_1^x f(t)dt$$

et procéder comme pour l'exercice 7).

8#. Soit f(x) une fonction dérivable sur **R** vérifiant

$$\begin{cases} f'(x)f'(f(x))=1 \text{ pour tout } x\in\mathbf{R}\\ f(1)=1\\ f'(0)>0\end{cases}$$

(a) Déduire des deux premières conditions que $f\circ f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbf{R}$.
(b) Montrer ensuite, en utilisant le Th.2.8 du Ch.6 et la troisième condition que f est strictement croissante sur **R**.
(c) Conclure, grâce à l'exercice 54 du Ch.2 que $f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbf{R}$.

9#. (Preuve du Th.2.2 du Ch.7 (pour n = 2)). Soit f(x,y) une fonction. On suppose que les dérivées partielles $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ existent sur un voisinage de $m_0=(x_0,y_0)$ et sont continues au point m_0. On pose

$$\begin{cases}\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\ (\Delta f)_x=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)\\ (\Delta f)_y=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\end{cases}$$

(a) En appliquant le th. des acc. finis, montrer que, pour tout accroissement $\Delta m=(\Delta x,\Delta y)\in\mathbf{R}^2$, il existe deux nombres réels θ et θ' dans]0,1[vérifiant:

$$\begin{cases}(\Delta f)_x=\Delta x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(\Delta x),y_0+\Delta y)\\ (\Delta f)_y=\Delta y\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0+\theta'(\Delta y))\end{cases}$$

(b) Déduire des hypothèses que

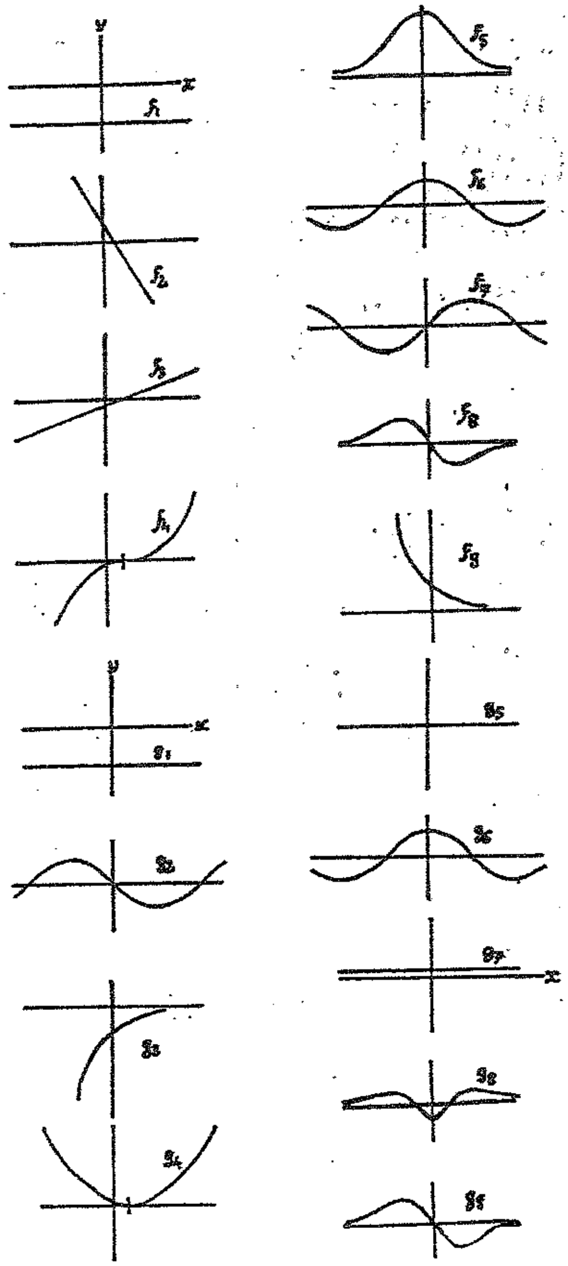
$$\begin{cases}(\Delta f)_x=(\frac{\partial f}{\partial x}(m_0)+o(1))\,\Delta x\\ (\Delta f)_y=(\frac{\partial f}{\partial y}(m_0)+o(1))\,\Delta y\end{cases}$$

où o(1) désigne un terme qui tend vers 0 quand $(\Delta x,\Delta y)$ tend vers (0,0).

(c) En remarquant que $\Delta f=(\Delta f)_x+(\Delta f)_y$, conclure que

$$\Delta f = df_{m_0}(\Delta x,\Delta y) + \|(\Delta x,\Delta y)\|\ o(1)$$

10. Dans la figure ci-dessous, chaque graphe g_i correspond à la dérivée d'une fonction f_i. Mettre chaque fonction en relation avec sa dérivée.



11. Faire un étude complète des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x-3}$

(b) $f(x) = x+e^{-x}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^4-1}{(x-1)^2(x+1)}$

(d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$

(e) $f(x) = e^{|x|}$

(f) $f(x) = \mathrm{Log}(x-\dfrac{1}{x})$

(g) $f(x) = x^{1/x}$

(h) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-1}$

(i) $f(x) = \mathrm{Log}(x+1)-\mathrm{Log}(x)+x$

12. Soit $f(x)$ la fonction définie sur $[0,\pi/2]$ par

$$\begin{cases} f(x) = \sin(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Montrer que f est continue et dérivable sur $[0,\pi/2]$. Calculer $f'(x)$.

(b) Montrer que l'équation $tg(x) = x$ a pour unique solution $x = 0$ dans $[0,\pi/2[$.

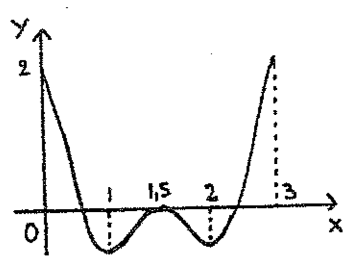
(c) Démontrer que, pour tout $x \in [0,\pi/2]$

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$$

13. Une droite à pente < 0 passe par le point A(1,2) et coupe les axes Ox et Oy en deux points P et Q. Montrer que les valeurs minimales de $d(O,P)+d(O,Q)$ et de $d(O,P)d(O,Q)$ sont respectivement égales à $(1+\sqrt{2})^2$ et 8.

14. Etudier la fonction $f(x) = x-\mathrm{Log}|x|$. Montrer que la solution x_0 de l'équation $f(x) = 0$ se trouve dans l'intervalle $]-1,0[$. En appliquant le théorème des accroissements finis à l'intervalle $[-1,x_0]$, trouver un majorant de $|x_0-(-1)|$ et en déduire que $x_0 < -0,5$.

15. Le graphe de f' est donné ci-dessous.



Donner l'allure du graphe de f, sachant de plus que $f(0) = 0$.

15.1#. Soit $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}$ $(n \geq 0)$. Montrer que le polynôme P_n a une seule racine réelle si n est impair et n'a pas de racine réelle si n est pair. (Indic.: faire une récurrence; noter que $P_n'(x) = P_{n-1}(x)$ $(n \geq 1)$).

16. Déterminer les points stationnaires des fonctions suivantes et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum relatif, d'un minimum relatif ou d'un col.

(a) $f(x,y) = 2x^2-y^2+2xy-6x-6y+3$
(b) $f(x,y) = 3x^2-y^2+2xy-4x-4y+3$
(c) $f(x,y) = 4x^3-3x+y^2-4y-3$
(d) $f(x,y) = 3x^3-x+3y^2+3y-5$
(e) $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$
(f) $f(x,y) = x^3+y^3+3xy$
(g) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$
(h) $f(x,y) = 12x^2-6xy^2+y^3+3y^2$

17. Déterminer les points stationnaires des fonctions suivantes et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum relatif, d'un minimum relatif ou d'un col.

(a) $f(x,y) = -x^2+2y^2+2xy+4x+2y+3$
(b) $f(x,y) = -2x^2+2y^2+2xy+6x+2y+3$
(c) $f(x,y) = 4x^3-3x-y^2+4y+3$
(d) $f(x,y) = 2x^3-3x/2-y^2+10y+2$
(e) $f(x,y) = \exp(x^2-y^2)$
(f) $f(x,y) = 2xy + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$
(g) $f(x,y) = x^4+y^4-2(x-y)^2$

18. (a) Montrer que -1 est la seule racine de l'équation

$$x = \text{Log } |x| + \frac{1}{x}$$

sur $\mathbf{R}^-$.

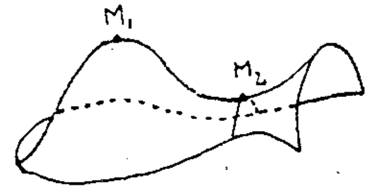
(b) En déduire que -1 est la seule racine de l'équation

$$e^x = -xe^{1/x}$$

sur $\mathbf{R}$.

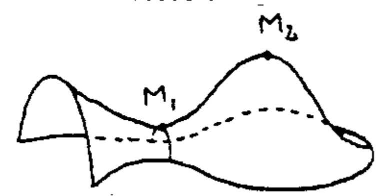
(c) Déterminer les extrema relatifs de la fonction $f(x,y) = xe^y+ye^x$

19. Le graphe de la fonction f définie par:
$f(x,y) = x^3+y^3+6xy$
a l'allure ci-dessous .



Déterminer les coordonnées des points M_1 et M_2.

20. Le graphe de la fonction f définie par:
$f(x,y) = x^3+y^3+3xy^2+6x^2-6y^2$
a l'allure ci-dessous .



Déterminer les coordonnées des points M_1 et M_2.

21. Quels sont les polynômes de degré 4 convexes sur **R**?

22#. Déduire de la convexité de la fonction e^x l'inégalité suivante:

$$x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$$

pour tous $x, y > 0$ et tous $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha+\beta = 1$.

23#. Soit f(x) une fonction convexe définie sur un intervalle I. On suppose f dérivable. Soient a et b dans I tels que $a \leq b$.

(a) Montrer, en utilisant la condition (**) du §2, que pour tous x et y dans $]a,b[$ tels que $x \leq y$, on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(b)}{y-b}$$

(b) En déduire que $f'(a) \leq f'(b)$ et que f' est croissante sur I.

24#. Soient f(x) une fonction convexe définie sur un intervalle I et x_0 un point intérieur à I. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dans I tels que

$$\alpha < \beta < x_0 < \gamma < \delta$$

On pose

$$\begin{cases} A = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \\ B = \dfrac{f(\delta)-f(\gamma)}{\delta-\gamma} \end{cases}$$

(a) Montrer, en utilisant la condition (**) du §2, que, pour tout x dans $]\beta,\gamma[$, on a

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leq \max(|A|,|B|)$$

(b) En déduire que f est continue en tout point x_0 intérieur à I.

25#. Soient f(x) une fonction convexe définie sur un intervalle I et x_0 un point de I. On suppose que $f(x_0)$ est le minimum de f sur le sous-intervalle $]\alpha,\beta[$ de I.
(a) Montrer, en utilisant la condition (**) du §2, que

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq \frac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0} \text{ pour tout } x \geq \beta.$$

et que

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(\alpha)-f(x_0)}{\alpha-x_0} \text{ pour tout } x \leq \alpha.$$

(b) En déduire que $f(x_0)$ est le minimum absolu de f sur I.

26#. Soit f(x) une fonction 2 fois dérivable positive, croissante et convexe sur **R**.
(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ et $f''(x) \geq 0$.
(b) Montrer que ou bien f est constante ou bien f(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. (Indic.: montrer que si il existe x_0 tel que $f'(x_0) = m > 0$, alors $f(x) \geq m(x-x_0) + f(x_0)$ pour tout $x \geq x_0$).
(c) Montrer que f a une limite finie quand x tend vers $-\infty$. (Indic.: utiliser Ch.4 Th.2.4).

27. Etudier la convexité des fonctions suivantes. Puis déterminer leurs extrema relatifs.
(a) $f(x,y) = x^2+y$
(b) $f(x,y) = x^2-4xy+5y^2+y+17$
(c) $f(x,y) = -x^2+4xy-5y^2+4x-8y+9$

28. Etudier la convexité des fonctions suivantes. Puis déterminer leurs extrema relatifs.
(a) $f(x,y) = 2x^2+6xy+5y^2+2x+2y+1$
(b) $f(x,y) = -5x^2+6xy-2y^2+4x-8y+9$
(c) $f(x,y) = x^4+y^4$
(d) $f(x,y) = \text{Log}(y-x^2)$

29. Etudier la convexité de la fonction f définie par

$$f(x,y) = x^4+6x^2y^2+y^4$$

Déterminer les extrema relatifs de f? Le test des dérivées secondes s'applique-t-il au(x) point(s) stationnaire(s) de f?

29.1#. Soit $f(x,y) = 5x^2+5y^2+2xy$. On note G_f le graphe de f. Soit $m_0(x_0,y_0)$ un point du domaine D_f distinct de l'origine O(0,0) et $M_0(x_0,y_0,z_0)$ où $z_0= f(x_0,y_0)$ le point du graphe G_f correspondant.
(a) Déterminer l'équation du plan tangent P_0 du graphe G_f au point $M_0(x_0,y_0,z_0)$.
(b) Montrer que le graphe G_f se situe toujours du même côté de P_0 (on précisera lequel).
(c) Montrer que le point $M'_0(-x_0,-y_0,z_0)$ est aussi sur le graphe G_f. On note P'_0 le plan tangent en M'_0. Montrer que l'intersection des deux plans P_0 et P'_0 est une droite du plan horizontal $z = -z_0$.

30. Etudier les extrema de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 0 dans les cas suivants.

(a) $\begin{cases} f(x,y) = x+y \\ g(x,y) = xy-9 \quad (x>0,\ y>0) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f(x,y) = x^2+4xy+6y^2+12x+12y-67 \\ g(x,y) = 2x+y-1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f(x,y) = x^2+2xy+3y^2+10x+12y-34 \\ g(x,y) = x+y-1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} f(x,y) = 10x^{1/4}+2y^{1/3} \\ g(x,y) = \frac{1}{4}\text{Log}(x)+\frac{1}{3}\text{Log}(y)-3 \end{cases}$

31. Etudier les extrema de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 0 dans les cas suivants.

(a) $\begin{cases} f(x,y) = xy \\ g(x,y) = x^2+y^2-1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f(x,y) = 2x^2+2xy+y^2-6x-2y-3 \\ g(x,y) = x+y-4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f(x,y) = -x^2+2xy+3y^2-4x+2y-3 \\ g(x,y) = 4x+y-3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} f(x,y) = 3x^{1/3}+6y^{1/5} \\ g(x,y) = \frac{1}{3}\text{Log}(x)+\frac{1}{5}\text{Log}(y)-2 \end{cases}$

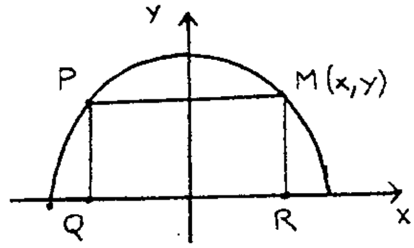
32. Montrer que le produit xy de deux nombres réels de somme donnée est maximal quand ces deux nombres sont égaux.
Applications:
(a) Pour tous x, y > 0, on a:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

(b) Les rectangles d'aire maximale à périmètre donné sont les carrés.

33. Déterminer le(s) point(s) le(s) plus proche(s) de l'origine sur les courbes suivantes. Vérifier géométriquement.
(a) C: $4x^2+9y^2 = 36$
(b) C: $y+x^2-1 = 0$
(c) C: $y^2-3x^2 = 1$
(d) C: $x^2+y^2-2xy+2x+2y = 3$

34. On note s(x,y) la surface du rectangle MPQR ci-dessous, (x,y) désignant les coordonnées du point M. Quelle est la valeur maximale de s(x,y) quand M décrit le demi-cercle centré à l'origine et de rayon 1?



35. Déterminer le maximum de la quantité sin(x)sin(y) quand x et y désignent les angles aigus d'un triangle rectangle.

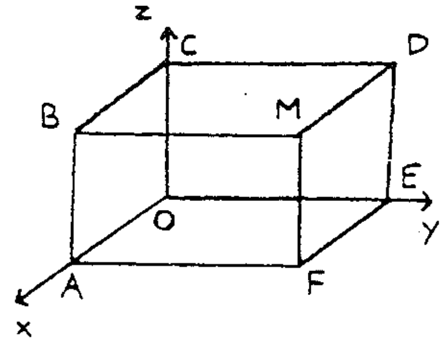
35.1#. Soit $f(x,y) = 5x^2+5y^2+2xy$. On note l_c la courbe de niveau c.
(a) Montrer que la courbe l_c est une conique symétrique par rapport à l'origine.
(b) Montrer que les points de la courbe l_c les plus proches ainsi que ceux les plus éloignés de l'origine sont sur l'une des deux droites D_1, D_2 d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$.
(c) On considère la rotation r_θ d'angle $\theta = -\pi/4$. Déterminer l'équation de la courbe $(l_c)'$, déduite de l_c par la rotation r_θ. En déduire la nature de la courbe l_c. Donner l'allure des courbes l_c et $(l_c)'$.

36. (a) Soit $a > 0$. Montrer que le produit xyz de trois nombres réels > 0 de somme $x+y+z = a$ est maximal quand $x = y = z$.
(b) En déduire que pour tous x, y, z > 0, on a
$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

37. Déterminer le(s) point(s) le(s) plus proche(s) de l'origine sur les surfaces suivantes.
(a) S: $z^2-x^2-y^2 = 1$
(b) S: $x+y^2+z^2 = 9$

38. Etudier les extrema de f(x,y,z) sous la contrainte g(x,y,z) = 0 dans les cas suivants.
(a) $\begin{cases} f(x,y,z) = xy+yz+zx \\ g(x,y,z) = x+y+z-5 \end{cases}$
(b) $\begin{cases} f(x,y,z) = xy+yz+zx \\ g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3 \end{cases}$

39. Déterminer le volume maximal du parallélépipède (OABCDEFM) ci-dessous quand le point M décrit le plan d'équation
$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$$



40. Soit C la courbe d'équation $y^2 = x^3+x^2$. (a) Montrer qu'en tout point de C distinct de O(0,0), l'équation de C définit localement soit y en fonction de x, soit x en fonction de y.
(b) Tracer le graphe de la fonction
$$f(x) = \sqrt{x^3+x^2}$$
puis la courbe C.
(c) Montrer qu'au point O(0,0), l'équation de C, $y^2 = x^3+x^2$, ne définit y en fonction de x ou x en fonction de y sur aucun voisinage de O.

41#. (Seconde preuve de la Prop.4.2). On se donne une courbe C d'équation $F(x,y) = 0$ et $m_0(x_0,y_0)$ un point de C (avec F de dérivées partielles continues en m_0). On suppose que m_0 n'est pas un point d'accumulation de C.
(a) Montrer qu'il existe une boule $B(m_0,r)$ du plan $\mathbb{R}^2$ sur laquelle F ne prend la valeur 0 qu'au centre m_0.
(b) Montrer que la fonction F garde un signe constant sur $B(m_0,r)$. (Indic.: s'inspirer de l'exercice 27 du Ch.6).
(c) Conclure, en invoquant le Th.1.6 que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(m_0)$ doit alors être nul (contrairement aux hypothèses de la Prop.4.2).

42#. Soient f(x) une fonction dérivable de dérivée continue sur un intervalle S et x_0 un point de S. On suppose $f'(x_0) \neq 0$. En appliquant le théorème des fonctions implicites à la fonction
$$F(x,y) = f(x)-y,$$
montrer qu'il existe un sous intervalle I de S où la fonction f est injective et admet une réciproque dérivable. (On appelle théorème d'inversion locale ce résultat et ses généralisations).

43#. (a) Montrer qu'une fonction f(x) à la fois convexe et concave sur un intervalle [a,b] est une fonction affine (i.e., de la forme $f(x) = ax+b$). (Indic.: utiliser §2.2).
(b) Montrer qu'une fonction f(x) à la fois convexe et concave sur un intervalle I est une fonction af-

fine. (<u>Indic</u>.: fixer a et b distincts dans I et montrer en utilisant (a) que le graphe de f est la droite passant par A(a,f(a)) et B(b,f(b)).

44#. On donne quatre fonctions f(x,y), g(x,y), $x(\varepsilon)$ et $y(\varepsilon)$ ayant la propriété suivante: pour tout ε dans un intervalle **I**, le point $m_\varepsilon(x(\varepsilon),y(\varepsilon))$ est un point stationnaire de f(x,y) sous contrainte $g(x,y) = \varepsilon$. On suppose que pour tout $\varepsilon \in$ I, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\ g(m_\varepsilon)$ est non nul.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon \in$ I, il existe un unique $\lambda(\varepsilon) \in$ **R** tel que

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f(m_\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\ \overrightarrow{\text{grad}}\ g(m_\varepsilon)$$

(b) Montrer que, (sous des hypothèses convenables de dérivabilité), on a

$$\frac{d}{d\varepsilon}(f(x(\varepsilon),y(\varepsilon))) = \lambda(\varepsilon)$$

(<u>Indic</u>.: montrer que

$\frac{d}{d\varepsilon}(f(x(\varepsilon),y(\varepsilon))) = \lambda(\varepsilon)\frac{d}{d\varepsilon}(g(x(\varepsilon),y(\varepsilon)))$).

<u>REVISION CH8</u>

1. Qu'appelle-t-on extremum d'une fonction? valeur extrémale d'une fonction?

2. Que peut-on dire de la dérivée (resp. des dérivées partielles) d'une fonction d'une variable (resp. de plusieurs variables) en un extremum relatif intérieur au domaine? Quelle est la signification géométrique de cette condition?

3. Un point où la dérivée s'annule est-il toujours un extremum relatif? Faire un graphique.

4. Pour une fonction d'une variable, quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) garanti(ssen)t qu'un point où la dérivée s'annule est un extremum?

5. Si f est une fonction d'une variable et x_0 un nombre réel, donner les ordonnées y_f et y_T des points au dessus de $x_0+\Delta x$ sur le graphe de f et sur la tangente au graphe en $m_0(x_0,f(x_0))$. Faire un graphique. Que nous apprend la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 sur y_f-y_T? Comment cela se généralise-t-il dans le cas d'une fonction de 2 variables?

6. Quel est le critère du second ordre qui garantit qu'une fonction f présente un extremum, un col en un point $m_0(x_0,y_0)$? Quel est le trinôme qui a conduit à ce critère?

7. Qu'est-ce que l'épigraphe d'une fonction?

8. Quelle inégalité définit les fonctions concaves?

9. Que peut-on dire des sécantes (resp. des tangentes) au graphe d'une fonction convexe? d'une fonction concave?

10. Quel est le critère sur f' (ou f") pour qu'une fonction d'une variable soit convexe (resp. concave)?

11. Quelle est la condition (du second ordre) qui garantit la convexité (resp. la concavité) d'une fonction de deux variables?

12. Il y a des différences entre le critère de convexité et celui du minimum? Quelles sont-elles?

13. Quels types de problèmes permet de résoudre la méthode de Lagrange?

14. En un point vérifiant les conditions de Lagrange, que peut-on dire de la position de la courbe g(x,y) = 0 par rapport aux lignes de niveau de f? Que dire des gradients de f et de g?

15. Quel est le Lagrangien associé au problème de la maximisation de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 10?

16. La méthode de Lagrange permet-elle de déterminer la nature des points stationnaires du problème?

17. Expliquer graphiquement le théorème des fonctions implicites. Faire le lien avec l'énoncé formel.

EXERCICES CH 9

1. Ecrire dans un même tableau les différentes valeurs prises en 0, 1/10, ..., 9/10, 1 par les fonctions

(a) e^x, $1+x$, $1+x+\frac{1}{2}x^2$, $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$

(b) $\cos(x)$, $1-\frac{1}{2}x^2$, $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$

2. Représenter sur un même graphe les fonctions $1/(1-x)$, $1+x$, $1+x+x^2$, $1+x+x^2+x^3$.

3. Pour chacune des fonctions ci-dessous, chercher un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

(a) $f(x) = \text{Log}(1-x)$ — $n = 4$

(b) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$ — $n = 3$

(c) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ — $n = 3$

(d) $f(x) = \sin(2x)\,(e^{-x} - 1)$ — $n = 3$

(e) $f(x) = \dfrac{\text{Log}(1-x^2)}{1+2x}$ — $n = 3$

(f) $f(x) = \text{Log}(\text{tg}(x)/x)$ — $n = 2$

(g) $f(x) = \text{Log}(2+x^2)$ — $n = 5$

(h) $f(x) = (1-3\sin(x))^{1/x}$ — $n = 2$

(i) $f(x) = x/\sin(x)$ — $n = 4$

(j) $f(x) = (1+\text{tg}(x))^{\sin(x)}$ — $n = 5$

(k) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2(x)}$ — $n = 1$

(l) $f(x) = \text{Arctg}(1/(1+x))$ — $n = 3$

4. Pour chacune des fonctions ci-dessous, chercher un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

(a) $f(x) = x\,\text{Log}(1+x)$ — $n = 5$

(b) $f(x) = \text{Log}(1-x) + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ — $n = 3,4$

(c) $f(x) = e^x\sqrt{1+x}$ — $n = 3$

(d) $f(x) = \text{Log}\left(\dfrac{1-x+x^2}{1+2\sin(x)}\right)$ — $n = 3$

(e) $f(x) = 1/\cos^2(x)$ — $n = 4$

(f) $f(x) = \sqrt{x^2+\cos(x)} + 2\sqrt{1+\text{tg}(x)}$ — $n = 3$

(g) $f(x) = 1/(x^2+3x+2)$ — $n = 3$

(h) $f(x) = (1+x)^x$ — $n = 4$

(i) $f(x) = \dfrac{\sin(3x)\sqrt{1+\text{Log}(1-x+x^2)}}{x}$ — $n = 2$

(j) $f(x) = \exp\left[\dfrac{\sqrt{x^2+\cos(x)} - 1}{x^2}\right]$ — $n = 3$

(k) $f(x) = \left[\dfrac{\text{Log}(1+x)}{\sin(x)}\right]^{1/x}$ — $n = 2$

(l) $f(x) = x^{10}\,\text{Arctg}(x)$ — $n = 12$

5. Pour chacune des fonctions ci-dessous, chercher un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0.

(a) $f(x) = 1+x+x^2$; $x_0 = 3$, $n = 3$

(b) $f(x) = \exp(\sqrt{3+x})$; $x_0 = -2$, $n = 2$

(c) $f(x) = \sin(x)$; $x_0 = \pi/2$, $n = 3$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 2$, $n = 3$

(e) $f(x) = \text{Log}(1+\cos(x))$; $x_0 = \pi/3$, $n = 2$

6. Trouver un équivalent de

(a) $\sin(x)-x$ au voisinage de 0

(b) $\sin(x)-x+\dfrac{x^3}{6}$ au voisinage de 0

(c) $x+x^2-e^x\sin(x)$ au voisinage de 0

(d) $\cos(x) - \dfrac{1}{\text{tg}(x)}$ au voisinage de $\pi/2$

(e) $\sqrt{x^2-3x} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$ au voisinage de ∞

7. Trouver un équivalent de

(a) $\sin(x^3)-(\sin(x))^3$ au voisinage de 0

(b) $e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)$ au voisinage de 0

(c) $f(x) = x^2\text{Log}(1-\frac{1}{x})+x+1$ au vois. de $+\infty$

(d) $\sqrt[4]{x^4+2x} - \sqrt[3]{x^3-1}$ au voisinage de ∞

8. Déterminer les limites des fonctions suivantes au voisinage de 0.

(a) $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$

(b) $f(x) = \text{Log}(\text{Log}(\frac{\text{tg}(x)}{x}))$

(c) $f(x) = \exp\left(e^{x^2} - \dfrac{1}{1-x^2}\right)$

(d) $f(x) = \left(\dfrac{\text{tg}(x)}{x}\right)^{1/x^2}$

9. Déterminer les limites des fonctions suivantes au voisinage de 0.

(a) $f(x) = \text{Log}[(x^3+x^2+1)\sin(x)+x] - 3\text{Log}(x)$

(b) $f(x) = \exp(\dfrac{\text{Arctg}(x)-x}{x^3})$

(c) $f(x) = (1-x^2)^{1/(1+2x)}$

(d) $f(x) = \dfrac{(1+x)^x - (1+\frac{x^2}{2})}{x^2}$

10. (a) Déterminer un équivalent de

$$\text{Log}\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)$$

quand $x \to 0$.

(b) En déduire $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{3^x+5^x}{2}\right)^{1/x}$

11. (a) Déterminer un équivalent ainsi que la limite de

$$f(x) = \frac{xe^x - \mathrm{Log}(1+x)}{(2x-x^2)^2}$$

quand $x \to 0$.

(b) Déterminer un équivalent ainsi que la limite de

$$g(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x^2+\mathrm{Log}(x)}$$

quand $x \to +\infty$, puis quand $x \to 0^+$.

12. Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sin(x/2)} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue et dérivable sur son domaine de définition et calculer $f'(0)$.

13. Etudier la convergence et donner si possible un équivalent simple des suites suivantes.

(a) $u_n = n\mathrm{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1$

(b) $u_n = \sqrt{n^3+n^2} - \sqrt{n^3-n^2}$

(c) $u_n = \sqrt[4]{n^4+2n} - \sqrt[3]{n^3-1}$

(d) $u_n = n(\sqrt[n]{5}-1)$

(e) $u_n = n\mathrm{Log}\left(\frac{n^2+n}{n^2-n}\right)$

14. Etudier la convergence et donner si possible un équivalent simple des suites suivantes.

(a) $u_n = n^3\sin(1/n) - n^2$

(b) $u_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$

(c) $u_n = \sqrt[3]{n^4+n^3} - \sqrt[3]{n^4-n^3}$

(d) $u_n = n(\sqrt[n]{5} - \sqrt[n]{3})$

(e) $u_n = \sqrt{n\sin(1/n)} - 1$

15. Etudier la suite $(u_n)_{n>0}$ de terme général

$$u_n = \left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$$

où a et b sont deux nombres réels > 0.

15.1#. Etudier la convergence de la série de terme u_n.

(a) $u_n = \mathrm{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n}$

(b) $u_n = \sqrt{n\sin(1/n)} - 1$

(c) $u_n = \sqrt[3]{n^4+n^3} - \sqrt[3]{n^4-n^3}$

(d) $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

16. Etudier les branches infinies des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = \dfrac{4x^2+1}{-x+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{1+x-x^2}{2-x+x^3}$

(c) $f(x) = \dfrac{2-x+x^3}{1+x-x^2}$

(d) $f(x) = (x-1)\, e^{1/(x+1)}$

(e) $f(x) = \sqrt[4]{(x^2+1)(x^2+m)}$

(Discuter suivant m).

17#. (Démonstration du Th.2.5). Soit f(x) une fonction dérivable au voisinage de 0. On suppose que la dérivée f'(x) admet le DL_n

$$f'(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + o(x^n).$$

On introduit la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - \left(f(0) + a_0x + a_1x^2 + \ldots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

(a) Calculer $\varphi'(x)$. En déduire que

$$\varphi'(x) = o(x^n)$$

(b) En appliquant le th. des acc. finis (Cf. Ch.8 Th.1.3) à la fonction φ entre les points 0 et x, montrer que

$$\varphi(x) = o(x^{n+1})$$

Conclure.

18#. Soit f une fonction admettant le DL_n

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + o(x^n)$$

Montrer que si f est dérivable au voisinage de 0 et si f' admet un DL_{n-1}, alors

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + o(x^{n-1})$$

(<u>Indic.</u>: Utiliser le Th.2.5).

19#. Soit $f(x) = \cos(x) + x^3\cos(1/x)$

(a) Montrer qu'au voisinage de 0, on a

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

(b) Montrer qu'on peut prolonger f en une fonction dérivable sur **R** mais pas deux fois dérivable en 0. Peut-on appliquer la formule de Taylor-Young à f au voisinage de 0?

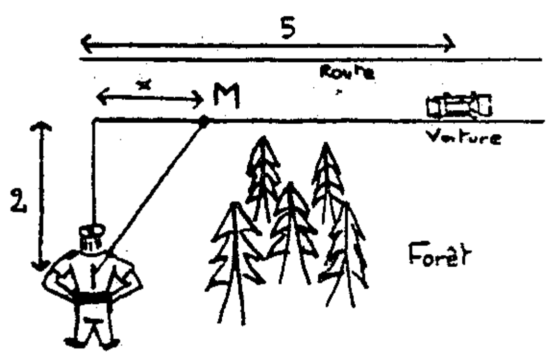
(b) Montrer qu'on n'a pas $f'(x) = -x + o(x)$. Cela met-il en défaut le résultat de l'exercice précédent?

20. Faire un étude complète des fonctions suivantes.

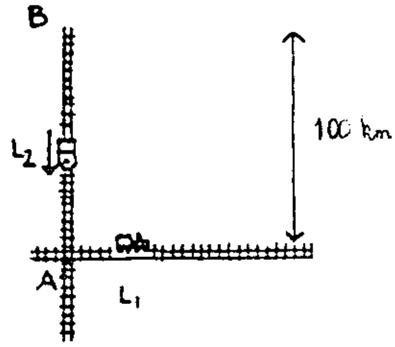
(a) $f(x) = 2x - \sqrt{x^2-9}$

(b) $f(x) = x \exp(1/x)$
(c) $f(x) = |x| \, e^{1/x}$
(d) $f(x) = x \exp(-2/x)$
(e) $f(x) = (2-x)\exp(1/x)$
(f) $f(x) = \sqrt{x^2-3} - 2x$
(g) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4} - \sqrt{x^2-1}$
(h) $f(x) = 3\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-9}$

21. Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \dfrac{5-x}{5}$ pour $x \geq 0$.
(a) Calculer la dérivée $f'(x)$; en déduire les variations de f sur $\mathbf{R}_+$.
(b) Calculer le développement limité de $f(x)/x$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$. Déterminer les asymptotes de f en précisant leur position par rapport au graphe de f.
(c) Représenter le graphe de f.
(d) Un garde-forestier cherche à regagner sa voiture; il est en pleine forêt, à 2 km de la route où il a garé sa voiture, 5km en contrebas (voir fig. ci-dessous). Il marche à 3km/h dans la forêt et à 5km/h sur la route. Exprimer la durée de son parcours en fonction du paramètre x. Vers quel point M doit-il se diriger de façon à minimiser la durée de son parcours?



22. Soit $f(x) = (5x^2-4x+1)^{1/2}$ pour $x \geq 0$.
(a) Calculer la dérivée $f'(x)$; en déduire les variations de f sur $\mathbf{R}_+$.
(b) Calculer le développement limité de $f(x)/x$ d'ordre 2 au voisinage de $+\infty$. Déterminer les asymptotes de f en précisant leur position par rapport au graphe de f.
(c) Représenter le graphe de f. La fonction f est-elle injective? Quel est son ensemble image $f(\mathbf{R}_+)$?
(d) Deux locomotives L_1 et L_2 partent au même instant t = 0 de 2 points A et B situés à 100 km l'un de l'autre. Elles roulent sur des voies perpendiculaires, L_1 à 100 km/h et L_2 à 200 km/h. Quelle est la distance d séparant les 2 locomotives à l'instant t? La locomotive L_2 cherche à prévenir L_1 d'un danger sur sa voie. Les radios à bord des deux locomotives ne portent qu'à 40 km. L_2 parviendra t-elle à joindre L_1?



23#. Montrer, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange, que pour tout $x \geq 0$, on a
(a) $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \sin(x) \leq x$
(b) $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$

24#. Montrer, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange, que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a
$$|e^x - x - 1| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$$

25#. Montrer que pour tout $a \in \mathbf{R}$, la série de terme général $a^n/n!$ $(n \geq 0)$ est convergente de somme égale à e^a. (<u>Indic.</u>: généraliser l'exemple 2 du §4).

26#. Soit $f(x) = \mathrm{Log}(x)$.
(a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$
(b) Montrer que
$$\left|\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) - \mathrm{Log}(2)\right| \leq \frac{1}{n+1}$$
(<u>Indic.</u>: Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 1 et 2 pour $f(x) = \mathrm{Log}(x)$).
(c) En déduire que la série de terme $(-1)^n/n$ est convergente. Quelle est sa somme?

27. Trouver une approximation du nombre réel
$$\delta = \sqrt[4]{626}$$
avec une majoration de l'erreur commise. (<u>Indic.</u>: Noter que $626 = 5^4+1$).

28#. (Démonstration de la formule de Taylor-Lagrange (Th.4.1)). Soit f(x) une fonction n+1 fois dérivable et de dérivée n+1-ème $f^{(n+1)}$ continue sur un intervalle [a,b]. On note A le nombre réel

$$\frac{f(b) - [f(a)+f'(a)(b-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n]}{(b-a)^{n+1}/(n+1)!}$$

et $\varphi(x)$ la fonction définie par

$$\varphi(x) = f(b) - [f(x) + f'(x)(b-x) + \ldots$$
$$\ldots + f^{(n)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!} + \frac{A(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}]$$

(a) Montrer que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.
(b) Montrer que

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}\left[A-f^{(n+1)}(x)\right]$$

(c) Déduire du théorème de Rolle (Cf. Ch.8 Th.1.4) qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$A = f^{(n+1)}(c)$$

(d) Conclure.

28.1# Soit f(t) une fonction 2 fois dérivable sur l'intervalle [-a,+a]. On suppose que, pour tout $t \in [-a,+a]$, on a $|f(t)| \leq A$ et $|f''(t)| \leq B$.
(a) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour f, entre les points t et a d'une part, et entre les points t et -a d'autre part.
(b) Montrer que, pour tout $t \in [-a,+a]$, on a

$$|f(a)-f(-a)-2af'(t)| \leq \frac{B}{2a}\frac{(t-a)^2+(t+a)^2}{2}$$

(c) En déduire que, pour tout $t \in [-a,+a]$, on a

$$|f'(t)| \leq \frac{A}{a} + aB$$

28.2#. Soit f(x) une fonction 2 fois dérivable sur **R**. On suppose que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $f(t) \leq A$ et $|f''(t)| \leq B$.
(a) Montrer que pour tous x, $y \in \mathbf{R}$, on a:

$$(*) \qquad f(x)+yf'(x)+\frac{y^2}{2}B \geq 0$$

(Indic.: Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction entre x et x+y).
(b) En déduire que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a:

$$|f'(t)| \leq \sqrt{2AB}$$

(Indic.: Considérer le terme de gauche de (*) comme un trinôme en y).

29#. (a) Montrer que pour tout $t \in]0,\pi[$, il existe un unique nombre $\theta(t) \in]0,t[$ tel que

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6}\cos(\theta(t))$$

(b) Montrer que $\lim_{t\to 0}\theta(t) = 0$. En déduire

$$\cos(\theta(t)) = 1 - \frac{(\theta(t))^2}{2} + o(t^2)$$

(c) En reportant ce résultat dans (a) et en comparant avec le DL_5 de sinus en 0, montrer que

$$t^3\,\theta(t)^2 = \frac{t^5}{10} + o(t^5)$$

(d) En déduire que $\lim_{t\to 0}\theta(t)/t = 1/\sqrt{10}$.

30#. (a) Soit P(x) un polynôme de degré $\leq n$. Montrer que si $P(x) = o(x^n)$, alors P(x) est le polynôme nul.
(b) En déduire que si une fonction admet un DL_n en 0, alors celui-ci est unique.
(c) Montrer que les développements limités des fonctions paires (resp. impaires) ne comportent que des puissances paires (resp. impaires).
(Indic.: Comparer les DL_n de f(x) et de f(-x) et utiliser (b)).

REVISION CH9

1. Rappeler la définition d'un développement limité au voisinage de 0. Donner deux exemples de problème où on a besoin de développements limités.

2. Rappeler les développements limités usuels.

3. Le développement limité en 0 suivant est-il correct

$$e^{x+1} = 1 + (x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^2 + o(x^2)?$$

Pourquoi? A quelle condition peut-on composer les développements limités?

4. Qu'appelle-t-on développement limité au voisinage de x_0, de ∞? Comment les obtient-on en pratique?

5. Rappeler la procédure qui permet d'étudier les asymptotes obliques d'une fonction (position par rapport au graphe comprise) au moyen de développements limités.

6. Comment obtient-on un équivalent à partir d'un développement limité?

7. Quand une fonction f a pour développement limité en 0

$$f(x) = 0 + o(x^2),$$

peut-on conclure que f(x) est équivalent à 0 en 0? Pourquoi?

8. Rappeler la formule de Taylor-Young. L'écrire dans le cas particulier $x_o = 0$.

9. Quelle différence y a-t-il entre les formules de Taylor-Young et de Taylor-Lagrange?

SOLUTIONS DES EXERCICES

EXERCICES CH1

Dans le plan

3. D_1: $x+y+1 = 0$; D_2: $2x+y+1 = 0$.

4. D_1: $7x+5y+3 = 0$; D_2: $2x+y+5 = 0$.

5. D_1: $y = 2x+9$; D_2: $-3x+2y-9 = 0$.

6. D_2: $x-2y+2 = 0$; $\vec{n_2} = (1,-2)$.

7. $D \,//\, \vec{AC} = (1,-3)$; Δ: $x-3y = 0$; $\Delta \,//\, \vec{v} = (3,1)$.

8. $D_1 \,//\, \vec{AB} = (2,3)$; D_2:$2x+3y-3 = 0$; $D_2 \,//\, (3,-2)$.

9. $\vec{AC} = (3,-3)$; D: $x-y-1 = 0$; $D \,//\, (1,1)$.

10. D: $x-3y+6 = 0$.

11. $\vec{u_1} = (1,1)$; $\vec{u_2} = (1,-m)$; $m = 1$.

12. $\vec{u_1} = (m,1)$; $\vec{u_2} = (1,-2)$; $m = 2$.

13. $D_1 // D_2$; $D_1 \perp D_3$; $D_2 \perp D_3$; $D_1 \cap D_3 = \{ A(0,1) \}$; $D_2 \cap D_3 = \{ B(5/4,-1/4) \}$; $d(A,B) = 5\sqrt{2}/4$.
Soit H la projection orthogonale de P sur D_2. D'après le théorème de Pythagore, on a

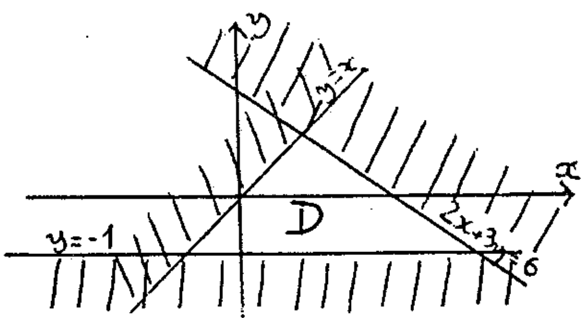
$$d(P,Q) = \sqrt{d(P,H)^2+d(H,Q)^2} \geq d(P,H).$$

Or, comme $\vec{AB} = (5/4,-5/4)$ est orthogonal à D_1 et D_2, on a $d(P,H) = d(A,B) = d$.

14. D_1: $-2x+3y = 6$; D_2: $-2x+3y = 0$; D_3: $y = -3x/2 + 2$

15. L'équation est satisfaite par les deux points A(a,0) et B(0,b) qui sont sur la droite.

16.



17. Méd. issue de A : $y = -x/5 + 2$; Méd. issue de B : $y = 4x-5$; Méd. issue de C : $y = -5x/4 + 15/4$.
Elles se coupent en $\Omega(5/3,5/3)$.

18. D: $-4x+3y = 0$; (AB): $3x+4y-12 = 0$; $D \cap (AB) = \{ (36/25,48/25) \}$.

19. D: $y = 2x-3$; $D \cap (0A) = \{ (3/2,0) \}$.

20. (AC): $y = 2x/3 + 5/3$; (BD): $y = -3x/2 + 11/4$.

21. (AC): $y = 2x/3 - 1/3$; (BD): $y = -3x/2 + 3/4$.

22. $x+\sqrt{3}y-4 = 0$

23. (a) $\cos(\theta) = \sqrt{3}/2$, $\theta = \pi/6$. (b) $\cos(\theta) = \sqrt{2}/2$, $\theta = \pi/4$.

24. Les trois angles valent $\pi/3$.

29. A(0,2) et B(-1,1).

30. $S_m(-m/2,-(m^2+4)/4)$; $m = 0$.

31. $S_m(m/2,(-m^2+4)/4)$; $m = -1$.

32. $y = 2x^2/3 - x/3 + 1$.

33. $y = x^2-3x+1$.

34. C': $y = x^3+x$; S(-1,3).

35. C': $y = x^3-x$; S(1,-2).

37. (a) Translation de vecteur (3/2,-1/4). (b) Symétrie d'axe Ox puis translation de vecteur (1,4).
(c) Symétrie d'axe Ox puis homothétie de rapport 1/5 puis translation de vecteur (-1/5,1/5).

38. (a) droite. (b) hyperbole équilatère. (c) cercle. (d) parabole d'axe vertical. (e) parabole d'axe horizontal. (f) hyperbole équilatère. (g) ellipse. (h) ellipse.

39 Deux droites si $m = 0$ ou $m = 1$; ellipse si $m > 1$; hyperbole si $m < 1$; cercle si $m = 2$; hyperbole équilatère si $m = -3$.

40. C est l'hyperbole équilatère d'équation $xy+ax+ay-a^2 = 0$.

Dans l'espace

41. (a) $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}$; $\begin{cases} x+y = 2 \\ 2x-z = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2 \\ z = 1+2t \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-3z+1 = 0 \\ y = -2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = 6t \\ y = 2+t \\ z = 1+2t \end{cases}$; $\begin{cases} x-6y+12 = 0 \\ x-3z+3 = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = t \\ z = -1+t \end{cases}$; $\begin{cases} x-2y = 3 \\ -y+z+1 = 0 \end{cases}$

42. (a) A(-12,0,-3) ; $\vec{u}$ = (6,1,2) ; (41(c)). (b) A(-1/2,-2,0) ; $\vec{u}$ = (3/2,0,1) ; (41(b)).
(c) A(5,1,0) ; $\vec{u}$ = (2,1,1) ; (41(d)). (d) A(2,0,2) ; $\vec{u}$ = (-1,1,2) ; (41(a)).

43. Droite verticale: $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ Droite parallèle à Ox: $\begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}$ Droite parallèle à Oy: $\begin{cases} x = a \\ z = c \end{cases}$
Plan horizontal: z = c. Plan vertical: ax+by = 0.

44. A et C sont sur le plan horizontal z = 2. A, B et D sont dans le plan vertical y = 1. Par deux points quelconques M et N, il passe toujours au moins un plan vertical. En effet, considérons les projections orthogonales m et n de M et N sur le plan Oxy. Par ces deux points m et n, on peut faire passer une droite D (unique si m ≠ n). Alors le plan vertical contenant D passe par M et N.

45. $\vec{n}$ = (2,-1,3) ; P: 2x-y+3z-13 = 0 ; P ∩ D = { (A(6,2,1) }.

46. $\vec{n}$ = (3,-2,1) ; P: 3x-2y+z+3 = 0 ; P ∩ D = { (A(-2,0,3) }.

47. D: { x = 2-t, y = -1+3t, z = t } ; $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = P_3 \cap D$ = { (A(1,2,1) }.

48. D: { x = -5+4t, y = 8-5t, z = t } ; $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = P_3 \cap D$ = { (A(-1,3,1) }.

49. m = -6 ; d = 16. **50.** m = -3 ; d = -9

51. $\vec{u}$ = (2,-1,1) ; D: { x = -3+2t, y = 2-t, z = 1+t } ; P ∩ D = { (A(1,0,3) }.

52. $\vec{u}$ = (1,-2,1) ; D: { x = -2+t, y = 1-2t, z = 4+t } ; P ∩ D = { (A(-1,-1,5) }.

53. m = -3 ; P: 5x+2y-4z-19 = 0. **54.** m = 4 ; P: 2x-y-z-1 = 0.

55. (a) m = 2 ; D ∩ (AB) = ∅. (b) m = 3 ; D ∩ (AB) = { C(2,0,2) }.

56. L'équation est satisfaite par les trois points A(a,0,0), B(0,b,0) et C(0,0,c) qui sont trois points non alignés du plan.

57. (a) Cylindre vertical de base le cercle centré en A(0,1,0) et de rayon 1. (b) Cône d'axe Oz, de pente $\sqrt{2}$ et de sommet O(0,0,0). (c) Cône d'axe Oy, de pente 1 et de sommet O(0,0,0)

58. S ∩ P est successivement
(a) l'hyperbole { xy = 1, z = 1 }, l'ensemble vide ∅, l'hyperbole { xy = 4, z = 2 }, l'axe Ox, la demi-parabole { $z = \sqrt{x}$, y = 1 }, l'axe Oy, la demi-parabole { $z = \sqrt{y}$, x = 1 }, le demi-cercle {$z = \sqrt{x(1-x)}$, x+y = 1} (noter que $z = \sqrt{x(1-x)} \Longleftrightarrow z^2+x^2-x = 0$ et $z \geq 0$).
(b) l'hyperbole { xz = 1, y = 1}, l'hyperbole { xy = 1, z = 1}.
(c) le cercle { $x^2+y^2 = 3/4$, z = 1/2 }.
(d) le cercle { $x^2+y^2 = 1$, z = 1 }, les deux demi-droites { z = y, y ≥ 0, x = 0} et { z = -y, y ≤ 0, x = 0} (ou encore { z = |y|, x = 0}.
(e) le cercle { $x^2+y^2 = 1$, z = 1 }, la parabole { $z = y^2$, x = 0 }

59. Les produits scalaires $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{v}.\vec{w}$ et $\vec{w}.\vec{u}$ sont nuls.

64. (a) S_1 est un plan orthogonal au vecteur $\vec{a}$. (b) S_2 est la sphère de rayon 1 et de centre le point A tel que $\vec{OA} = \vec{a}$. (c) S_3 est le cylindre circulaire de rayon 1 et d'axe la droite D passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$. (Voir que $(\vec{OM}.\vec{u})\vec{u}$ est la projection sur D du vecteur $\vec{OM}$).

66. Tous les plans d'équation de la forme $\alpha F_1(x,y,z)+\beta F_2(x,y,z) = 0$ (α, β ∈ **R** non simultanément nuls) contiennent D.

67. M(x,y,z) est transformé en M'(-x,-y,-z) par $S_{/O}$, M'(x,-y,-z) par $S_{/Ox}$, M'(-x,y,-z) par $S_{/Oy}$, M'(-x,-y,z) par $S_{/Oz}$, M'(x,y,-z) par $S_{/Oxy}$, M'(-x,y,z) par $S_{/Oyz}$, M'(x,-y,z) par $S_{/Oxz}$.

68. Deux cercles dans le plan (ou deux sphères dans l'espace) sont tangents intérieurement si la distance entre les centres est égale à la différence des rayons en valeur absolue et tangents extérieurement si la distance entre les centres est égale à la somme des rayons.

69. Un plan P est tangent à une sphère S ssi la distance du centre de S au plan P (Cf. Exercice 72(a)) est égal au rayon de la sphère.

71. $\cos(\theta) = \dfrac{\vec{u}.\vec{i}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{i}\|} = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; θ = π/6.

72. A(1,0,0) ∈ P ; D_1: D(A,$\vec{n}$ = (6,3,1)) : éq. par. {x = 1+6t, y = 3t, z = t}, éq. car.{x = 2+6z, y = 3z} ; D_2 = D(A,$\vec{u}$) et D_3 = D(A,$\vec{v}$) où $\vec{u}$ est par exemple le vecteur $\vec{u}$ = (-1,2,0) et $\vec{v} = \vec{n} \wedge \vec{u}$ = (-2,-1,15).

EXERCICES CH2

1. (a) $D_f = \mathbf{R}\backslash\{-1\}$ (b) $D_f = \mathbf{R}\backslash\{-2\}$

2. 2 solutions pour b = 0: 1/3 et 1 et pas de solution pour b = 1.

3. $D_f = D_g = D_{gof} = \mathbf{R}$; $gof(x) = x^2-x-3$.

4. $D_f = \mathbf{R}$; $D_g = [-2,1]$; $D_{gof} = [0,3]$; $gof(x) = \sqrt{3x-x^2}$.

5. $D_f = \mathbf{R}\backslash\{-1\}$; $D_g = \mathbf{R}\backslash\{0\}$; $D_{gof} = \mathbf{R}\backslash\{-1,1\}$; $gof(x) = -2(x+2/(x-1)$; $gof(x) = 2$ ssi $x = -1/2$.

6. $D_f = \mathbf{R}$; $D_g = [-1,2]$; $D_{gof} = [0,3]$; $gof(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3-x}$

7. $D_f = \mathbf{R}$; $D_g =]3,4]$; $D_{gof} =]0,1]$; $gof(x) = \sqrt{1-x} + 1/\sqrt{x}$

8. (a) $Q \in [98,148]$. (b) $Q \in [\sqrt{2},\sqrt{3}]$ $(Q \geq 0)$. (c) $Q \in [100,225]$.

9. $b \neq 0$.

10. (a) rien (b) paire (c) paire, périodique (π) (d) paire, non périodique (e) paire, périodique (π) (f) périodique (2π) (g) paire, périodique (π) (h) impaire, périodique (2π)

11. f est paire ; $f(x) \geq 4$ ssi $x \leq -2$ ou $x \geq 2$.

12. f est impaire ; $-1 \leq f(x) \leq 1$ ssi $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

13. f est paire ; $f(x) = 1$ ssi $x = 1/2$ ou $x = -1/2$.

14. f est impaire ; $-1 \leq f(x) \leq 1$ ssi $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

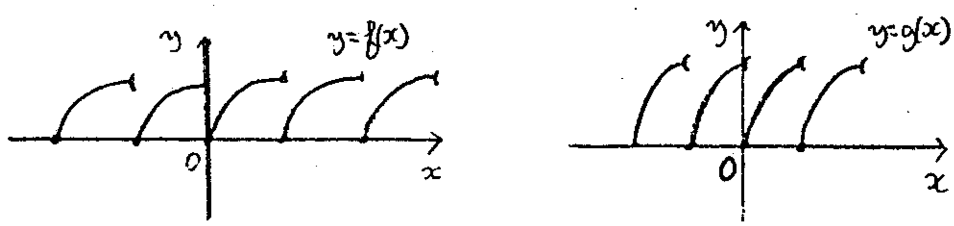
15. La droite $x = -1$ est axe de symétrie.

16. Le point I(1,0) est axe de symétrie.

19. (a) $T = 1/3$; $f(x) = 3x+1$ si $x \in [0,1/3[$. (b) $T = 1/2$; $f(x) = 2x-1$ si $x \in [0,1/2[$.

20. (a) $T_f = 1$; $fog(x) = [2x]-2x$; $T_{fog} = 1/2$ (b) $T_f = 1$; $fog(x) = 3x+[-3x]$; $T_{fog} = 1/3$

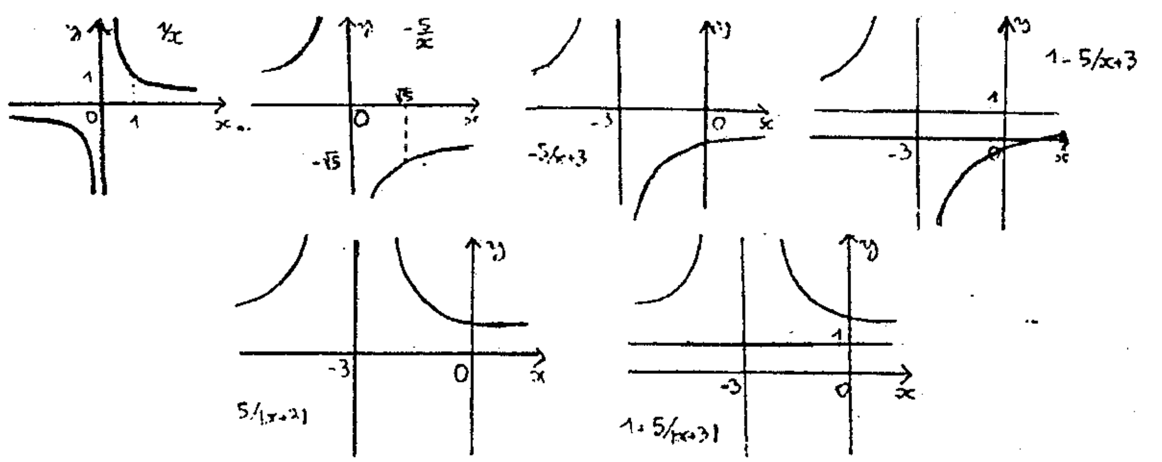
21.



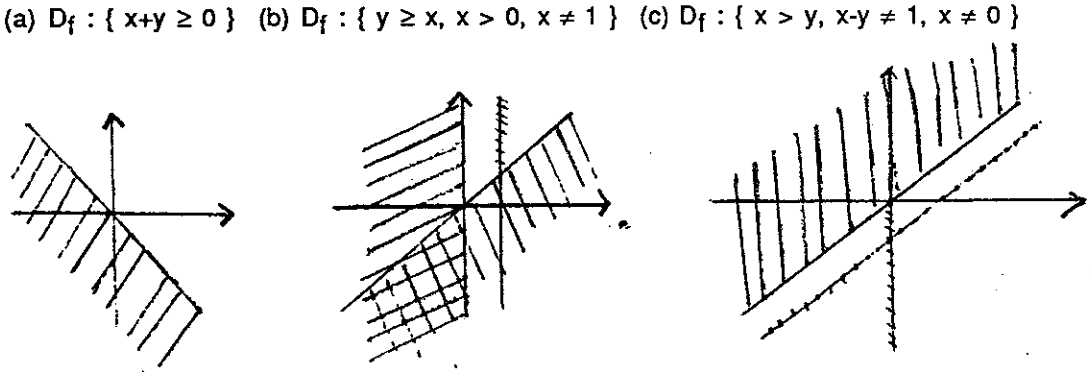
28. Une translation de vecteur $2\vec{i}$.

29. La fonction est paire; l'axe Oy est donc axe de symétrie. Le morceau de parabole à droite de l'axe Oy admet la droite x = 3/2 pour axe de symétrie.

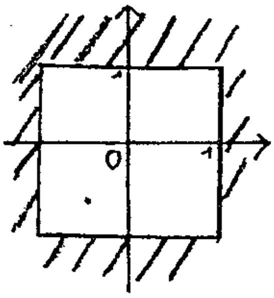
30. $f(x) = 1 - 5/(x+3)$

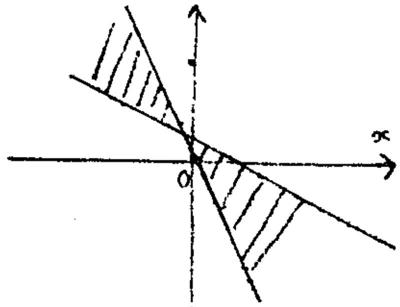


31. (a) D_f : { $x+y \geq 0$ } (b) D_f : { $y \geq x$, $x > 0$, $x \neq 1$ } (c) D_f : { $x > y$, $x-y \neq 1$, $x \neq 0$ }

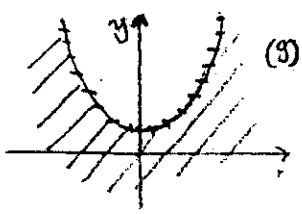


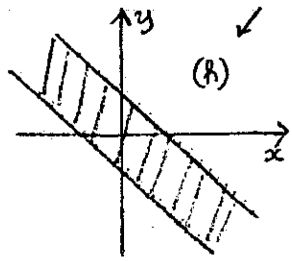
(d) $D_f : \{ -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1 \}$ (e) $D_f : \begin{cases} 2x+3y-2 > 0 \text{ et } 3x+y > 0 \\ \text{ou} \\ 2x+3y-2 < 0 \text{ et } 3x+y < 0 \end{cases}$

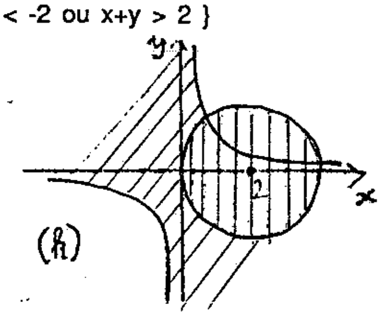




(f) $D_f : \{ x+2y \geq 0 \text{ et } 2x+3y+1 \geq 0 \}$ (g) $D_f : \{ y > x^2+1 \}$ (h) $D_f : \{ x+y < -2 \text{ ou } x+y > 2 \}$

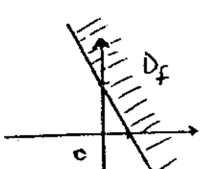




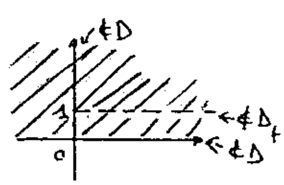


(i) $D_f : \begin{cases} x+y \geq 0 \text{ et } y > 2x^2 \\ \text{ou} \\ x+y \leq 0 \text{ et } y < 2x^2 \end{cases}$ (j) D_f: $\{ x < y^2,\ x \geq y\}$ (k) D_f: $\{ xy \geq 1,\ x^2+y^2-4x > 0\}$

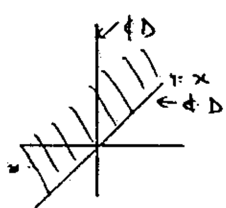
32.



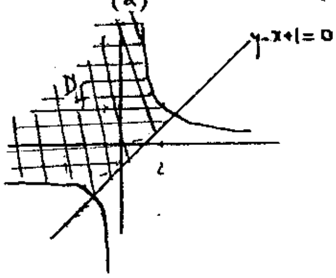
(a)



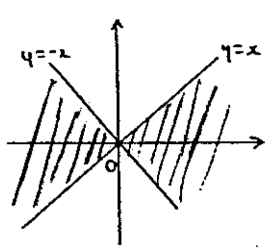
(b)



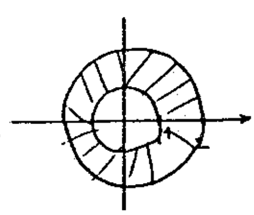
(c)



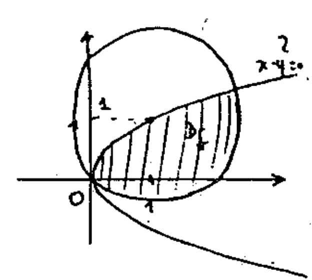
(d)



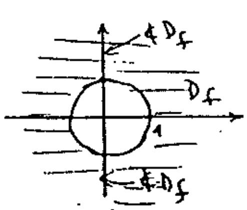
(e)



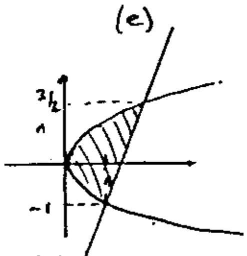
(f)



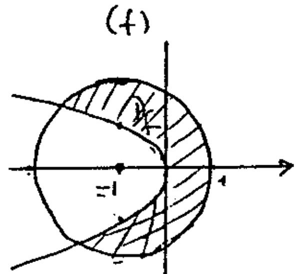
(g)



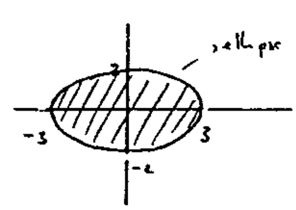
(h)



(i)



(j)



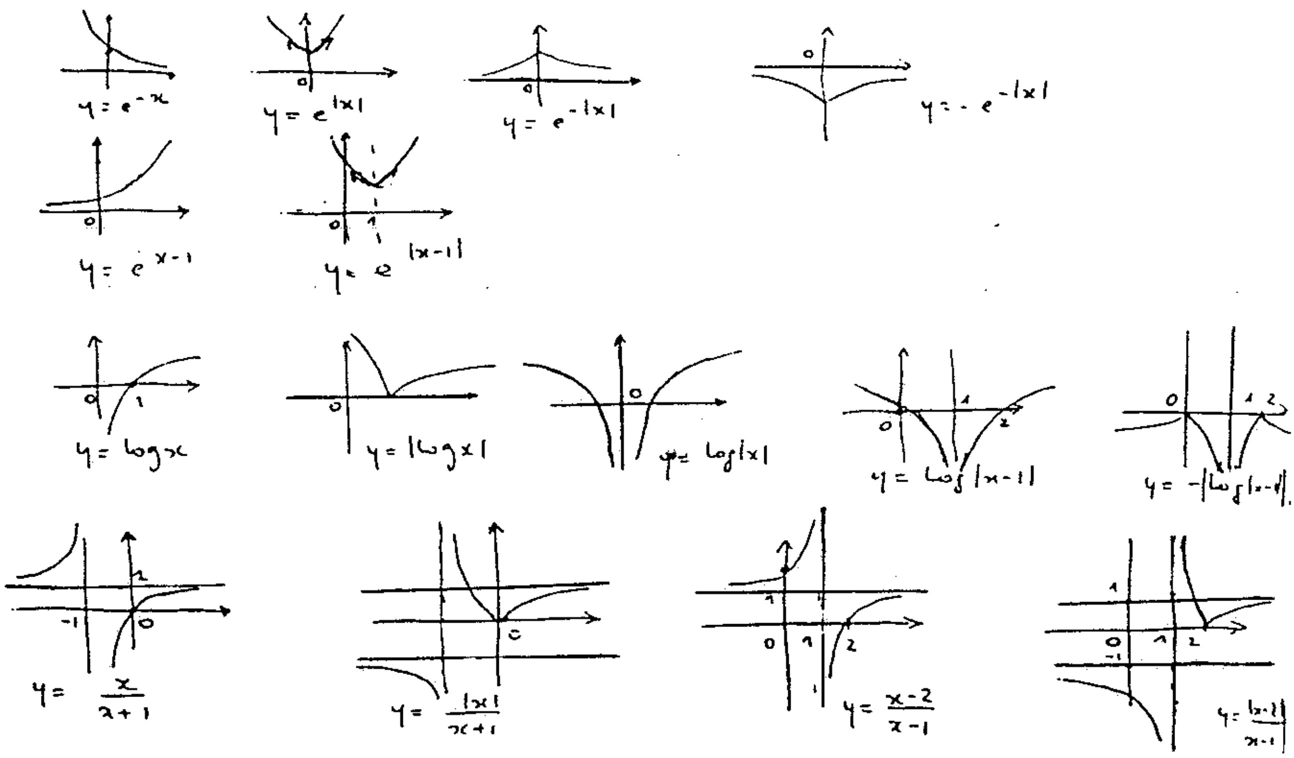
(k)

33. La droite $x = 3$ est axe de symétrie.

34. La droite $x = -1$ est axe de symétrie.

35. (a) 1 (b) α (c) 2 (d) 1

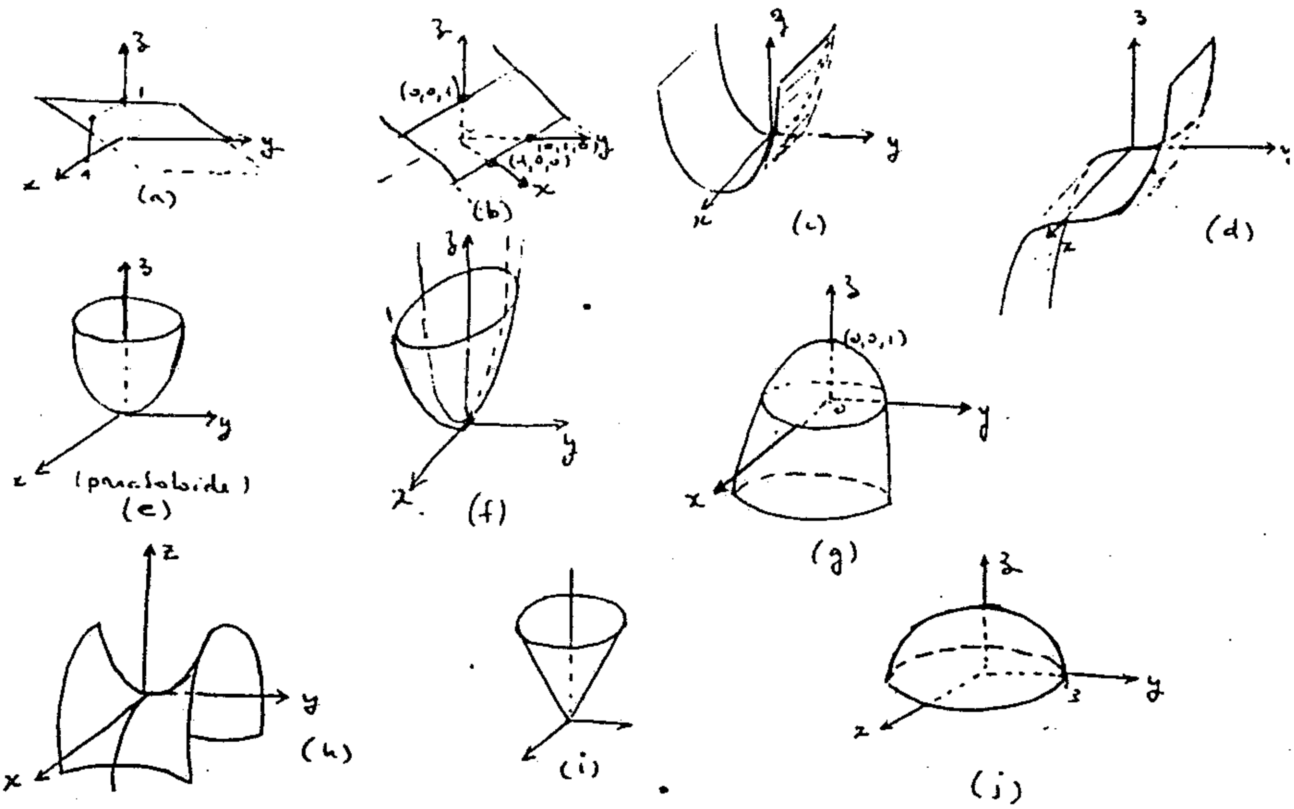
36. $x = 2$ axe de symétrie ; f non injective ; $f(\mathbf{R}) = [-3,+\infty[$.
37. $x = -1$ axe de symétrie ; f non injective ; $f(\mathbf{R}) =]-\infty,2]$.
38. $x = 3/2$ asymptote verticale ; $y = 1/2$ asymptote horizontale ; centre de symétrie $I(3/2,1/2)$
$f^{-1}(x) = (3x-2)/(2x-1)$; $D_{f^{-1}} = f(D_f) = \mathbf{R}\setminus\{1/2\}$.
39. $x = -3/2$ asymptote verticale ; $y = 1/2$ asymptote horizontale ; centre de symétrie $I(-3/2,1/2)$
$f^{-1}(x) = (3x-2)/(-2x+1)$; $D_{f^{-1}} = f(D_f) = \mathbf{R}\setminus\{1/2\}$.
40. $x = -1$ asymptote verticale ; $y = -2$ asymptote horizontale ; centre de symétrie $I(-1,-2)$
$f^{-1}(x) = -(x+3)/(x+2)$; $D_{f^{-1}} = f(D_f) = \mathbf{R}\setminus\{-2\}$.
41.



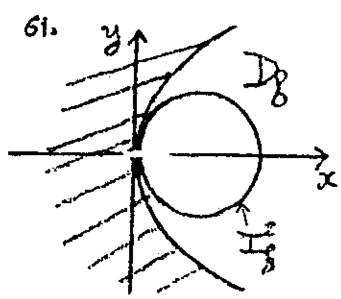
42. $y(x) = (2x^2-6x+4)/(4-x)$; la relation se réécrit $2x^2+(y-6)x+4(1+y) = 0$. Par exemple pour $y = 6$, elle a deux solutions $x = \sqrt{14}$ et $x = -\sqrt{14}$. Elle ne définit donc pas implicitement $x(y)$.
43. (a) $x = x(y)$ et $y = y(x)$ (b) $P = P(Q)$ et $Q = Q(P)$ (c) $Q = Q(P)$ mais $P \neq P(Q)$ (d) Aucune n'est fonction des autres. (e) $u = u(v,w)$, $v = v(u,w)$ mais $w \neq w(u,v)$ (g) $y = y(x)$ mais $x \neq x(y)$ (h) idem.
44. $z = (x-y^2)/(x+y-2)$; D: $\{ x > y^2$ et $x+y > 2\} \cup \{ x < y^2$ et $x+y < 2\}$
45. $y(x) = (x^2+x-2)/(3-x)$; la relation ne définit pas implicitement $x(y)$.
46. f est injective, $f(D_f) = \mathbf{R}\setminus\{-1/2\}$, $f^{-1}(x) = -x/(2x+1) = f(x)$.
47. f est injective, $f(D_f) = \mathbf{R}\setminus\{3\}$, $f^{-1}(x) = (x-2)/(x-3)$.
48. $x(y) = \mathrm{Log}((5y+3)/(y+2))$; f est injective ; $f(D_f) = D_{f^{-1}} =]-\infty,-2[\cup]-3/5,+\infty[$; $f^{-1}(y) = x(y)$.
49. (a) f est injective sur les intervalles $]-\infty,-1]$, $[-1,1]$, $[1,2]$ et $[2,+\infty[$.
(b) Posons $m = f(-1)$. Alors $f(\mathbf{R}) = [m,+\infty[$, $f(\mathbf{R}_+) = [0,+\infty[$, $f(\mathbf{R}^*_-) = [m,0[$, $f([0,1]) = [0,1]$, $f([1,2]) = [0,1]$, $f([-1,2]) = [m,1]$, $f([2,+\infty]) = [0,+\infty[$.
50. (a) $D_f = \mathbf{R}$; f est injective ; $f(D_f) = D_{f^{-1}} =]-3,1[$; $f^{-1}(y) = \mathrm{Log}((y+3)/(1-y))$.
(b) $D_f = \mathbf{R}_+$; f est injective ; $f(D_f) = D_{f^{-1}} =]-1,1[$; $f^{-1}(y) = ((1-y)/(1+y))^2$.
(c) $D_f = [3,+\infty[$; f est injective; $f(D_f) = D_{f^{-1}} = [1,+\infty[$; $f^{-1}(y) = (y-1)^2+3$.
(d) $D_f = \mathbf{R}$; f est injective; $f(D_f) = D_{f^{-1}} = [e^{-2},e^{3/5}[$; $f^{-1}(y) = [(\mathrm{Log}(y)+2)/(-5\mathrm{Log}(y)+3)]^2$.
51. $D_{(f|_I)^{-1}} = f(I) = [-1/4,+\infty[$; $(f|_I)^{-1}(y) = (1-\sqrt{1+4y})/2$; $D_{(f|_J)^{-1}} = f(J) = [-1/4,+\infty[$; $(f|_J)^{-1}(y) = (1+\sqrt{1+4y})/2$; f n'est pas injective car $f(1) = f(0)$.
55. $y(x) = (2x+2)/(2x+1)$; $x(y) = (2-y)/(2y-2)$; Les fonctions x et y sont réciproques l'une de l'autre.
56. $z = (x+y^2)/(y-x-2)$; D: $\{ x > -y^2$ et $y-x > 2\} \cup \{ x < -y^2$ et $y-x < 2\}$

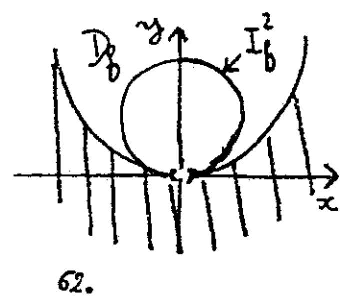
57. Les lignes de niveau sont (a) des droites parallèles (b) des couples de droites parallèles et symétriques par rapport à Ox (c) des droites parallèles à la seconde bissectrice (d) une ellipse (e) le cercle de centre A(1/2,1/2) et de rayon $\sqrt{2}/2$ privé des points O(0,0) et O'(1,1) (f) le cercle de centre O(0,0) et de rayon 2 (g) des hyperboles équilatères.

58.



61. D_f: $\{ x > y^2/2\}$; I_f^2: $\{ x^2+y^2-2x = 0,\ (x,y) \neq (0,0) \} = C(A(1,0),1) \setminus \{ O(0,0) \}$.





62. D_f: $\{ y > x^2/2\}$; I_f^2: $\{ x^2+y^2-2y = 0,\ (x,y) \neq (0,0) \} = C(A(0,1),1) \setminus \{ O(0,0) \}$.

63. $I_f^{\exp(2)}$: $2x^2y-2x-y-2 = 0$ ($x^2y \neq 1$) ; $y(x) = (2x+2)/(2x^2-1)$; $x \neq x(y)$ ($y = -2 \to x = 0$ ou $-1/2$).

64. I_f^8: $2y^2x-x-2y-2 = 0$ ($y^2x \neq 1$) ; $x(y) = (2y+2)/(2y^2-1)$; $y \neq y(x)$ ($x = -2 \to y = 0$ ou $-1/2$).

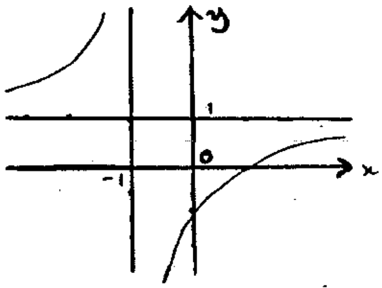
65. D_f: $\{ x < 4y^2 \} \cup Ox\setminus\{O\}$. La ligne de niveau c est d'équation $x = ky^2$ ($y \neq 0$) où $k = (4c^2-1)/c^2$; c'est une parabole sauf si $c = 1/2$ auquel cas c'est l'axe Oy (privé de O), si $c = 0$ auquel cas c'est l'axe Ox (privé de O) et si $c < 0$ auquel cas c'est l'ensemble vide.

EXERCICES CH 3

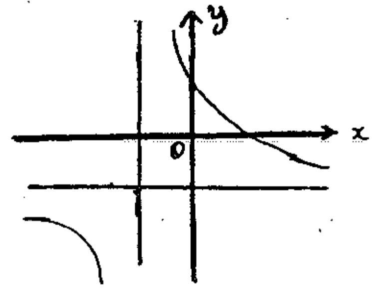
1. I(-2,1) ; type $\boxed{3}$; non injective. **2.** I(2,-1) ; type $\boxed{6}$; non injective.

3. I(1,1) ; type $\boxed{6}$; sommets $A_1((3+\sqrt{3})/3,(9+2\sqrt{3})/9)$, $A_2((3-\sqrt{3})/3,(9-2\sqrt{3})/9$.

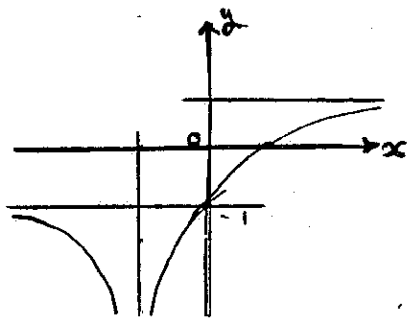
Points d'intersection: 1 point si $k < (9-2\sqrt{3})/6$ ou si $k > (9+2\sqrt{3})/6$, 2 points si $k = (9-2\sqrt{3})/6$ ou si $k = (9+2\sqrt{3})/6$, 3 points si $(9-2\sqrt{3})/6 < k < (9+2\sqrt{3})/6$.
La courbe symétrique par rapport à la première bissectrice n'est pas le graphe d'une fonction.
4. Cubique de type $\boxed{1}$, f injective; donc l'équation définit x(y). Expliciter x(y) revient à résoudre une équation du troisième degré. I(1/3,34/27) est centre de symétrie de G_f; donc I'(34/27,1/3) est centre de symétrie de G_{f}.
5. $I(-1,-1)$ = milieu de M_1 et M_2. G_f: $y+1 = (x+1)^3/64 - 48(x+1)/64$.
7. $C \cap \{ y = x \} = \varnothing$; $C \cap \{ y = x+4 \} = \{ A(-3,1) \}$; $C \cap \{ y = x+5 \} = \{ B(-2,3), C(-5,0) \}$;
$C \cap \{ y = -x-2 \} = \{ B(1,-3), C(-3,1) \}$
8. (a) f injective ; $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}\setminus\{1\}$;
$f^{-1}(x) = (1+x)/(1-x)$



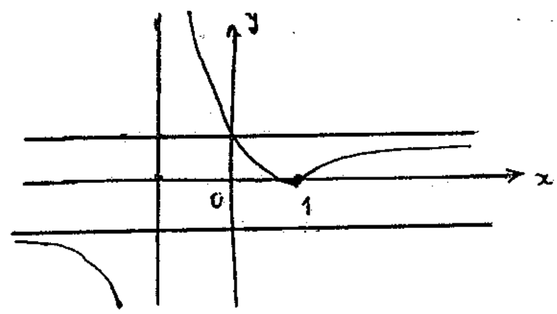
(b) g injective ; $g(\mathbf{R}) = \mathbf{R}\setminus\{-1\}$;
$g^{-1}(x) = (1-x)/(1+x)$



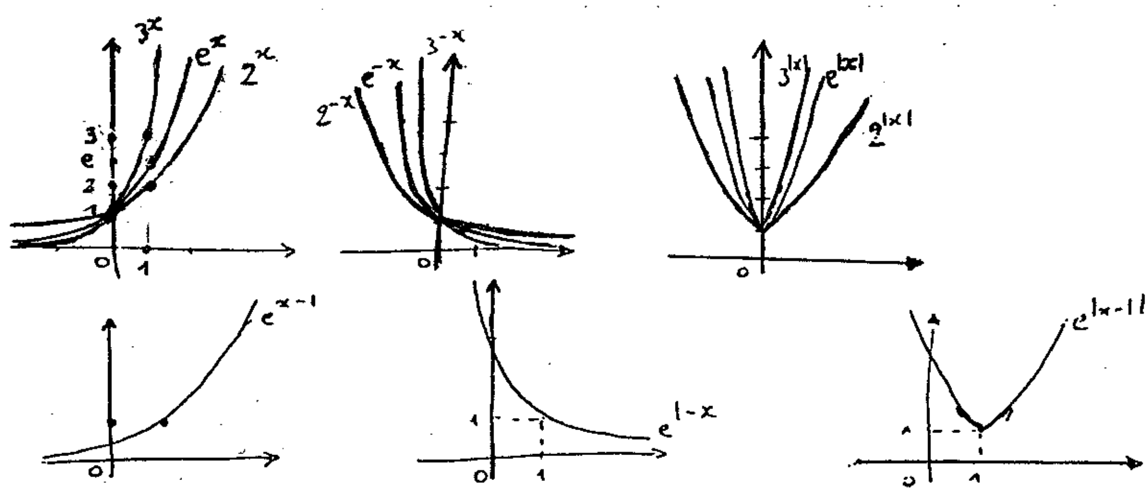
(c) $h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x > -1 \\ g(x) \text{ si } x < -1 \end{cases}$
h non injective ; $h(\mathbf{R}) =]-\infty,1[$



(d) $k(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x > 1 \\ g(x) \text{ si } x < 1 \end{cases}$
k non injective ; $k(\mathbf{R}) =]-\infty,-1[\cup [1,+\infty[$

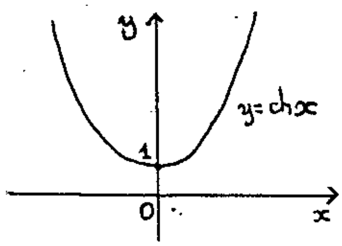


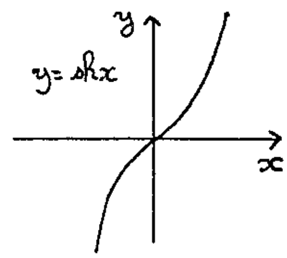
10. $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_+$; $f^{-1}(y) = y^2-1$ $(y \geq 0)$.
12. (a) 1296 (b) $\sqrt[4]{5}$ (c) -3Log(2) (d) 7Log(2)/2 ; 5Log(3)/2 ; 2Log(3) + 3/2
(e) 2Log(2)-2Log(5) + 1/4 ; 3x+5Log(x).
13. (a) 3Log(3) - 3Log(2)/2 (b) 3Log(2) - 3Log(3)/2.
14. (a) 3log(5)-3Log(3)/2 (b) 3Log(3) - 3Log(5)/2 (c) -3Log(3)/2 - 5Log(5)/4 - 1/4.
15. (a) -3Log(2)/2 + 3Log(5) (b) 3Log(2) - 3Log(5)/2 (c) 1/7 + 13Log(2)/7 + 13Log(5)/7.
16.



17. $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} = \dfrac{e^{-2x}\,e^{x}}{e^{-2x}(1+e^{2x})} = \dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}} = f(x)$.

18. Les fonctions ch(x) et sh(x) sont définies sur R, respectivement paire et impaires. On obtient leurs variations en étudiant le signe de leur dérivée. Les formules à établir sont de simples vérifications.





19. (a) $x = 1/2$ (b) $x = \mathrm{Log}(2)/4$ (c) $x = 1$ ou $x = -2$ (d) $x = 0$ ou $x = \mathrm{Log}(3)/\mathrm{Log}(2)$

20. (a) $x = 3/2$ (b) $x = \mathrm{Log}(2)$ (c) $x = 2$ ou $x = 3$ (d) $(x,y) = (2,3)$ ou $(x,y) = (3,2)$

21. $C(6) = 15(1{,}01)^6$; $g = \mathrm{Log}(1{,}01)$; $i_{an} = (1{,}01)^{12}-1$.

22. $C(5) = 15(1{,}12)^5$; $g = \mathrm{Log}(1{,}12)$; $i_m = (1{,}12)^{1/12}-1$.

23. $C(4) = 30(1{,}4)^4$; $g = \mathrm{Log}(1{,}4)$; $i_s = \sqrt{1{,}4}-1$.

24. (a) $r = 1/5$; $A = 625$ (b) $r = 1/3$; $A = 270$

25. $P(t) = 10.2^t$ (resp. $10.(1{,}5)^t$, 10.3^t , 10.3^{-t}) où t est le nombre de jours.

26. Au bout de un mois moins un jour.

27.

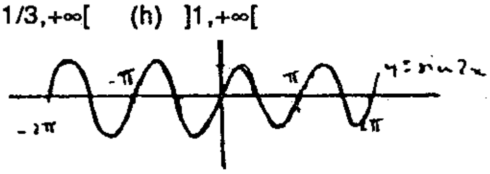
f(x)	ax+b	ax^2	a/x	a/x^2	2^x	$(1+c)^{2x}$
Δf/Δx (Δx = h)	a	2ax+ah	-a/x(x+h)	$-2a/x^2(x+h)$	$2^x(2^h-1)/h$	$(1+c)^{2x}((1+c)^{2h}-1)/h$
Δf/fΔx (Δx = h)	a/(ax+b)	$(2x+h)/x^2$	-1/(x+h)	-2/(x+h)	$(2^h-1)/h$	$((1+c)^{2h}-1)/h$
f'(x)	a	2ax	$-a/x^2$	$-2a/x^3$	$\mathrm{Log}(2)2^x$	$2\mathrm{Log}(1+c)(1+c)^{2x}$
f'(x)/f(x)	a/(ax+b)	2/x	-1/x	-2/x	Log(2)	2Log(1+c)

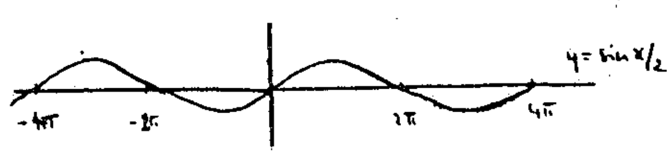
28. (a) $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}[k\pi,(k+\frac{1}{2})\pi]$ (b) $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}]k\pi,(k+\frac{1}{2})\pi[$ (c) $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}]2k\pi,(2k+1)\pi]\backslash\{(2k+\frac{1}{2})\pi\}$

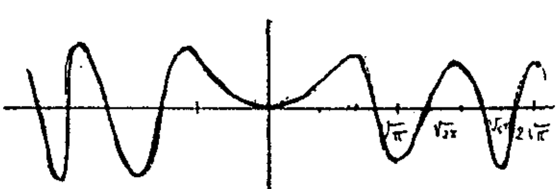
(d) $[0,+\infty[\ \backslash\ \{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbf{N}\}$ (e) $\mathbf{R}\backslash\{\frac{-\pi}{2}+2k\pi,\ k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\}$ (f) $]0,+\infty[\ \backslash\ \{\frac{-\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\}$

(g) $]1/3,+\infty[$ (h) $]1,+\infty[$

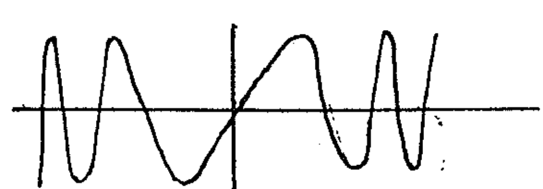
29.



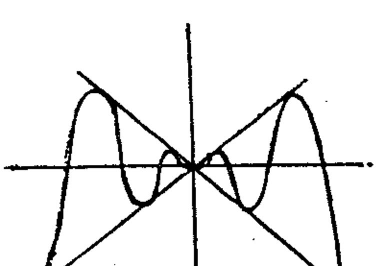




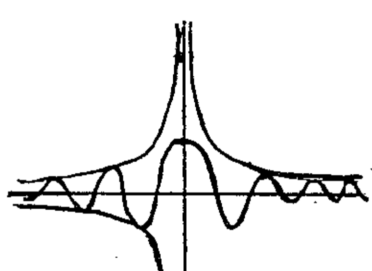
y = sin(x²)



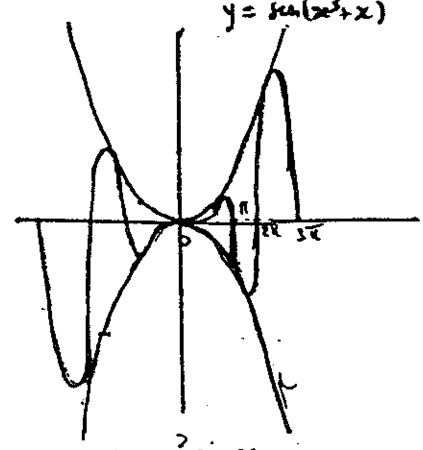
y = sin(x³+x)



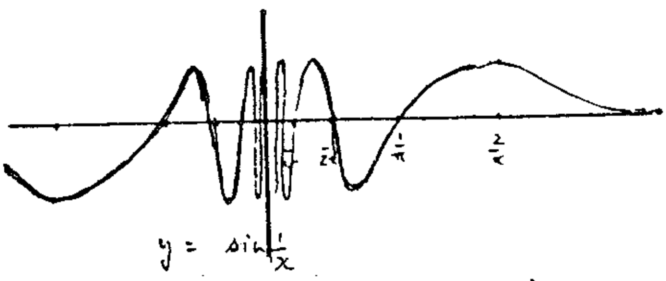
y = x sin x

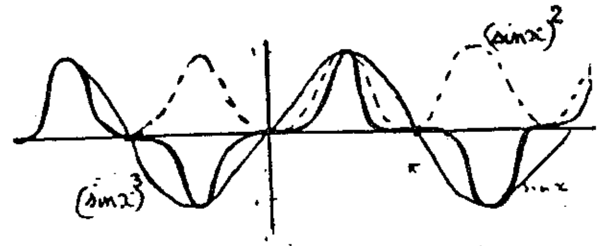


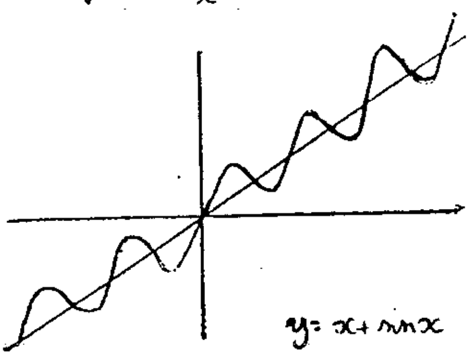
y = sin x / x

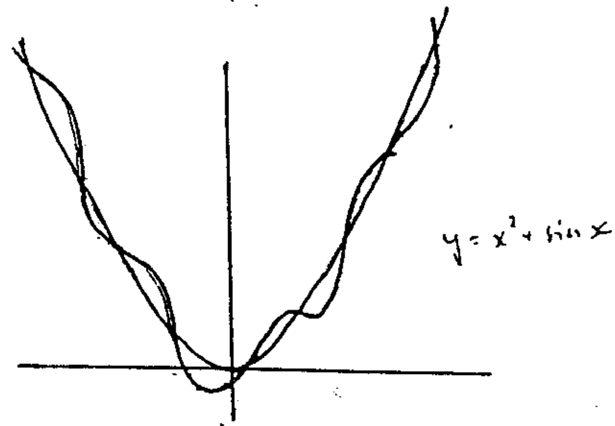


y = x² sin x









30. (a) $x = \pi/18 + 2k\pi/3$ ou $x = -\pi/18 + 2k\pi/3$ (b) $x = \pi/12 + k\pi$ ou $x = 5\pi/12 + k\pi$
(c) $x = \pi/3 - 2 + k\pi$ (d) $x = \pi/4 + k\pi/2$
(e) si $|a| > 2$, pas de solutions, si $|a| \leq 2$, $x = \frac{1}{2}\text{Arcsin}(\frac{a}{2}) - \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} - \frac{1}{2}\text{Arcsin}(\frac{a}{2}) + k\pi$
31. $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$; $4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 1/2 \Longleftrightarrow x = \pi/9 + 2k\pi/3$ ou $x = -\pi/9 + 2k\pi/3$.
32. $P_{n+1}(x) = (x^2-1)Q_n(x) + xP_n(x)$ et $Q_{n+1}(x) = P_n(x) + xQ_n(x)$; $\deg(P_n) = n$ et $\deg(Q_n) = n-1$.
33. (a) $\sin(\alpha) = -4/5$, $\text{tg}(\alpha) = 4/3$ (b) $\sin(\alpha) = -2\sqrt{5}/5$, $\cos(\alpha) = \sqrt{5}/5$ (c) $\cos(\alpha) = -5/13$, $\text{tg}(\alpha) = -12/5$.

EXERCICES CH 4

1. (a) $\overset{\circ}{A} =]0,1[\cup]1,2[$; $\overline{A} = [0,2]$; $A' = [0,2]$; $Fr(A) = \{0,1,2\}$.
(b) $\overset{\circ}{A} = \emptyset$; $\overline{A} = \mathbf{Z}$; $A' = \emptyset$; $Fr(A) = \mathbf{Z}$. (c) $\overset{\circ}{A} = \emptyset$; $\overline{A} = A \cup \{0\}$; $A' = \{0\}$; $Fr(A) = \overline{A}$.
3. (a) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists A > 0)(\forall x \in D_f)(x > A \Rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon)$
(b) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall m(x,y) \in D_f)(\begin{cases} |x+1| < \alpha \\ y < -1/\alpha \end{cases} \Rightarrow 5 < f(x,y) < 5+\varepsilon)$
(c) $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall m(x,y) \in D_f)(\begin{cases} |x-1| < \alpha \\ 2-\alpha < y < 2 \end{cases} \Rightarrow f(x,y) > A)$
(d) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall m(u,v) \in D_f)(\begin{cases} |u-2| < \alpha \\ 1 < v < 1+\alpha \end{cases} \Rightarrow |f(u,v)-3| < \varepsilon)$
4. (a) $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall t \in D_f)(|t-3| < \alpha \Rightarrow f(t) < -A)$
(b) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall m(x,y) \in D_f)(\begin{cases} |x+1| < \alpha \\ y < -1/\alpha \end{cases} \Rightarrow |f(x,y)-5| < \varepsilon)$
(c) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall m(u,v) \in D_f)(\begin{cases} |u-1| < \alpha \\ 2-\alpha < v < 2 \end{cases} \Rightarrow |f(u,v)-7| < \varepsilon)$
(d) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall m(x,y,z) \in D_f)(\begin{cases} |x-2| < \alpha \\ 1 < y < 1+\alpha \\ z < -1/\alpha \end{cases} \Rightarrow |f(x,y,z)-2| < \varepsilon)$
6. (a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ donc pas de limite en 0.
(b) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ ($|f(x)| \leq |x|$).
10. En faisant $\varepsilon = 1$ dans la définition de $\lim_{x \to +\infty} x^3e^{-x} = 0$, on obtient qu'il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x > A$, on a $x^3e^{-x} < 1$ ($\Longleftrightarrow xe^{-x} < 1/x^2$).
11. $1/(x^2+y^2) \leq 1/x^2 \Rightarrow |f(x,y)| \leq |\sin(y)|$; $\lim_{(0,0)} |\sin(y)| = 0 \Rightarrow \lim_{(0,0)} f(x,y) = 0$ (Th.2.3).
12. $|f(x,y)| \leq \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{x^4}{x^2} + \frac{|y|^3}{y^2} = x^2+|y|$; $\lim_{(0,0)} x^2+|y| = 0 \Rightarrow \lim_{(0,0)} f(x,y) = 0$ (Th.2.3).

13. 14. 15. se déduisent respectivement des inégalités $x+\cos(x) \geq x-1$, $2[x]-x = x - 2(x-[x]) \geq x-2$ et $1/(x-3\sin(x)) \leq 1/(x-3)$ (et du Th.2.3).

20. (a) $D_f = \mathbb{R}^2\setminus\{\text{axe } 0x\}$; $I^{-1} = C(A(0,-1),1) \setminus \{O(0,0)\}$; I^0 = parabole $y = -x^2/2$ privée de O

(b) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in I^{-1}}} f(x,y) = -1$; $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in I^{0}}} f(x,y) = 0$; $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}} |f(x,y)| = +\infty$

(c) Pas de limite en O(0,0).

21. (a) $D_f = \mathbb{R}^2\setminus\{\text{parabole } x = -y^2\}$; $I^{-1} = C(A(-1/2,-1/2),\sqrt{2}/2) \setminus \{O(0,0),\ B(-1,-1)\}$;
I^0 = parabole $y = -x^2$ privée des points O(0,0) et B(-1,-1).

(b) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in I^{-1}}} f(x,y) = -1$; $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in I^{0}}} f(x,y) = 0$; $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}} f(x,y) = 1$

(c) Pas de limite en O(0,0).

22. (a) $D_f = \mathbb{R}^2\setminus\{\text{axes Ox et Oy}\}$; I^1 = droite $y = x$ privée de O ; I^2 = hyperbole $y = x/(1-x)$ privée de O.

(b) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in I^{1}}} f(x,y) = 1$; $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in I^{2}}} f(x,y) = 2$; $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}} |f(x,y)| = +\infty$

(c) Pas de limite en O(0,0).

25.

f(x)	(a)				(b)			(c)	
x_0	0	2	$+\infty$	$-\infty$	0	-2	∞	a	$+\infty$
équivalent	$1/4$	$-1/(x-2)^2$	$-1/x$	$-1/x$	$x/\|x\|$	$4/\|x+2\|$	3	$1/2\sqrt{a}$	$1/\sqrt{x}$
limite	$1/4$	$-\infty$	0^-	0^+	$\begin{cases}+1 \text{ en } 0^+\\ -1 \text{ en } 0^-\end{cases}$	$+\infty$	3	$1/2\sqrt{a}$	0

26.

f(x)	(a)				(b)		(c)	
x_0	0	2	$+\infty$	$-\infty$	0^+	$+\infty$	$3\pi/2$	∞
équivalent	$1/2$	$23/(x-2)$	$5x$	$5x$	$x^{3/8}$	1	$2^{-5/4}\|h\|/h$ $(h=x-\frac{3\pi}{2})$	pas d'éq. simple
limite	$1/2$	$\begin{cases}+\infty \text{ en } 2^+\\ -\infty \text{ en } 2^-\end{cases}$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	$\begin{cases}2^{-5/4} \text{ en } (3\pi/2)^+\\ -2^{-5/4} \text{ en } (3\pi/2)^-\end{cases}$	0

27.

f(x)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Equivalent	$\sqrt{3/5}$	$-1/4x$	$5\|x\|/(2x)$	1	$-1/2x$
Limite	$\sqrt{3/5}$	0	$\begin{cases}+5/2 \text{ en } +\infty\\ -5/2 \text{ en } -\infty\end{cases}$	1	0

28.

f(x)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Equivalent	$-1/3x$	$1/\sqrt{x}$	$-2\|x\|/x$	$-\sqrt{x}/2$	$3/x$
Limite	0	0	$\begin{cases}-2 \text{ en } +\infty\\ +2 \text{ en } -\infty\end{cases}$	$-\infty$	0

29.

f(x)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
Limite en x_0^+	8	0	$1/2$	0	1	$-3/2$	-1
Limite en x_0^-	-8	0	$-1/2$	0	non déf.	$-1/2$	-1
Limite en x_0	non	oui	non	oui	oui	non	oui

30.

f(x)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
Limite	$+\infty$	1	0	0	0	1	0	4

31.

f(x)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)
Equiv.	1/2	3/5	-8	1/2	-9/8	1/2	$8x^2/3$	x/2	$50x^4/9$	1/18	3x	2/9	x^3
Limite	1/2	3/5	-8	1/2	-9/8	1/2	0	0	0	1/18	0	2/9	0

32.

f(x)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)
Equiv.	2/5	-7	x/|x|	1/18	$5x^2$	2x	9x/5	x/6	$4/27x^2$	1/2	1/2	$-25x^2/8$
Limite	2/5	-7	$\begin{cases} +1 \text{ en } 0^+ \\ -1 \text{ en } 0^- \end{cases}$	1/18	0	0	0	0	$+\infty$	1/2	1/2	0

33. (a) e (b) 1 (c) 1 si n > m ; e si m = n ; $\begin{cases} +\infty \text{ en } 0^+ \\ 0 \text{ en } 0^- \end{cases}$ si n < m.

34. (a) e (b) e^2 (c) e^x.

35.

f(x)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
Equivalent	3	1	$64\sqrt{x}$	2	-1/2	1/2	2/(3x)
Limite	3	1	$+\infty$	2	-1/2	1/2	0

36.

f(x)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)			(f)	(g)
Equivalent	-5x	1	$10x^2$	1/2	$x^{n/2}$ (n>2)	2x (n=2)	x(n<2)	1/3	2/3
Limite	$\begin{cases} -\infty \text{ en } +\infty \\ +\infty \text{ en } -\infty \end{cases}$	1	$+\infty$	1/2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1/3	2/3

37. $f(x) \underset{2}{\sim} \dfrac{27}{2\sqrt{2}\sqrt{x-2}}$; $\lim\limits_{x\to2}(x-2)f(x) = 0.$

38. $f(x) \underset{-3}{\sim} \dfrac{7}{6(x+3)}$; $\lim\limits_{x\to2}(x+3)f(x) = \dfrac{7}{6}.$

39.

f(x,y)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Equivalent	y/x^2	-y/2	$2\sqrt{x/y}$	1	$8x^2y/3$	$y^3x/\|x\|$
Limite	non	0	non	1	0	0

40. $D_f = \mathbf{R}^2\backslash\{$dtes $x = 0$ et $x = -1\}$; $f(x,y) \underset{(0,0)}{\sim} 6y$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$; $\lim\limits_{(x,y)\to(-1^+,2)} f(x,y) = +\infty$

41.

f(x)	(a)		(b)		(c)		(d)	(e)		(f)		(g)	
x_0	1	$-\infty$	2	$-\infty$	0	∞	0	0	$+\infty$	0^+	$+\infty$	$+\infty$	0^+
Equiv.	1	Log(-x)/-x	1	Log(-x)/-x	3	$3e^{x^2}$	-1	$x^{2/3}$	1/3	$xe^{1/2x}$	1/2	1	$x^2/\text{Log}(x)$
Limite	1	0	1	0	3	$+\infty$	-1	0	1/3	$+\infty$	1/2	1	0

42.

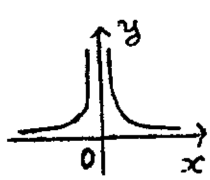
f(x)	(a)		(b)		(c)		(d)	(e)		(f)	
x_0	1^+	$+\infty$	-1	$+\infty$	0	∞	0	0	$+\infty$	0	∞
Equiv.	(x-1)Log(x-1)	-1	1	$\text{Log}(x)/e^{x+1}$	2	$2e^{x^3}$	1	2	2	1/2	1/2
Limite	0	-1	1	0	2	$\begin{cases} +\infty \text{ en } +\infty \\ 0 \text{ en } -\infty \end{cases}$	1	2	2	1/2	1/2

43. (a) A ≈ 1 + 2/300 ≈ 1,00667 (b) A ≈ 1 + 1/50 = 1,02 (c) A ≈ 1 - 1/40000 ≈ 0,999975

44. (a) A ≈ 1 + 1/50 = 1,02 (b) A ≈ 1 - 1/800 = 0,99875

46. $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{27x^4}$

Allure de la courbe:



47. (a) Asymptote horizontale $y = 2\sqrt{2}$ en $+\infty$; asymptote verticale en -2^+.
(b) $y = x + 1/2$ asymptote en $+\infty$.
(c) $y = 3x+5$ asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$; asymptote verticale en 1^+ et en 1^-.
(d) $y = 2x - 1/2$ asymptote en $+\infty$.
(e) Branche parabolique d'axe Oy en $+\infty$ et en $-\infty$.
(f) $y = 0$ asymptote horizontale en $+\infty$.
(g) $y = -x$ direction asymptotique en $+\infty$, branche parabolique dans cette direction.
48. (a) Asymptote horizontale $y = \sqrt{2}/2$ en $+\infty$.
(b) $y = 3x-1$ asymptote oblique en $+\infty$.
(c) $y = x - 1/2$ asymptote oblique en $+\infty$.
(d) $y = -2x+1$ asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.
(e) $y = 0$ direction asymptotique en $+\infty$ et en $-\infty$, branche parabolique dans ces directions.
(f) $y = x+1$ asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.
(g) $y = -x$ direction asymptotique en $+\infty$, branche parabolique dans cette direction.

50. $\begin{cases} ch(x) \underset{0}{\sim} 1 \\ sh(x) \underset{0}{\sim} x \end{cases}$ $\begin{cases} ch(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{x}/2 \\ sh(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{x}/2 \end{cases}$ $\begin{cases} ch(x) \underset{-\infty}{\sim} e^{-x}/2 \\ sh(x) \underset{-\infty}{\sim} -e^{-x}/2 \end{cases}$

Les fonctions ch(x) et sh(x) ont une branche parabolique de direction Oy en $+\infty$ et en $-\infty$.

EXERCICES CH 5

1.

u_n	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)
Equiv.	n	-1/n	$Log(n)/\sqrt{n}$	-Log(n)	1	1	$e^{1/3}$	3	5/2	2/3
Limite	$+\infty$	0	0	$-\infty$	1	1	$e^{1/3}$	3	5/2	2/3

2.

u_n	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)
Equiv.	-2	$1/\sqrt{n}$	1	e	e	1	Log(5)	$1/(2n\sqrt{Log(n)})$	2/(3n)
Limite	-2	0	1	e	e	1	Log(5)	0	0

7. (a) $(u_n)_{n>0}$ est minorée par 0, tend vers $+\infty$, n'est donc pas majorée ni bornée.
(b) $(u_n)_{n>0}$ est bornée mais non convergente.
(c) $(u_n)_{n>0}$ est majorée par 0, tend vers $-\infty$, n'est donc pas minorée ni bornée.
(d) $(u_n)_{n>0}$ converge vers 1 et est donc bornée.
11. $u_{n+1}-u_n = 1/(n+1)! > 0$ donc $(u_n)_{n>0}$ est croissante ; $v_{n+1}-v_n = -1/(n(n+1)((n+1)!)) < 0$ donc $(v_n)_{n>0}$ est décroissante ; enfin $v_n-u_n = 1/n(n!)$ est le terme général d'une suite positive et tendant vers 0.
12. De façon générale, [y] est défini comme le plus grand entier qui est inférieur à y et, en conséquence, [y]+1 est le plus petit entier qui est strictement supérieur à y. On obtient alors la monotonie des suites $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ de la façon suivante. Croissance de $(u_n)_{n>0}$: $10[10^n x]$ est un entier, qui est plus petit que $10^{n+1}x$. Donc $10[10^n x] \leq [10^{n+1}x]$ ce qui donne $u_n \leq u_{n+1}$. Décroissance de $(v_n)_{n>0}$: $10([10^n x]+1)$ est un entier strictement supérieur à $10^{n+1}x$. On en déduit que $[10^{n+1}x]+1 \leq 10([10^n x]+1)$ ce qui donne $v_{n+1} \leq v_n$. Enfin, $v_n-u_n = 1/10^n$ est le terme général d'une suite positive et tendant vers 0. L'inégalité $u_n \leq x \leq v_n$, valable pour tout n, montre que la limite des deux suites $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ est x.

EXERCICES CH 6

1. (a) continue sur $D_f = \mathbf{R}$: sur $\mathbf{R}\backslash\{\pi/4\}$ en vertu des théorèmes généraux sur la continuité ; en $\pi/4$, les limites à droite et à gauche sont égales à la valeur $f(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ de f en $\pi/4$.
(b) continue sur $D_f = \mathbf{R}\backslash\{2\}$ (th. gén.) ; limites à droite et à gauche de 2 distinctes (4 et -4) (non prol.).
(c) continue sur $D_f = \mathbf{R}^*$ (th. gén.) ; se prolonge par continuité en 0: f(0) = 0.
(d) continue sur $D_f =]-1,+\infty[$ (th. gén.) ; limite infinie en -1 (non prol.).
(e) continue sur $D_f =]0,+\infty[$ (th. gén.) ; se prolonge par continuité en 0: f(0) = 1.

(f) continue sur $D_f =]-1,0[\cup]0,+\infty[$ (th. gén.) ; se prolonge par cont. en 0: $f(0) = 0$; limite infinie en -1 (non prol. en -1).

(g) continue sur $D_f =]-1,0[\cup]1,+\infty[$ (th. gén.) ; limite infinie en -1, 0 et 1 (non prol.).

(h) continue sur $D_f =]a,b[$ (th. gén.) ; se prolonge par cont. en a et b: $f(a) = f(b) = 0$.

2. $a = -5/3$, $b = 5/3$

3. $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$

4. (a) $a = 3$ (b) $a = \sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$ (c) $a = -1$

5. (a) $a = e$ (b) $a = 5$

6.

f(x)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)
Equiv.	$4x$	$2x/\|x\|$	$3/2x$	$4/9$	$\sqrt{3}\|x\|/x$	$2\sqrt{2}x/\|x\|$	$1/6$	$9/5$	$-x/2$	$-4/x$
Prol. en 0	0	non	non	$4/9$	non	non	$1/6$	$9/5$	0	non
Prol. à droite	-	2	non	-	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	-	-	-	non
Prol. à gauche	-	-2	non	-	$-\sqrt{3}$	$-2\sqrt{2}$	-	-	-	non

7. $f(x) \underset{-3}{\sim} \dfrac{7}{6(x+3)}$; f ne se prolonge ni à droite ni à gauche ; g se prolonge par continuité en 0: $g(0) = 7/6$.

8. (a) f est continue sur $D_f = \mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, se prolonge par continuité en (0,0): $f(0,0) = 1/2$.

(b) $D_f = \mathbf{R}^2$ privé des dtes verticales $x = 0$, $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), de l'axe Ox et du demi-plan $y \leq -1$; f est continue sur D_f ; f se prolonge par continuité en (0,0): $f(0,0) = 0$ ($f(x,y) \underset{(0,0)}{\sim} xy$).

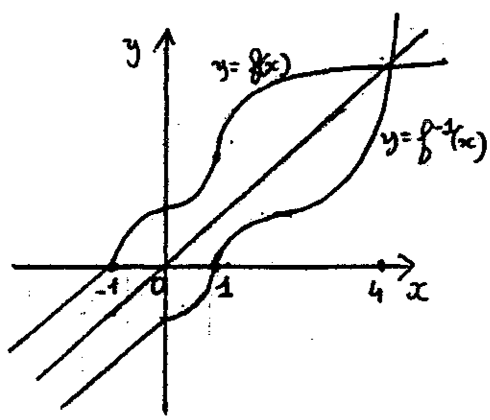
(c) $D_f = \mathbf{R}^2$ privé des ellipses $x^2+2y^2 = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{N}$) et de l'origine O(0,0) ; f se prolonge par continuité en (0,0): $f(0,0) = 1$.

(d) f est continue sur $D_f = \mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, se prolonge par continuité en (0,0): $f(0,0) = 0$ ($f(x,y) \underset{(0,0)}{\sim} x^2y/(x^2+y^2)$).

9. $\rightarrow$ **12.** f ne se prolonge pas par continuité en (0,0) (Cf. Ch.4 Exercices 20 $\rightarrow$ 22).

29.

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y-1 & \text{si } y < 0 \\ \sqrt[3]{y-1} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ y^2/4 & \text{si } y \geq 2 \end{cases}$$



32. (a) $\pi/3$ (b) $2\pi/3$ (c) $-\pi/6$ (d) $\pi/2$

33. (a) $-1/2$ (b) $\pi/6$ (c) $\pi/4$ (d) $2/7$

35. (a) fermé borné (b) borné, non fermé (c) borné, non fermé (d) fermé borné (e) fermé, non borné (f) fermé, non borné (g) ni fermé ni borné

40. (a) $0 \leq I \leq 45$ (b) $(a-1)/a \leq I = \mathrm{Log}(a) \leq a-1$ (c) $3/\sqrt{5} \leq I \leq 3$

41. $$\int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \iff \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

EXERCICES CH 7

1. (a) f dérivable sur $]1,+\infty[$ (th. gén.) ; non dérivable en 1 (le taux d'accroissement $(\Delta f/\Delta x)(1) \rightarrow \infty$).

(b) f dérivable sur $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ (th. gén.) ; non dérivable en 1 ($(\Delta f/\Delta x)(1) \rightarrow \infty$ en 1^+ et en 1^-).

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$; donc $f(0) = 0$ prolonge f par continuité.

f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ (th. gén.); le taux d'accroissement $(\Delta f/\Delta x)(0)$ en 0 a pour limite 0 à droite et à gauche de 0 donc f est aussi dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

3. f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ (th. gén.); $\lim\limits_{x\to 0} (\Delta f/\Delta x)(0) = \lim\limits_{x\to 0} x \sin(1/x) = 0$ (car $|x \sin(1/x)| \leq |x|$); donc f est aussi dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

5. (a) $[6x\mathrm{Log}(x)+3x]\ x^{3x^2}$ (b) $[2\sin(2x)+2x\sin(2x)+4x\cos(2x)]\ e^{x-1}$

(c) $\dfrac{30x}{(x^2+4)(4x^2+1)}$ (d) $\left[3\cos(3x)+\dfrac{\sin(3x)}{2\sqrt{x}}\right]\exp(\sqrt{x})$

(e) $\cos(2x)/\sqrt{\sin(2x)}$ (f) $-\left[\dfrac{\mathrm{Log}(\mathrm{tg}(x))}{\mathrm{tg}(x)}+\dfrac{\mathrm{Log}(\sin(x))}{\sin(x)\cos(x)}\right](\mathrm{tg}(x))^{-\mathrm{Log}(\sin(x))}$

6. (a) $\begin{cases} f^{(p)}(x) = n(n-1)\dots(n-p+1)x^{n-p} & \text{si } p \le n \\ f^{(p)}(x) = 0 & \text{si } p > n \end{cases}$ (b) $f^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p a^p\, m(m+1)\dots(m+p-1)}{(ax+b)^{m+p}}$

(c) $\begin{cases} f^{(2p)}(x) = (-1)^p\, 2^{2p+1}\cos(2x) \\ f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p\, 2^{2p+1}\sin(2x) \end{cases}$ (d) $f^{(p)}(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\dots\left(\dfrac{1}{2}-p+1\right)x^{\frac{1}{2}-p}$

(e) $f^{(p)}(x) = 2^n\,(x^n)^{(p)}$ (Cf. (a)) (f) $f^{(p)}(x) = (-1)^{p-1}(p-1)!\ x^{-p}$ $(p \ge 1)$

7. On procède par récurrence. La propriété est vraie pour $n = 0$: $P_0(t) = 1$. Supposons la vraie au rang n. On obtient alors: $f^{(n+1)}(t) = (P_n(t)\exp(t^2))' = (2tP_n(t)+P'_n(t))\ \exp(t^2)$, ce qui s'écrit $f^{(n+1)}(t) = P_{n+1}(t)\exp(t^2)$ où $P_{n+1}(t) = 2tP_n(t) + P'_n(t)$. Cette formule montre que $\deg(P_{n+1}) = \deg(P_n)+1 = n+1$.

9. (a) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{Log}(y+2)\ (y+2)^{x+2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = (x+2)\ (y+2)^{x+1} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (\mathrm{Log}(y+2))^2\ (y+2)^{x+2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = [1+(x+2)\mathrm{Log}(y+2)]\ (y+2)^{x+1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x+2)(x+1)(y+2)^x \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{y}\cos(y)\ e^{x^2/y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\left[\sin(y)+\dfrac{x^2}{y^2}\cos(y)\right]e^{x^2/y} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2\cos(y)}{y}\left(1+\dfrac{2x^2}{y}\right)e^{x^2/y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \dfrac{-2x}{y}\left[\dfrac{\cos(y)}{y}+\dfrac{x^2\cos(y)}{y^2}+\sin(y)\right]e^{x^2/y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left[\cos(y)\left(\dfrac{2x^2}{y^3}+\dfrac{x^4}{y^4}-1\right)+\dfrac{2x^2\sin(y)}{y^2}\right]e^{x^2/y} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-2xy}{5}\sin(x^2y)\ (\cos(x^2y))^{-4/5} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -x^2\sin(x^2y)\ (\cos(x^2y))^{-4/5} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \dots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dots \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = yz\ y^{yz}\ x^{yz-1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = z\ (\mathrm{Log}(x)+\mathrm{Log}(y)+1)\ (xy)^{yz} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = y\ \mathrm{Log}(xy)\ (xy)^{yz} \end{cases}$ ...

10. (a) $\begin{cases} \partial f/\partial x = y+1 \\ \partial f/\partial y = x \end{cases}$ $\begin{cases} \partial^2 f/\partial x^2 = 0 \\ \partial^2 f/\partial y\partial x = 1 \\ \partial^2 f/\partial y^2 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \partial f/\partial x = 2x\ e^{x^2}\cos(y) \\ \partial f/\partial y = -\sin(y)\ e^{x^2} \end{cases}$ $\begin{cases} \partial^2 f/\partial x^2 = (2+4x^2)\ e^{x^2}\cos(y) \\ \partial^2 f/\partial y\partial x = -2x\sin(y)\ e^{x^2} \\ \partial^2 f/\partial y^2 = -\cos(y)\ e^{x^2} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \partial f/\partial x = y^2\ x^{y^2-1} \\ \partial f/\partial y = 2y\ \mathrm{Log}(x)\ x^{y^2} \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \partial f/\partial x = -y/(x^2+y^2) \\ \partial f/\partial y = x/(x^2+y^2) \end{cases}$

11. On peut le vérifier directement ou bien remarquer que la fonction f est homogène de degré 0 et que l'identité à vérifier est l'identité d'Euler.

12. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2(y^2-x^2)}{x^2+y^2} = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$

13. On a $l = vt$, $t = l/v$ et $v = l/t$ d'où $\dfrac{\partial l}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial l} = v\,(-l/v^2)\,(-1/t) = -l/vt = -1$.

14. (a) $F(x) = \sin(x) + C$ (b) $F(x) = -\cos(x) + C$ (c) $F(x) = -\cos(ax)/a + C$
(d) $F(x) = e^x + C$ (e) $F(x) = e^{ax}/a + C$ (f) $F(x) = a^x/\mathrm{Log}(a) + C$
(g) $F(x) = \begin{cases} x^{r+1}/(r+1) + C & \text{si } r \neq -1 \\ \mathrm{Log}|x| + C & \text{si } r = -1 \end{cases}$

15. On a $\begin{cases} f'(x) = (\mathrm{Log}(2)+\mathrm{Log}(x))' = 1/x & \text{si } x > 0 \\ f'(x) = (\mathrm{Log}(3)+\mathrm{Log}(-x))' = -1/(-x) = 1/x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

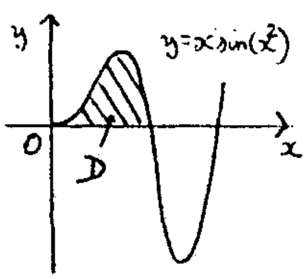
La fonction $f(x)-\mathrm{Log}|x|$ vaut Log(2) sur $]0,+\infty[$ et Log(3) sur $]-\infty,0[$ et n'est donc pas constante sur $\mathbf{R}^*$. Le Th.1.9 dit que la différence entre deux primitives d'une même fonction est constante sur tout intervalle; $\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle.

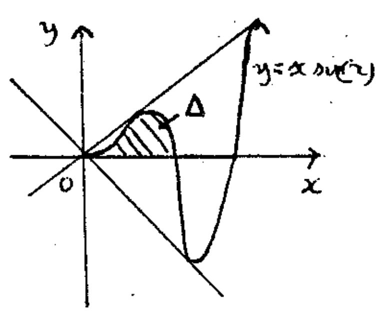
16. (a) $\sqrt{x^2+1} + C$ (b) $e^{x^3}/3 + C$ (c) $-(\cos(x))^4/4 + C$ (d) $-\mathrm{Log}|\cos(x)| + C$ (e) $\dfrac{-1}{3(x^3+3x+1)} + C$

17. (a) $\mathrm{Log}(x) + C$ (b) $x\mathrm{Log}(x)-x + C$ (c) $\mathrm{Log}(|\mathrm{Log}(x)|) + C$

20. (a) $xe^x-e^x + C$ (b) $x^2\sin(x)+2x\cos(x)-2\sin(x) + C$ (c) $x\mathrm{Arctg}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Log}(1+x^2) + C$

21. $I = [-\cos(x^2)/2]_0^{\sqrt{\pi}} = 1$; I est l'aire du domaine D hachuré ci-dessous.

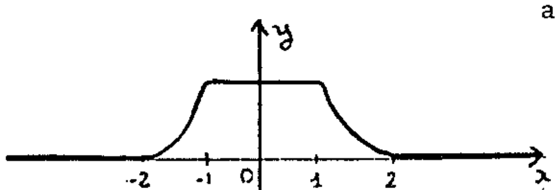




22. $I = [-x\cos(x)+\sin(x)]_0^{\pi} = \pi$; I est l'aire du domaine Δ hachuré ci-dessus.

23. (a) f continue: sur $R\backslash\{a,b\}$ (th. gén.) ; en a et b, les lim. à dte et à gauche sont nulles (= f(a) = f(b)).
(b) $F'(x) = f(x) = 0$ sur $]-\infty,a]$ U $[b,+\infty[$, f est donc constante sur chacun de ces intervalles, égale à F(a) = 0 sur $]-\infty,a]$ et égale à $F(b) > 0$ sur $[b,+\infty[$; entre a et b, $f(x) > 0$, F est donc strictement croissante.
(Une autre méthode consiste à interpréter $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ en termes d'aires).

(c)



26. (a) 5,9977 (b) -0,1 (c) 4 - 7/160 ≈ 3,96 (d) 2

27. (a) 1,93 (b) 1,3 (c) $1/5 + (33.10^{-4})/125 \approx 0{,}2000264$.

28. (a) 1 - 0,0785 ≈ 0,922 (b) 12,99 (c) $4\pi/100 \approx 0{,}13$

29. 12,93 cm

30. 47,6 m^3

31. 191,60

32. $\Delta v \approx 2l_0|\Delta t|/t_0^2 \approx 2{,}5$ km/h

33. (a) $dz = (6x^2+y^2)dx + 2xydy$ (b) $dz = (\cos(x)-y\sin(xy))dx - x\sin(xy)dy$
(c) $dz = (\frac{1}{v} + \frac{w}{u^2})du - \frac{u}{v^2}dv - \frac{1}{u}dw$

34. (a) $dz = \dfrac{1}{y^2}dx - \dfrac{2x}{y^3}dy$ (b) $dz = \mathrm{Log}(2)\, 2^{p-q}\,(dp - dq)$

(c) $dz = \dfrac{-(2r+s)st}{(r^2+rs)^2}dr + \dfrac{r^2t}{(r^2+rs)^2}ds + \dfrac{s}{r^2+rs}dt$

35. (a) $dz/dt = (2x - y/x^2)(e^t+1) + 2t\cos(t^2)/x$ avec $x = e^t+t$ et $y = \sin(t^2)$

(b) $dz/dt = 5(3x^2 - y^2/x^2)e^{5t} + 2y\sin(2t)/x$ avec $x = e^{5t}$ et $y = \sin^2(t)$

36. $\begin{cases} dz = e^v du + ue^v dv \\ dz = e^{s-r}(2r-s-r^2)dr + e^{s-r}(1+s+r^2)ds \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \partial z/\partial r = e^{s-r}(2r-s-r^2) \\ \partial z/\partial s = e^{s-r}(1+s+r^2) \end{cases}$

37. $\begin{cases} dz = 2uv\cos(u^2v)du + u^2\cos(u^2v)dv \\ dz = (3r^2s^2+2rs^3)\cos(r^3s^2+r^2s^3)dr + (3r^2s^2+2sr^3)\cos(r^3s^2+r^2s^3)ds \end{cases}$

d'où $\begin{cases} \partial z/\partial r = (3r^2s^2+2rs^3)\cos(r^3s^2+r^2s^3) \\ \partial z/\partial s = (3r^2s^2+2sr^3)\cos(r^3s^2+r^2s^3) \end{cases}$

38. $dz = \cos(u)v^{1/4}du + \frac{1}{4}(\sin(u)v^{-3/4}dv = [\cos(\mathrm{Log}(v)) + \frac{1}{4}\sin(\mathrm{Log}(v))]\ v^{-3/4}dv$

d'où $g'(v) = [\cos(\mathrm{Log}(v)) + \frac{1}{4}\sin(\mathrm{Log}(v))]\ v^{-3/4}$

39. $dz = -v\sin(uv)du - u\sin(uv)dv = -te^{s+t}(1+s)\cos(ste^{s+t})ds - se^{s+t}(1+t)\cos(ste^{s+t})dt$

d'où $\begin{cases} \partial z/\partial s = -te^{s+t}(1+s)\cos(ste^{s+t}) \\ \partial z/\partial t = se^{s+t}(1+t)\cos(ste^{s+t}) \end{cases}$

40. $du/dt = 1/(t-1)$; $\Delta x = -0{,}02$; $\Delta y = 0{,}01$; $\Delta u \approx -0{,}01$

41. $du/dt = \dfrac{12t+7}{2\sqrt{6t^2+7t+2}}$; $\Delta x = -0{,}02$; $\Delta y = -0{,}03$; $\Delta u \approx \dfrac{-31.0{,}01}{4\sqrt{10}} \approx 0{,}025$

44. Soient x (resp. y) la distance entre l'automobile (resp. le train) et l'intersection. On a $x(t) = x(0)-20t$, $y(t) = y(0)-100t$, $D = \sqrt{x^2+y^2}$ d'où $dD/dt = \dfrac{-(20x+100y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ km/h $\approx$ 100 km/h

45. (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(ye^x+1)}{3y^2+e^x}$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(3x^2+8xy-3y^2)}{4x^2-6xy+6y^2}$ (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1/x - e^{x/y}/y)}{1/y - xe^{x/y}/y^2} = \dfrac{y}{x}$

46. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(ye^x+\cos(x)e^y)}{e^x+e^y\sin(x)}$; $y(0) = 0$; $y(x) \underset{0}{\sim} -x$ **47.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\sin(x)-e^y}{\cos(x)+xe^y}$; $y(0) = 0$; $y(x) \underset{0}{\sim} -x$

48. (a) $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y-\cos(y)} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z+z\sin(y)}{\cos(y)-y} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2(yz-xz^2)}{2x^2z-2xy+3z^2y^2} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2(xz-yz^3)}{2x^2z-2xy+3z^2y^2} \end{cases}$ (c) ...

49. (a) $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-1}{3z^2+1} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2}{3z^2+1} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-1}{3z^2+e^y} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-(2+ze^y)}{3z^2+e^y} \end{cases}$

50. (a) $f(x) \underset{3}{\sim} 27(\mathrm{Log}(3)-1)(x-3)$ (b) $f(x) \underset{1}{\sim} \frac{9}{4}(x-1)$

51. (a) $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = (\sin(t)-t)'(0) = \cos(0)-1 = 0$ (b) $f(t) \underset{0}{\sim} \frac{2t}{t} = 2$; $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 2$

53. (a) $f'(x) = \dfrac{16}{(x^2+16)^{3/2}}$; $y = x/4$ (b) $f'(x) = \dfrac{x^2-6x+1}{(x-3)^2}\exp\left(\dfrac{x^2-1}{x-3}\right)$; $y = -x+2$

(c) $f'(x) = \dfrac{-x^2+6x-4}{(x^2-4)^2}$; $y = \frac{1}{5}(x+2)$ (d) $f'(x) = e^{x^2}(2x\sin(x)+\cos(x))$; $y = x$

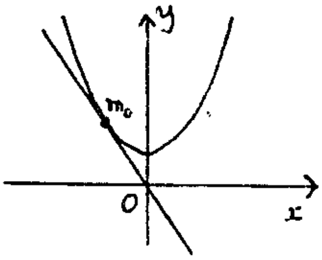
(e) $f'(x) = (2\mathrm{Log}(x)+2)x^{2x}$; $y = 2x-1$ (f) $f'(x) = \dfrac{9x^2+6x^5}{2\sqrt{x^6+3x^3}}$; $y = \frac{15}{4}x - \frac{7}{4}$

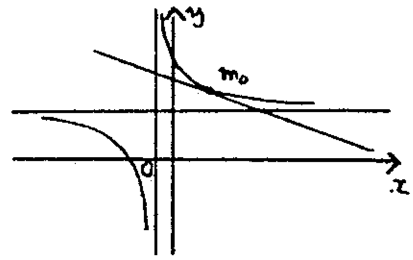
54. L'abscisse x de A est solution de $0-a = 2a(x-1)$ d'où $x = 1/2$.

55. La tangente au point $m_0(1,1)$ est d'équation $y = \alpha x+(1-\alpha)$. Quand α varie de 0 à $+\infty$, cette droite décrit toutes les droites de pente ≥ 0 passant par $m_0(1,1)$.

56. La droite L est tangente à G_f au point $M_1(1,4)$; en $M_2(-3,0)$, la tangente est également parallèle à L.

57. (a) dans la direction du vecteur $\vec{u}$ = (1,0) (b) dans la direction du vecteur $\vec{u}$ = (1,1)
Les fonctions décroissent le plus rapidement dans les directions opposées.
58. Dans la direction du vecteur $\vec{u}$ = (3,4).
59. (a) I_f^c: $y = x^2+1$; Tgte: $y = -2x$ (b) I_f^c: $2xy-3x+y-3 = 0$; Tgte: $x+3y-7 = 0$



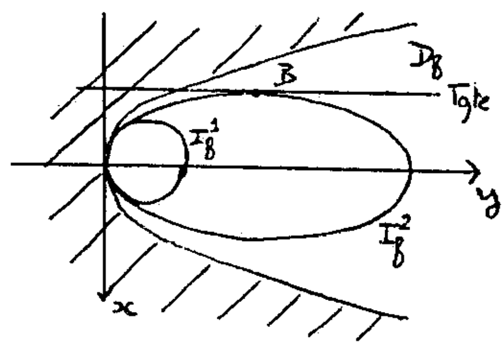


(c) I_f^c: $x = y^2+4$ Tgte: $x-2y-3 = 0$
60. (a) I_f^c: $x = y^2+3$; Tgte: $x-2\sqrt{2}y-1 = 0$ (b) I_f^c: $2x^2+3x-y = -3$; Tgte: $x+y-1 = 0$
(c) I_f^c: $xy = 2$; Tgte: $2x+y-4 = 0$
61. (a) $\vec{n}$ = (9,-5) ; $9x-5y-14 = 0$ (b) $\vec{n}$ = (4Log(2),2) ; 2Log(2)x+y-3Log(2) = 0
62. D_f: $\{y > x^2/2\}$ U $Ox\backslash\{O\}$

I_f^1: $\{ x^2+(y-1)^2 = 1 \} = C(A(0,1),1) \setminus \{ O(0,0) \}$

I_f^2: $\{ \frac{x^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1 \} \setminus \{ O(0,0) \}$

Tangente en B(-2,4): $x = -2$



63. (a) $\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{3} K^{-2/3} L^{2/3}$; $\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{2}{3} K^{1/3} L^{-1/3}$
(b) Q est homogène de degré 1: $Q(tK,tL) = (tK)^{1/3}(tL)^{2/3} = t^{1/3}t^{2/3} K^{1/3}L^{2/3} = t\, Q(K,L)$
Identité d'Euler: $K \frac{\partial Q}{\partial K} + L \frac{\partial Q}{\partial L} = K^{1/3} L^{2/3} (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) = Q(K,L)$
(c) $\frac{3}{25}K + \frac{10}{9}L = 45$ (d) $\Delta Q \approx (\frac{3}{25} + \frac{10}{9}).0{,}01 \approx 0{,}0123$
64. (a) $\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{4} K^{-3/4} L^{3/4}$; $\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{3}{4} K^{1/4} L^{-1/4}$
(b) Q est homogène de degré 1: $Q(tK,tL) = (tK)^{1/4}(tL)^{3/4} = t^{1/4}t^{3/4} K^{1/4}L^{3/4} = t\, Q(K,L)$
Identité d'Euler: $K \frac{\partial Q}{\partial K} + L \frac{\partial Q}{\partial L} = K^{1/4} L^{3/4} (\frac{1}{4} + \frac{3}{4}) = Q(K,L)$
(c) $\frac{27}{32}K + \frac{1}{2}L = 54$ (d) $\Delta Q \approx (\frac{27}{32} + \frac{1}{2}).0{,}01 \approx 0{,}0134$
65. (a) $\partial z/\partial x = (x+1)/z$; $\partial z/\partial y = (y-2)/z$
(b) I_z^0: $\{ (x+1)^2+(y-2)^2 = 5 \} = C(A(-1,2),\sqrt{5})$; I_z^2: $\{ (x+1)^2+(y-2)^2 = 9 \} = C(A(-1,2),3)$
(c) à I_z^0 en (0,0): $x = 2y$; à I_z^2 en (2,2): $x = 2$
66. (a) $\partial z/\partial x = -1/(2z)$; $\partial z/\partial y = (y+1)/z$
(b) I_z^0: $\{ (y+1)^2 = x+1 \}$ = parabole d'axe horizontal; I_z^1: $\{ (y+1)^2 = x+2 \}$ = parabole d'axe horizontal
(c) à I_z^0 en (0,0): $x = 2y$; à I_z^1 en (-1,-2): $x+2y+5 = 0$

67. (a) $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = (e^x-y,-x-2)$ (b) $y(x) = e^x/(x+2)$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = y'(x) = \dfrac{e^x(x+2)-e^x}{(x+2)^2} = \dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$ et $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = \dfrac{-(e^x-y)}{-(x+2)} = \dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$ (où $F(x,y) = e^x-(x+2)y$)

(d) $y = 1$ (e) $z+1 = -2(y-1)$ (f) $\Delta z \approx -2\Delta y \approx 0{,}04$; $f(0.01,0.98) \approx -0{,}96$

68. (a) $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = (-e^{-x}-y,-(x+1))$ (b) $y(x) = e^{-x}/(x+1)$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = y'(x) = \dfrac{-e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2}$ et $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = \dfrac{-(-e^{-x}-y)}{-(x+1)} = \dfrac{-e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2}$ (où $F(x,y) = e^{-x}-(x+1)y$)

(d) $3x+y-2 = 0$ (e) $z+1 = -3x-(y-2)$ (f) $\Delta z \approx -3\Delta x-\Delta y \approx -0{,}01$; $f(0.01,1.98) \approx -1{,}01$

69. D: $x = 1$; points où la tangente est parallèle à D: $A(1,2)$ et $B(-1,-2)$

70. D: $y = x+1$; points où la tangente est orthogonale à D: $A(2\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3)$ et $B(-2\sqrt{3}/3,-\sqrt{3}/3)$

71. (a) $\vec{n}(1,1,-1)$; $x+y-z+5 = 0$

(b) $\vec{n}(\pi\sqrt{2},-\pi\sqrt{2},-1)$; $\pi\sqrt{2}x-\pi\sqrt{2}y-z+4\pi = 0$

72. (a) $\vec{n}(0,0,-1)$; $z = -4$

(b) $\vec{n}(0,1,-2)$; $y-2z+3 = 0$

73. P: $z = 12(x-y-1)$; dans la direction du vecteur $\vec{u} = (1,-1)$.

74. P: $z = 3x-8y-6$; points où le plan tangent est parallèle à P: $A(1,2,-7)$ et $B(-1,2,-9)$.

75. P: $z = 4x-6y$; points où le plan tangent est parallèle à P: $A(2,1,2)$ et $B(2,-1,6)$.

76. Les vecteurs normaux en P à G_f et à S sont donnés respectivement par $\overrightarrow{\text{grad}}(-8x^2+y^2+z^2+4)(-1,0,2) = (16,0,4)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}(z-2x^2)(-1,0,2) = (4,0,1)$. Ces vecteurs sont proportionnels; les plans tangents sont donc parallèles. Comme ils contiennent tous deux le point P, ils sont identiques.

77. En un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ du cône ($z_0^2 = x_0^2+y_0^2$), la normale est la droite d'équation paramétrique $\{ x = x_0+2x_0t,\ y = y_0+2y_0t,\ z = z_0-2z_0t \}$. Cette droite coupe l'axe Oz pour $t = -1/2$.

78. (a) P: $z = -6x + \frac{7}{3}y - \frac{1}{3}$

(b) C: $3y^2-3x^2-6x^2y-y^3-1 = 0$

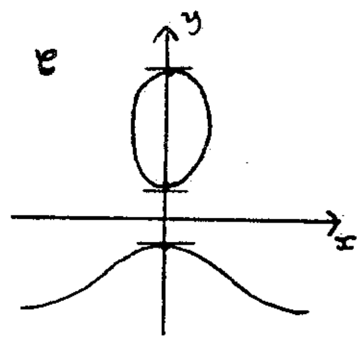
D: $-6x + \frac{7}{3}y - \frac{1}{3} = 0$; la droite D est l'intersection du plan P et du plan xOy.

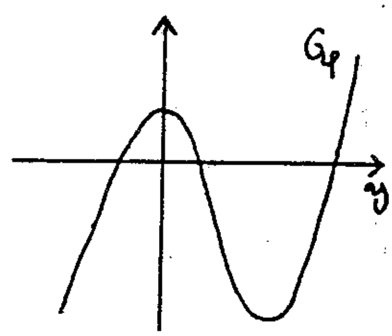
(c) L'ordonnée y des points d'intersection de la courbe C avec l'axe Oy est solution de

$$3y^2-y^3-1 = 0 \iff \varphi(y) = 0$$

D'après le graphe ci-contre, il y a 3 points d'intersection. En ces points, $x = 0$ et le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = (-6x+12xy,6y-6x^2-3y^2) = (0,6y-3y^2)$ est parallèle à $\vec{j}$. La tangente à C, qui est normale à $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$, est donc horizontale.

L'équation de C ne définit pas implicitement y(x) puisque la droite $x = 0$ coupe C en 3 points.





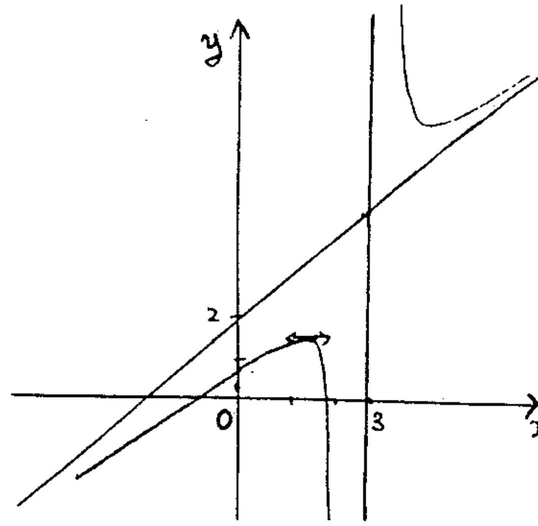
EXERCICES CH 8

3. Le th. des accroissements finis, appliqué à $f(x) = x^n$ entre les points a et b donne $b^n-a^n = n(b-a)c^{n-1}$ où $c \in]a,b[$. On déduit le résultat de l'inégalité $a^{n-1} < c^{n-1} < b^{n-1}$.

10. $f_1 \to g_5$; $f_2 \to g_1$; $f_3 \to g_7$; $f_4 \to g_4$; $f_5 \to g_9$; $f_6 \to g_2$; $f_7 \to g_6$; $f_8 \to g_8$; $f_9 \to g_3$

11. (a) $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x-3}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$; $f'(x) = \dfrac{x^2-6x+4}{(x-3)^2}$

x	$-\infty$		$3-\sqrt{5}$		3		$3+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$5-2\sqrt{5}$	$\searrow$	$-\infty\ \|\|\ +\infty$	$\searrow$	$5+2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$



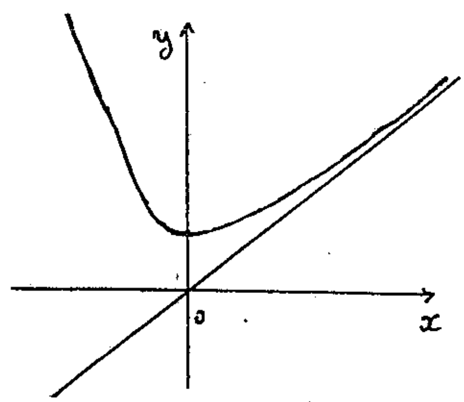
La droite $y = x+2$ asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$f''(x) = \frac{10}{(x-3)^3}$$

f est convexe sur $]3,+\infty[$ et concave sur $]-\infty,3[$.

(b) $f(x) = x+e^{-x}$; $D_f = \mathbf{R}$; $f'(x) = 1-e^{-x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



La droite $y = x$ est asymptote en $+\infty$.

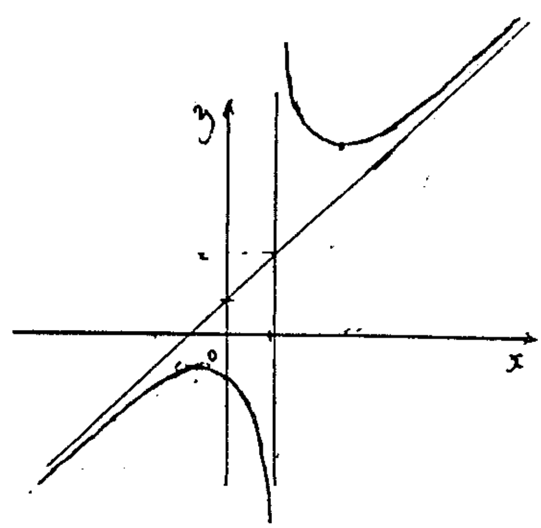
$f''(x) = e^{-x} > 0$; f est convexe.

(c) $f(x) = \dfrac{x^4-1}{(x-1)^2(x+1)}$; $D_f = \mathbf{R}\backslash\{-1,1\}$

On a $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$; en particulier f se prolonge par continuité en -1: $f(-1) = -1$.

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2+2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty\ \|\|\ +\infty$	$\searrow$	$2-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



La droite $y = x+1$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$

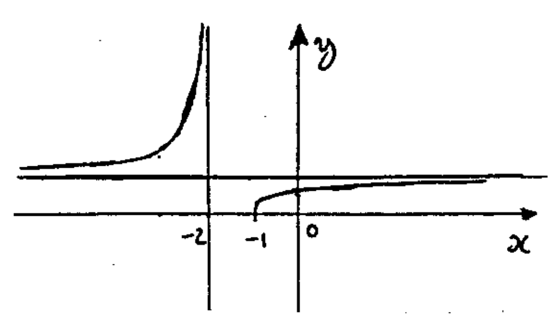
f est convexe sur $]1,+\infty[$ et concave sur$]-\infty,1[$.

(d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$; $D_f =]-\infty,-2[\cup [-1,+\infty[$

f est continue mais non dérivable en -1.

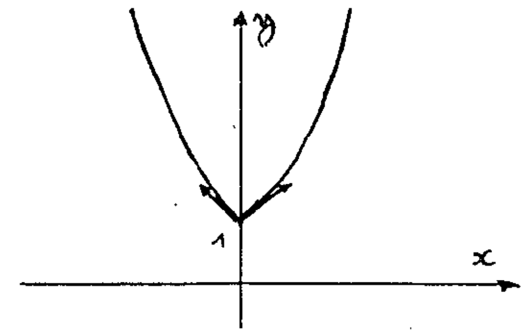
$f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}\,\dfrac{1}{(x+2)^2} \geq 0$; f est croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty,-2[$ et $[-1,+\infty[$.

La droite horizontale $y = 1$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.



(e) $f(x) = e^{|x|}$; $D_f = \mathbf{R}$; f est paire et vaut $f(x) = e^x$ pour $x \geq 0$; f est continue mais non dérivable en $x = 0$:

f est dérivable à droite et à gauche
($f'_d(0) = 1 = -f'_g(0)$).



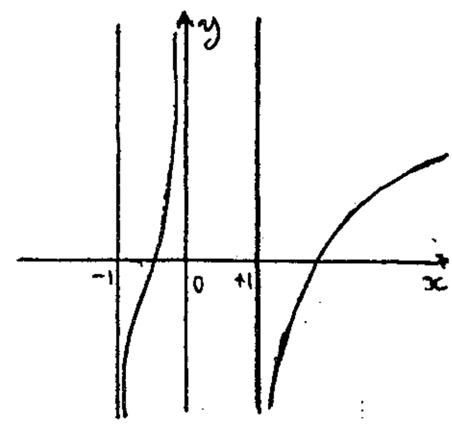
(f) $f(x) = \text{Log}(x-\frac{1}{x})$; $D_f =]-1,0[\cup]1,+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1 + 1/x^2}{x - 1/x} \geq 0$; f est croissante sur chacun des deux intervalles $]-1,0[$ et $]1,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \text{Log}(x)$; il y a donc une branche parabolique de direction Ox.



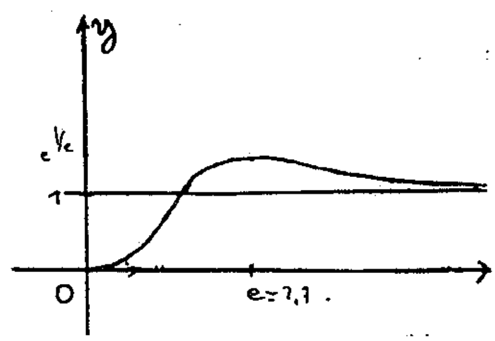
(g) $f(x) = x^{1/x} = e^{\text{Log}(x)/x}$; $D_f =]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; f se prolonge par continuité en 0: on pose $f(0) = 0$; la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0: $f'(0) = 0$. Pour $x \neq 0$, on a

$f'(x) = \dfrac{1-\text{Log}(x)}{x^2}\, x^{1/x}$

x	0		e		$+\infty$
f'(x)	0	+	0	-	
f(x)	0	$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$	1

La droite $y = 1$ est asymptote en $+\infty$.

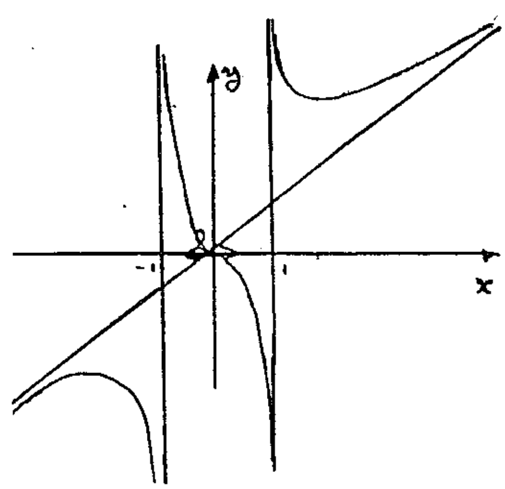


(h) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-1}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$; f est impaire

$f'(x) = \dfrac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(x)	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

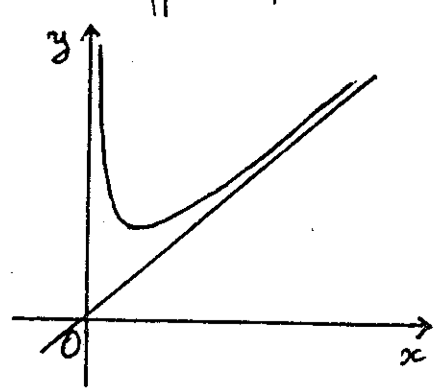
La droite $y = 2x$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.



(i) $f(x) = \text{Log}(x+1)-\text{Log}(x)+x$; $D_f =]0,+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x(x+1)}$

x	0		$(-1+\sqrt{5})/2$		$+\infty$
f'(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖ $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$



La droite y = x est asymptote en $+\infty$.

$f''(x) = \dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2} > 0$ pour tout $x \in D_f$

f est donc convexe.

12. (a) f dérivable sur $]0,\pi/2]$ en vertu de th. gén. ; $\lim_{x \to 0} \sin(x)/x = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0 ; le taux d'accroissement en 0, $(\Delta f/\Delta x) = (\sin(x)-x)/x$, tend vers 0 (Cf. Exercice 51 du Ch.7) ; f est donc dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = 0$.

(b) Sur l'intervalle $]0,\pi/2[$, la fonction $\varphi(x) = tg(x)-x$ est strictement croissante ($\varphi'(x) = tg^2(x) > 0$); on a donc $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$, i.e., $tg(x) > x$ pour tout $x \in \ ]0,\pi/2]$.

(c) On déduit que $f'(x) = \dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} = \dfrac{-\cos(x)}{x^2}\varphi(x) < 0$ et donc que f est décroissante sur $[0,\pi/2]$.

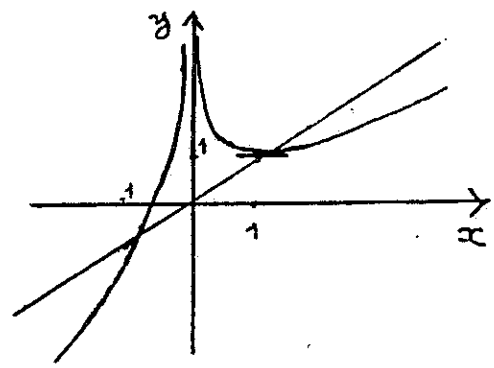
On a donc $f(\pi/2) \leq f(x) \leq f(0)$, soit $\dfrac{2}{\pi} \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq 1$ pour tout $x \in \ [0,\pi/2]$.

13. L'équation générale d'une droite de pente $m < 0$, passant par A(1,2) et coupant Ox est $y-2 = m(x-1)$. Les points d'intersection avec les axes Ox et Oy sont les points $P((m-2)/m,0)$ et $Q(0,2-m)$. On obtient $d(O,P) = |m-2|/|m| = (m-2)/m$ et $d(O,Q) = |2-m| = (2-m)$ $(m < 0 < 2)$.

Posons $f(m) = d(O,P)+d(O,Q) = (-m^2+3m-2)/m$. On a $f'(m) = (-m^2+2)/m^2$. La fonction f décroît sur $]-\infty,-\sqrt{2}]$ et croît sur $[-\sqrt{2},0[$. Elle est minimale en $-\sqrt{2}$: $f(-\sqrt{2}) = 3+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$.

Posons $g(m) = d(O,P)d(O,Q) = -(m-2)^2/m$. On a $g'(m) = -(m^2-4)/m^2$. La fonction décroît sur $]-\infty,2]$ et croît sur $[-2,0[$. Elle est minimale en -2: $g(-2) = 8$.

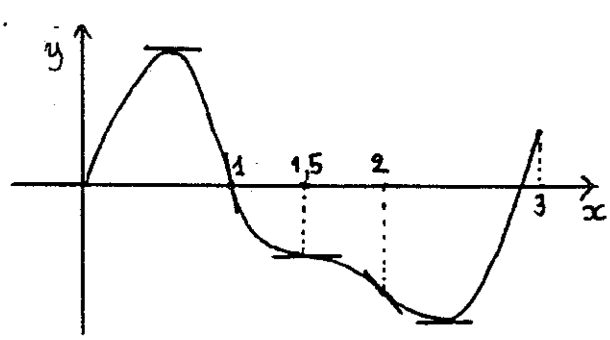
14. $f(x) = x-\mathrm{Log}|x|$; $D_f = \mathbb{R}^*$; $f'(x) = (x-1)/x$



x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		+	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

y = x est direction asymptotique en $+\infty$ et en $-\infty$; il y a une branche parabolique dans cette direction.
$f''(x) = 1/x^2 > 0$; f est convexe sur chacun des deux intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
L'étude montre que f ne s'annule qu'entre -1 et 0.
D'après le th. des acc. finis, il existe $c \in \ ]-1,x_0[$ tel que $f(-1)-f(x_0) = (-1-x_0)f'(c)$, i.e., $x_0+1 = 1/f'(c)$.
Mais $c \in \ ]-1,0[\Rightarrow f'(c) = 1 - 1/c > 2$, ce qui donne $0 < x_0+1 < 1/2$ i.e., $-1 < x_0 < -0,5$

15.



16. (a) col en (2,-1) (b) col en (1,-1) (c) minimum en (1/2,2) et col en (-1/2,2) (d) minimum en (1/3,-1/2) et col en (-1/3,-1/2) (e) minimum en (0,0) (f) col en (0,0) et maximum en (-1,-1) (g) minimum en (1,1) (h) minimum en (0,0), col en (1/4,-1) et en (1,2).

17. (a) col en (1,-1) (b) col en (1,-1) (c) col en (1/2,2) et maximum en (-1/2,2) (d) col en (1/2,5) et maximum en (-1/2,5) (e) col en (0,0) (f) minimum en (1,1) (g) minimum en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$; en (0,0), $s^2-rt = 0$, le Th.1.8 ne permet pas de conclure (en coupant par les plans verticaux x = y et x = -y, on voit qu'il s'agit d'un col).

18. (a) On étudie $f(x) = x - \text{Log}|x| - 1/x$ sur $]-\infty,0[$; $f'(x) = (x^2-x+1)/x^2) > 0$; la fonction f croît strictement de $-\infty = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ à $+\infty = \lim_{x\to 0^-} f(x)$; elle s'annule donc exactement une fois sur $]-\infty,0[$, pour x = -1.

L'équation $e^x = -xe^{1/x}$ n'a pas de racine sur $[0,+\infty[$ (les 2 termes sont de signe contraire); sur $]-\infty,0[$, elle est équivalente à $x = \text{Log}|x| + 1/x$. On sait que -1 est sa seule racine.

(c) Les points stationnaires sont solutions de $\begin{cases}-ye^x = e^y \\ -xe^y = e^x\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}xy = 1 \\ -xe^{1/x} = e^x\end{cases}$.

D'après (b) ce système a pour unique solution le point (-1,-1). Le Th.1.8 montre que c'est un col.

19. $M_1(-2,-2,8)$; $M_2(0,0,0)$.

20. $M_1(0,0,0)$; $M_2(-4,0,32)$.

21. Un polynôme P(x) de degré 4 est convexe ssi sa dérivée seconde est un trinôme toujours ≥ 0 sur **R**, i.e., ssi P"(x) est de la forme $P''(x) = u(x-v)^2+w$ avec $u > 0$ et $w \geq 0$. En intégrant deux fois, on obtient que P(x) doit être de la forme $P(x) = a(x-v)^4+b(x-v)^2+c(x-v)+d$ avec $a > 0$ et $b \geq 0$.

27. (a) f est convexe, n'a pas d'extrema relatifs.
(b) f est convexe ; minimum (relatif et absolu) en (-1,-1/2).
(c) f est concave ; maximum (relatif et absolu) en (2,0).

28. (a) f est convexe ; minimum (relatif et absolu) en (-2,1).
(b) f est concave ; maximum (relatif et absolu) en (-8,-14).
(c) f est convexe ; minimum (relatif et absolu) en (0,0).
(d) f est concave, n'a pas d'extrema relatifs.

29. f est convexe; donc l'origine O(0,0), le seul point stationnaire est un minimum. En (0,0), $s^2-rt = 0$; le test des dérivées secondes ne s'appliquait pas.

30. (a) (3,3) min. (b) (16/17,-15/17) min. (c) (3/2,-1/2) min.
(d) $(e^6/25, 5\sqrt{5}e^{9/2})$ min. (poser $X = x^{1/4}$ et $Y = y^{1/3}$).

31. (a) 4 points stationnaires: $m_1(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$, $m_2(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)$, $m_3(\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)$, $m_4(-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$; max. en m_1 et m_2, min. en m_3 et m_4. (b) (2,-1) min. (c) (1,-1) min.
(d) $(2\sqrt{2}e^3, \sqrt{2}e^5/8)$ min. (poser $X = x^{1/3}$ et $Y = y^{1/5}$).

32. Lorsqu'on maximise xy sous la contrainte x+y = c, on trouve x = y = c/2. Appl.: (a) pour x, y > 0 quelconques, on obtient, en prenant a = x+y, que $xy \leq c^2/2 = (x+y)^2/4$ soit $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$.
(b) Les rectangles de longueur x et de largeur y d'aire xy maximale à périmètre 2(x+y) donné sont les carrés (i.e., x = y).

33. Le problème consiste à minimiser la fonction "distance à l'origine", soit $\sqrt{x^2+y^2}$, ou, ce qui revient au même, à minimiser la fonction x^2+y^2 sachant que le point m(x,y) est astreint à rester sur la courbe C.
(a) (0,2) et (0,-2) (les autres points stationnaires (3,0) et (-3,0) sont les points les plus éloignés de O).
(b) $(\sqrt{2}/2,1/2)$ et $(-\sqrt{2}/2,1/2)$ (il y a aussi un max. relatif en (0,1))
(c) (0,1) et (0,-1)
(d) (0,1) et (1,0) (il y a aussi un max. relatif en (3/4,3/4)).

34. $s(x,y) = 2xy$ est maximal sous la contrainte $x^2+y^2 = 1$ pour $x = y = \sqrt{2}/2$: $s(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2) = 1$.

35. $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ est maximal sous la contrainte $x+y = \pi/2$ pour $x = y = \pi/4$: $f(\pi/4,\pi/4) = 1/2$.

36. (a) Lorsqu'on maximise xyz sous la contrainte x+y+z = a, on trouve x = y = z = a/3.
(b) Pour x, y, z > 0 quelconques, on obtient, en prenant a = x+y+z, que $xyz \leq (a/3)^3 = ((x+y+z)/3)^3$, soit l'inégalité $\sqrt[3]{xyz} \leq (x+y+z)/3$.

37. Le problème consiste à minimiser la fonction "distance à l'origine (au carré)" $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sachant que le point m(x,y,z) est astreint à rester sur la surface S.
(a) (0,0,1) et (0,0,-1) (b) Tous les points du cercle du plan vertical x = 1/2 centré en A(1/2,0,0) et de rayon $\sqrt{17/2}$ (l'autre point stationnaire, (9,0,0) est le point de S le plus éloigné de l'origine).

38. (a) (5/3,5/3,5/3) max.
(b) La résolution du système $\begin{cases}\overrightarrow{\text{grad}}\, f \;/\!/\; \overrightarrow{\text{grad}}\, g \\ g(x,y,z) = 0\end{cases}$ conduit à deux cas:

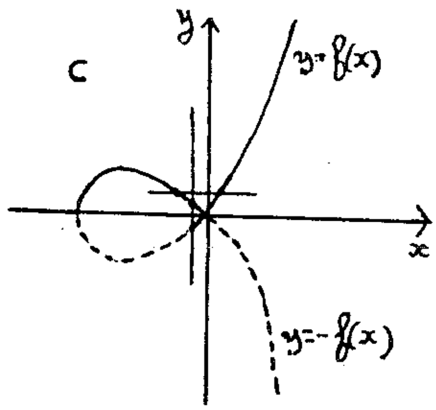
<u>1er cas</u>: x+y+z = 0. On a alors $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x+y+z)^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) = -3/2$

<u>2ème cas</u>: x = y = z. On trouve alors les deux points (1,1,1) et (-1,-1,-1) pour lesquels la fonction f vaut 3 et -3. Ce sont donc les valeurs maximale et minimale de f sous la contrainte g(x,y,z) = 0.

39. Le volume V = xyz est maximal sous la contrainte x + y/2 + z/3 = 1 pour x = 1/3, y = 2/3 et z = 1; on a alors V = 2/9.

40. (a) Soit $F(x,y) = y^2-x^3-x^2$. L'origine O(0,0) est le seul point de C où les deux dérivées partielles $\partial F/\partial x = -3x^2-2x$ et $\partial F/\partial y = 2y$ sont nulles. Donc, en tout point de C distinct de O, on a, ou bien $\partial F/\partial x \neq 0$ et l'équation de C définit localement x(y), ou bien $\partial F/\partial y \neq 0$ et l'équation de C définit localement y(x).

(b)



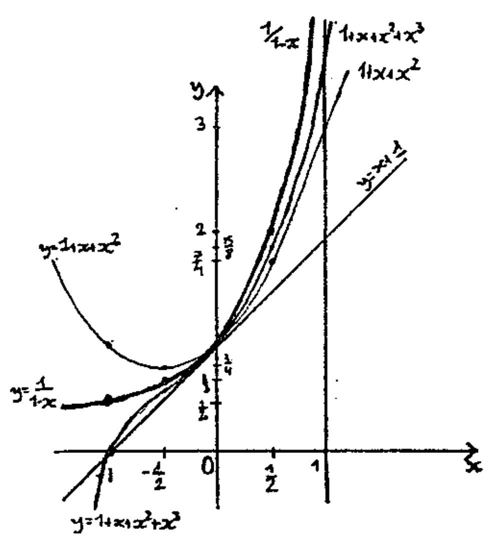
(c) On voit graphiquement que, quel que soit le voisinage de l'origine que l'on considère, il existe toujours des droites verticales et des droites horizontales coupant deux fois la courbe C.

EXERCICES CH 9

1.

	e^x	1+x	$1+x+\frac{1}{2}x^2$	$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$	cos(x)	$1-\frac{1}{2}x^2$	$1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$
0	1	1	1	1	1	1	1
1/10	1,1051709	1,1	1,105	1,1051667	0,9950042	0,995	0,9950041
2/10	1,2214027	1,2	1,22	1,2213333	0,9800666	0,98	0,9800667
3/10	1,3498588	1,3	1,345	1,3495	0,9553365	0,955	0,9553375
4/10	1,4918247	1,4	1,48	1,4906667	0,921061	0,92	0,9210666
5/10	1,6487212	1,5	1,625	1,645833	0,877582	0,875	0,8776041
6/10	1,8221188	1,6	1,78	1,816	0,8253356	0,82	0,8254
7/10	2,0137527	1,7	1,945	2,0021666	0,7648421	0,755	0,7650041
8/10	2,2255409	1,8	2,12	2,2053333	0,6967068	0,68	0,6970666
9/10	2,4596031	1,9	2,305	2,4265	0,62161	0,595	0,6223375
1	2,7182818	2	2,5	2,6666667	0,5403023	0,5	0,5416666

2.



3. (a) $\mathrm{Log}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ (b) $\frac{2x}{1-x^2} = 2x + 2x^3 + o(x^3)$

(c) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x + \frac{x^3}{8} + o(x^3)$ (d) $\sin(2x)\ (e^{-x} - 1) = -2x^2 + x^3 + o(x^3)$

(e) $\frac{\mathrm{Log}(1-x^2)}{1+2x} = -x^2 + 2x^3 + o(x^3)$ (f) $\mathrm{Log}(\mathrm{tg}(x)/x) = \frac{-x^2}{3} + o(x^2)$

(g) $\mathrm{Log}(2+x^2) = \mathrm{Log}(2) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^5)$ (h) $(1-3\sin(x))^{1/x} = e^{-3}(1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{13}{8}x^2 + o(x^2))$

(i) $\frac{x}{\sin(x)} = \frac{1}{\sin(x)/x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + o(x^5)$ (j) $(1+\mathrm{tg}(x))^{\sin(x)} = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + x^4 - x^5 + o(x^5)$

(k) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x)-x^2}{x^2\sin^2(x)} = \frac{-1}{3} + o(x)$ (l) $\mathrm{Arctg}(\frac{1}{1+x}) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + o(x^4)$

4. (a) $x\mathrm{Log}(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)$ (b) $\mathrm{Log}(1-x) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = \begin{cases} o(x^3) \\ -\frac{x^4}{4} + o(x^4) \end{cases}$

(c) $e^x\sqrt{1+x} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{8} + \frac{17x^3}{48} + o(x^3)$ (d) $\mathrm{Log}\left(\frac{1-x+x^2}{1+2\sin(x)}\right) = -3x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)$

(e) $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$ (f) $\sqrt{x^2+\cos(x)} + 2\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)} = 3 + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

(g) $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 - \frac{15}{16}x^3 + o(x^3)$ (h) $(1+x)^x = 1 + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$

(i) $f(x) = 3 - \frac{3}{2}x - \frac{33}{8}x^2 + o(x^2)$ (j) $f(x) = e^{1/4}\left[1 - \frac{x^2}{96} + o(x^3)\right]$

(k) $f(x) = e^{-1/2}\left[1 + \frac{3}{8}x - \frac{7}{128}x^2 + o(x^2)\right]$ (l) $x^{10}\ \mathrm{Arctg}(x) = x^{11} + o(x^{12})$

5. (a) $f(x) = 13 + 7(x-3) + (x-3)^2 + o((x-3)^2)$ (b) $\exp(\sqrt{3+x}) = e\ (1 + \frac{(x-2)}{2} + o((x+2)^2)$

(c) $\sin(x) = 1 - \frac{(x-\pi/2)^2}{2} + o((x-\pi/2)^3)$ (d) $\sqrt{x} = \sqrt{2}\ (1 + \frac{(x-2)}{4} - \frac{(x-2)^2}{32} + \frac{(x-2)^3}{128} + o((x-2)^3))$

(e) $\mathrm{Log}(1+\cos(x)) = \mathrm{Log}(\frac{3}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{3}(x-\pi/3) - \frac{1}{3}(x-\pi/3)^2 + o((x-\pi/3)^2)$

6. (a) $-x^3/6$ (b) $x^5/120$ (c) $-x^3/3$ (d) $(x-\pi/2)^3/2$ (e) $-7/6$ en $+\infty$ et $11/6$ en $-\infty$

7. (a) $x^5/2$ (b) $x^4/3$ (c) $1/2$ (d) $\frac{5}{6x^2}$ en $+\infty$ et $\frac{-1}{6x^2}$ en $-\infty$

8. (a) $3/2$ (b) $-\infty$ (c) 1 (d) $e^{1/3}$

9. (a) $+\infty$ (b) $e^{-1/3}$ (c) 1 (d) $1/2$

10. (a) $x\mathrm{Log}(15)$ (b) 15

11. (a) $xe^x - \mathrm{Log}(1+x) \underset{0}{\sim} 3x^2/2$; $(2x-x^2)^2 \underset{0}{\sim} 4x^2$; $f(x) \underset{0}{\sim} 3/8$; $\lim_{x\to 0} f(x) = 3/8$.

(b) $x+\sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} x$; $x^2+\mathrm{Log}(x) = x^2(1 + \frac{\mathrm{Log}(x)}{x^2}) = x^2(1+o(1)) \underset{+\infty}{\sim} x^2$; $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

$x+\sqrt{x} \underset{0^+}{\sim} \sqrt{x}$; $x^2+\mathrm{Log}(x) = \mathrm{Log}(x)(1 + \frac{x^2}{\mathrm{Log}(x)}) \underset{0^+}{\sim} \mathrm{Log}(x)$; $g(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{Log}(x)}$; $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$

12. f est dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ en vertu de th. gén.; en 0, on fait un DL de f d'ordre 1:

$$f(x) = \frac{2\sin(x/2)-x}{x\sin(x/2)} = \frac{-x^3/24 + o(x^3)}{x^2/2 + o(x^2)} = \frac{-x}{12}\frac{1+o(1)}{1+o(1)} = \frac{-x}{12}(1+o(1)) = \frac{-x}{12} + o(x)$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, i.e., f est continue en 0, et que $\lim_{x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \frac{-1}{12}$, i.e., f est dérivable en 0: $f'(0) = -1/12$.

13.

u_n	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Equiv.	$-1/(2n)$	$\sqrt{n}$	$5/(6n^2)$	Log(5)	2
Limite	0	$+\infty$	0	Log(5)	2

14.

u_n	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Equiv.	$-1/6$	$1/n$	$2n^{1/3}/3$	Log(5/3)	$-1/(3n^2)$
Limite	$-1/6$	0	$+\infty$	Log(5/3)	0

15. $\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2} = 1 + \frac{1}{n}\text{Log}(ab) + o(\frac{1}{n})$; $\text{Log}(u_n) \sim \text{Log}(ab)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = ab$

16. (a) $f(x) = -4x-4-\frac{5}{x} + o(\frac{1}{x})$; $y = -4x-4$ asymptote en $+\infty$ et $-\infty$; G_f au dessous en $+\infty$, **au dessus en $-\infty$.**

(b) $f(x) = -\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$; $y = 0$ asymptote en $+\infty$ et $-\infty$; G_f au dessous en $+\infty$, au dessus en $-\infty$.

(c) $f(x) = -x-1-\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$; $y = -x-1$ asymptote en $+\infty$ et $-\infty$; G_f au dessous en $+\infty$, **au dessus en $-\infty$.**

(d) $f(x) = x - \frac{3}{2x} + o(\frac{1}{x})$; $y = x$ asymptote en $+\infty$ et $-\infty$; G_f au dessous en $+\infty$ au dessus en $-\infty$.

(e) $f(x) = \varepsilon\left[x + \frac{m+1}{4x} + \left(\frac{m}{4} - \frac{3}{32}(m+1)^2\right)\frac{1}{x^3} + o(\frac{1}{x^3})\right]$ où $\varepsilon = 1$ en $+\infty$ et $\varepsilon = -1$ en $-\infty$.

Asymptotes: $y = x$ en $+\infty$, $y = -x$ en $-\infty$.

Position: $\begin{cases} \text{si } m > -1, \ G_f \text{ au dessus en } +\infty \text{ et } -\infty \\ \text{si } m < -1, \ G_f \text{ au dessous en } +\infty \text{ et } -\infty \\ \text{si } m = -1, \ G_f \text{ au dessous en } +\infty \text{ et } -\infty \end{cases}$

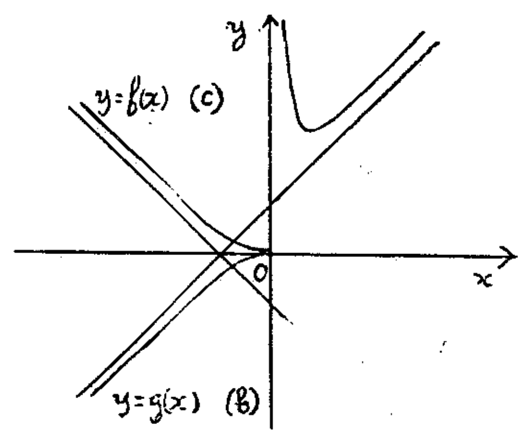
20. (a) est similaire à l'exemple 7 du paragraphe §3.

(b) $D_g = \mathbf{R}^*$; $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = 0$;

On pose $g(0) = 0$, la fonction ainsi prolongée est continue et dérivable à gauche de 0 ($g'_g(0) = \lim\limits_{x\to0^-} e^{1/x} = 0$).

$g'(x) = \frac{x-1}{x} e^{1/x} \qquad (x \neq 0)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
g'(x)		+	‖	-	0	+	
g(x)	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$



$g(x) = x + 1 + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$; $y = x+1$ asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$; G_g au dessus en $+\infty$, au dessous en $-\infty$.

$g''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3}$; g convexe sur $]0,+\infty[$, concave sur $]-\infty,0]$.

(c) Le graphe G_f s'obtient à partir du précédent en effectuant sur $\mathbf{R}^*_-$ une symétrie par rapport à Ox.

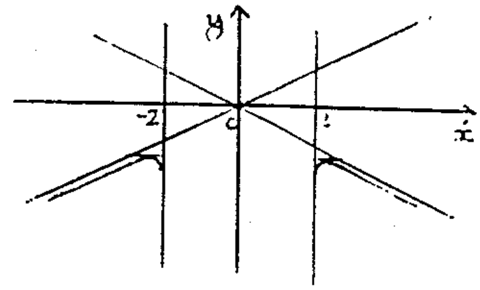
(d), (e) sont similaires à (b)

(f) est similaire à (a).

(g) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4} - \sqrt{x^2-1}$; $D_f =]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$; f est paire ; f est continue sur D_f mais **dérivable** sur l'ensemble $D_f\setminus\{-2,2\}$.

$f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2-4}\sqrt{x^2-1}}\left[\sqrt{x^2-1} - 2\sqrt{x^2-4}\right]$

x	2		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$-3/2$	$\searrow$	$-\infty$

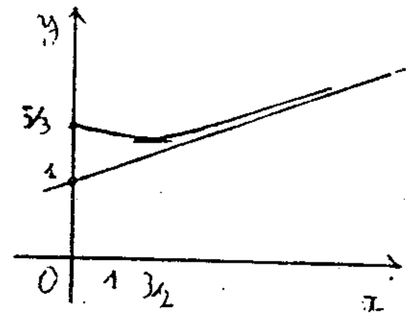


En $+\infty$, $f(x) = \dfrac{-x}{2} - \dfrac{1}{2x} + o(\dfrac{1}{x})$; la droite $y = -x/2$ est asymptote ; G_f est au dessous.

(h) est similaire à (g).

21. (a) $f'(x) = \dfrac{5x-3\sqrt{x^2+4}}{15\sqrt{x^2+4}}$

x	0		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$5/3$	$\searrow$	$23/15$	$\nearrow$	$+\infty$



(b) $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{3x^2} + o(\dfrac{1}{x^2})$; la droite $y = \dfrac{2}{15}x+1$ est asymptote en $+\infty$; le graphe G_f est au dessus.

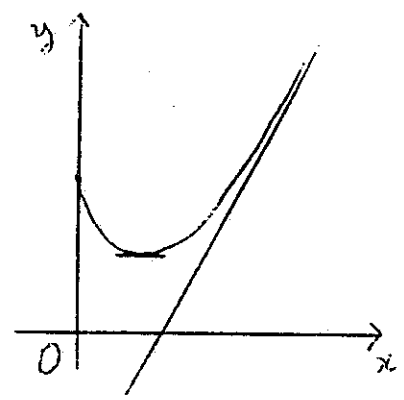
(d) La durée du parcours, exprimée en h. est

$$t = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{5-x}{5} = f(x)$$

Elle est minimale pour $x = 3/2$.

22. (a) $f'(x) = \dfrac{5x-2}{\sqrt{5x^2-4x+1}}$

x	0		$2/5$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1/\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$



(b) $\dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{5} - \dfrac{2\sqrt{5}}{5x} + \dfrac{1}{50x^2} + o(\dfrac{1}{x^2})$; la droite $y = \sqrt{5}x - \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ est asymptote en $+\infty$; G_f est au dessus.

(c) f n'est pas injective (Test des horizontales) ; l'ensemble image est $f(\mathbf{R}_+) = [\sqrt{5}/5, -\infty[$.

(d) $d = \sqrt{(100t)^2+(100-200t)^2} = 100\ f(t)$

L_2 parviendra à joindre L_1 par radio si à un instant t, la distance d devient ≤ 40, i.e., a valeur minimale de f(t) est $\leq 2/5$. Mais $\sqrt{5}/5 > 2/5$: la réponse est NON.

27. $\delta = 626^{1/4} = (5^4+1)^{1/4} = (5^4)^{1/4} + \dfrac{(5^4)^{-3/4}}{4} - \dfrac{3}{32}c^{-7/4} = 5{,}002 - \dfrac{3}{32}c^{-7/4}$ où $c \in\ ]5^4, 5^4+1[$.

D'où l'encadrement $5{,}0019987 < \delta < 5{,}002$; l'erreur commise est $< 0{,}0000013$.