UNIVERSITE LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATHÉMATIQUES**
Filière: **DEUG SV 1ère année, Section 4**
Année universitaire: **1998/1999**
Date et heure: **mercredi 13 janvier 1999 à 16:15**
Durée de l'épreuve: **2H00**

Ni calculatrices ni documents

Exercice 1 [8 pts]: (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $f(u) = \dfrac{2-u^2}{(u-1)(u^2+1)}$

(b) Calculer l'intégrale indéfinie $\displaystyle\int \frac{(2-u^2)\ du}{(u-1)(u^2+1)}$

Exercice 2 [7 pts]: Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_1 = \dfrac{11}{4} \end{cases} \quad \text{où } f(x) = x^2 - 4x + 6.$$

(a) Faire une étude graphique de la suite $(u_n)_{n>0}$.

(b) Montrer que $\begin{cases} \bullet\ f(x) \leq x \text{ pour } x \in [2,3] \\ \bullet\ f([2,3]) = [2,3] \end{cases}$

(c) En utilisant (b), <u>démontrer</u> que la suite $(u_n)_{n>0}$ est décroissante et minorée. Que peut-on en déduire?

Exercice 3 [4 pts]: En utilisant la méthode des différentielles, donner une valeur approchée de $\delta = \sqrt[3]{0,97}\ e^{0,02}$

Exercice 4 [4 pts]: Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 entre les points 0 et x pour la fonction $f(x) = e^{\sin(x)}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1 - x}{x^2}$.

Exercice 5 [4 pts]: Dire si les séries de terme général u_n sont convergentes et calculer leur somme le cas échéant.

(a) $u_n = \dfrac{3^{3n}}{n!}$

(b) $u_n = \dfrac{2n^2+1}{3n^2-n}$

Exercice 6 [4 pts]: Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe $y = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ sur l'intervalle $[1, 2]$.

Exercice 7 [4 pts]: Calculer l'intégrale double $\int\int_R (x+2y)\ dA$ où R est le domaine plan limité par la droite $y = x$ et la parabole $y = x^2$.

UNIVERSITE LILLE 1

Enseignant responsable: **P. DÈBES**
Matière: **MATHÉMATIQUES**
Filière: **DEUG SV 1ère année, Sections 4, 5 et 7**
Année universitaire: **2000/2001**
Date: **15 janvier 2001**
Durée de l'épreuve: **2H00**

Ni calculatrices ni documents

Exercice 1 [12 pts]: Soit $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

(a) Déterminer les points stationnaires de $f(x,y)$ et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum relatif, d'un minimum relatif ou d'un col.

(b) Ecrire la différentielle totale de f au point $(1,1)$ pour un accroissement $(\Delta x, \Delta y)$ de (x,y). En déduire une valeur approchée de $f(x,y)$ pour $x = 1,01$ et $y = 0,98$.

Exercice 2 [12 pts]: (a) Faire la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ de

$$f(x) = \frac{2(3-x)}{(x+3)(x^2+1)}$$

On la cherchera sous la forme $f(x) = \dfrac{a}{x+3} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$

(b) Soit $g(x) = \dfrac{10(1-x^2)}{(x+3)^2(x^2+1)}$. Montrer que

$$g(x) + \frac{8}{(x+3)^2} = \frac{2(3-x)}{(x+3)(x^2+1)}$$

et en déduire la décomposition en éléments simples de $g(x)$ sur $\mathbf{R}$.

(c) Déterminer une primitive $G(x)$ de $g(x)$ sur $]-3, +\infty[$.

(d) Soit $h(x)$ la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par

$$h(x) = \frac{5\cos(x)}{3\sin(x) + 4\cos(x) + 5}$$

En effectuant le changement de variable $u = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$, déterminer une primitive H de h; on pourra exprimer H en fonction de G. Rappel: $\sin(x) = \dfrac{2u}{1+u^2}$ et $\cos(x) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$

Exercice 3 [6 pts]: (a) Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au point 0 pour les fonctions $\sin(x)$ et $\mathrm{tg}(x)$.

(b) En déduire la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x) - x}{x - \sin(x)}$

UNIVERSITE LILLE 1

Enseignants: **M-F. BARME, G. CHARLET, P. DÈBES, J-P. DOERAENE**
Matière: **MATHÉMATIQUES**
Filière: **DEUG SV 1ère année**
Année universitaire: **2001/2002**
Date: **samedi 12 janvier 2002 à 8h**
Durée de l'épreuve: **2h00**

Ni calculatrices ni documents.
Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 [7,5 pts]: Déterminer les extrema relatifs (maxima, minima et cols) de la fonction

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - \frac{1}{2}x^3$$

Exercice 2 [7,5 pts]: Soit $f(x) = \dfrac{x^2-9}{(x+2)(x^2+1)}$

(a) Déterminer les nombres réels a, b, c tels que

$$f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

(b) En déduire une primitive de $f(x)$.

(c) Calculer $\int_1^{\sqrt{3}} f(x)dx$.

Exercice 3 [7,5 pts]: On considère les points suivants dans l'espace $\mathbf{R}^3$

$$A(1,0,0) \qquad B(1+t, 2t, 0) \qquad C(1, -\frac{1}{t}, \frac{1}{t}) \qquad D(1+t, \frac{2t^2-1}{t}, \frac{1}{t})$$

où t est un paramètre réel non nul.

(a) Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Que peut-on dire du quadrilatère $\mathcal{Q}$ de sommets A, B, C, D?

(b) Calculer l'aire du quadrilatère $\mathcal{Q}$. Que remarque-t-on?

(c) Existe-t-il une valeur de t pour laquelle $\mathcal{Q}$ est un rectangle?

Exercice 4 [7,5 pts]:

(a) Calculer la dérivée de la fonction f définie pour $x \in]-1;1[$ par

$$f(x) = \text{Arcsin}\, x - \text{Arctan}\, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(b) Déduire de (a) la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in]-1;1[$.

(c) Retrouver (b) en calculant

$$\sin\left(\text{Arcsin}\, x - \text{Arctan}\, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Indication : Si $\cos\beta \neq 0$, on a
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\, \cos\beta - \sin\beta\, \cos\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha\, \tan\beta)\, \cos\beta$

UNIVERSITE LILLE 1

Enseignants: **M-F. BARME, P. DÈBES, J-P. DOERAENE**
Matière: **MATHÉMATIQUES**
Filière: **DEUG SV 1ère année**
Année universitaire: **2002/2003**
Date: **14 janvier 2003 à 10h30**
Durée de l'épreuve: **2h00**

Ni calculatrices ni documents.

Exercice 1 [10 pts]: (a) Déterminer les extrema relatifs (maxima, minima et cols) de la fonction $f(x, y) = 45xy - 5x^2y - 3xy^2$.

On considère le parallélépipède ci-dessous de côtés les trois vecteurs $\overrightarrow{u} = (3x, 4x, 0)$, $\overrightarrow{v} = (y, 2y, 2y)$ et $\overrightarrow{w} = (0, 0, z)$ où x, y et z sont trois nombres réels > 0.

(b) Calculer la somme L des longueurs des trois côtés $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ du parallélépipède.

(c) Calculer le volume $V = |(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}|$ du parallélépipède et montrer qu'il est de la forme $V = axyz$ où a est une constante que l'on déterminera.

(d) On suppose que $L = 45$. Pour quelles valeurs de x, y et z le volume V du parallélépipède est-il maximal?

Exercice 2 [10 pts]: Soit $f(x) = \dfrac{6x^2 + 9x + 2}{(x-1)(2x^2 + 6x + 9)}$

(a) Déterminer les nombres réels a, b, c tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx + c}{2x^2 + 6x + 9}$$

(b) En déduire une primitive de $f(x)$.

Exercice 3 [10 pts]: On considère la courbe d'équation $x = \dfrac{y^2}{4}$,

qu'on peut paramétriser par $\begin{cases} x = t^2/4 \\ y = t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$.

Soit $\mathcal{C}$ la portion de cette courbe allant du point $A(1, 2)$ au point $O(0, 0)$.

(a) Dessinez (sommairement) cette portion de courbe $\mathcal{C}$.

(b) Calculez $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (2y^2 - 2xy + 1)\, dx + (4xy - x^2)\, dy$

(c) Trouvez une fonction $f(x, y)$ telle que $df = (2y^2 - 2xy + 1)\, dx + (4xy - x^2)\, dy$

(d) Pouvez-vous retrouver le résultat de la question (b) au moyen de la fonction f trouvée en (c) ?

UNIVERSITE LILLE 1

Enseignants: **M-F. BARME, P. DÈBES, J-P. DOERAENE**
Matière: **MATHÉMATIQUES**
Filière: **DEUG SV 1ère année**
Année universitaire: **2002/2003**
Date et heure: **septembre 2003**
Durée de l'épreuve: **1h30**

Ni calculatrices ni documents

Exercice 1 [10 pts]: (a) (5 pts) Montrer que

$$f(u) = \frac{2u^2 + 3u - 1}{(u+1)(u^2+1)}$$

peut s'écrire sous la forme

$$f(u) = \frac{A}{u+1} + \frac{Bu}{u^2+1}$$

où A et B sont deux constantes réelles que l'on déterminera.

(b) (5 pts) Calculer la primitive $\displaystyle\int \frac{2u^2 + 3u - 1}{(u+1)(u^2+1)}\, du$

Exercice 2 [10 pts]: (a) (3 pts) Déterminer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(b) (2 pts) Ecrire la différentielle de $f(x,y)$ au point $(x_o, y_o) \in \mathbf{R}^2$

(c) (5 pts) En utilisant la méthode des différentielles, donner une valeur approchée de la longueur de l'hypothénuse h d'un triangle rectangle dont les côtés perpendiculaires sont de longueur $4,02$ cm et $2,94$ cm, qu'on approchera par 4 cm et 3 cm respectivement.

Exercice 3 [10 pts]: Le carbone 14 est un isotope du carbone qui est présent dans tout organisme vivant. Le nombre d'atomes de carbone 14 est constant tant que l'organisme est en vie. A la mort de l'organisme, le nombre d'atomes décroît, de façon exponentielle; précisément, si $N(t)$ est le nombre d'atomes restants après t années, on a

$$N(t) = N(0)e^{-kt}$$

où $k > 0$ est une constante. On sait qu'il faut 5700 ans pour que la quantité de carbone 14 diminue de moitié dans un organisme mort.

(a) (5 pts) Montrer que la constante k vaut $k = \dfrac{\log(2)}{5700}$.

(b) (5 pts) Des ossements anciens récemment exhumés contiennent 9 fois moins de carbone 14 que des ossements similaires d'aujourd'hui. Déterminer l'âge des ossements exhumés.

UNIVERSITE LILLE 1

Enseignants: **M-F. BARME, P. DÈBES, J-P. DOERAENE**
Matière: **MATHÉMATIQUES**
Filière: **DEUG SV 1ère année**
Année universitaire: **2003/2004**
Date: **10 janvier 2004 à 8h**
Durée de l'épreuve: **2 heures**

Ni calculatrices ni documents.

Exercice 1 [9 pts]: Déterminer les extrema relatifs (maxima, minima et cols) de la fonction $f(x,y) = 2xy^2 - x^2y + 6x$.

Exercice 2 [9 pts]: Soit $f(x) = \dfrac{6x^2 - 3x - 1}{(x-2)(2x^2+2x+5)}$

(a) Déterminer les nombres réels a, b, c tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{2x^2+2x+5}$$

(b) En déduire une primitive de $f(x)$.

Exercice 3 [9 pts]: Deux enfants tirent une luge au moyen de deux cordes. On note O le point d'attache de la luge et A et B les points où les deux enfants tiennent leur corde. Dans le repère ci-dessous, ces points sont de coordonnées:

$$O(0\,,0\,,0) \;\;;\;\; A(1\,,a\,,1) \;\;;\;\; B\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\,,\;b\;,\;\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)$$

où a et b sont deux nombres réels > 0.

On note $\overrightarrow{F} = \alpha\,\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{G} = \beta\,\overrightarrow{OB}$ les forces de traction exercées en A et en B (avec $\alpha, \beta > 0$).

(a) Sachant que les deux cordes sont de même longueur $L = 2$ déterminer les coordonnées manquantes a et b des points A et B.

(b) Sachant que $||\overrightarrow{F}|| = 4$, déterminer $\overrightarrow{F}$, puis trouver $\overrightarrow{G}$ pour que la résultante $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$ soit de composante nulle dans la direction de Ox.

(c) Soit I le point de coordonnées $(0, 2, 0)$. Calculer le produit scalaire $W = (\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) \cdot \overrightarrow{OI}$. Que représente le nombre W en Physique?

Exercice 4 [3 pts]: Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{4+\cos(2x)}\,dx$

<u>UNIVERSITÉ LILLE 1</u>

Enseignants: **M-F. BARME, P. DÈBES, J-P. DOERAENE**
Matière: **MATHÉMATIQUES**
Filière: **DEUG SV 1ère année**
Année universitaire: **2003/2004**
Date et heure: **septembre 2004**
Durée de l'épreuve: **2h00**

Ni calculatrices ni documents

Exercice 1 [16 pts]: Soient les vecteurs

$$\vec{u} = (-2, -4, -8) \quad \text{et} \quad \vec{v} = (-1, 2, 4)$$

(a) Calculer la somme $\vec{u} + \vec{v}$, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$, et le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

(b) Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{i} = (1, 0, 0)$. Pourquoi? Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et l'axe des x sont dans un même plan $\mathcal{P}$.

(d) Si on considère que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentent des forces appliquées à l'origine O des axes, la somme $\vec{u} + \vec{v}$ représente la force résultante. Si on laisse inchangée la force représentée par $\vec{u}$, par quel facteur k doit-on multiplier la force représentée par $\vec{v}$, pour faire en sorte que la force résultante $\vec{u} + k\vec{v}$ soit dirigée dans la direction de l'axe des x?

Exercice 2 [17 pts]: L'indice de réfraction du prisme pour une radiation donnée est déterminée par la relation :

$$n = \frac{\sin \frac{A+D}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

où A est l'angle du prisme et D l'angle de déviation minimum pour la raie choisie. On a observé pour la raie verte du cadmium :

$$\begin{cases} A = \dfrac{\pi}{3} \\ D = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

Déterminer l'indice n et l'incertitude sur n sachant que l'incertitude sur les mesures des angles A et D est $\Delta A = \Delta D = 5.10^{-4}$ radian.

Exercice 3 [17 pts]: (a) Montrer, qu'en posant $u = \sin(t)$, on a

$$\int \frac{\cos^3(t)}{\sin^5(t)} dt = \int \frac{1 - u^2}{u^5} du$$

(b) En déduire $\displaystyle\int \frac{\cos^3(t)}{\sin^5(t)} dt = \frac{2\sin^2(t) - 1}{4\sin^4(t)} + k \qquad (k \in \mathbf{R})$.

(c) Montrer que $\cos^4(t) = \sin^4(t) - 2\sin^2(t) + 1$.

(d) En déduire $\displaystyle\int \frac{\cos^3(t)}{\sin^5(t)} dt = -\frac{1}{4\mathrm{tg}^4(t)} + C \qquad (C \in \mathbf{R})$.

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant: **P. DÈBES**
Matière: **MATHÉMATIQUES**
Filière: **DEUG SV 1ère année**
Année universitaire: **2004/2005**
Date et heure: **le vendredi 19 novembre à 8h**
Durée de l'épreuve: **1h30**

Ni calculatrices ni documents

Exercice 1 [6 pts]: Une somme d'argent A est placée au taux d'intérêt annuel r. Après 2 ans et 3 ans, le capital vaut respectivement $C(2) = 480$ et $C(3) = 640$. Que valent r et A?

Exercice 2 [6 pts]: Montrer que $\arccos(7/8) = 2\arcsin(1/4)$.
(On rappelle la formule $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$).

Exercice 3 [8 pts]: (a) Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour la fonction $g(u) = \sqrt[4]{1+u}$ entre 0 et u.
(b) Le graphe de la fonction $\sqrt[4]{x^4 + 2x^3}$ présente-t-il une asymptote quand $x \to +\infty$? Si oui, donner son équation et préciser la position du graphe par rapport à son asymptote.

Exercice 4 [6 pts]: Pour l'expression

$$\ell(x,y) = (2\cos(y) + ye^x)dx + (-2x\sin(y) + e^x + 1)dy$$

déterminer s'il existe $f(x,y)$ tel que $\ell(x,y) = df$.

Exercice 5 [8 pts]: (a) Calculer les trois dérivées partielles de $f(x,y,z) = 2x\sqrt{y/z}$ et en déduire la différentielle df.

La période T d'un pendule, exprimée en secondes, est donnée par la formule $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ où ℓ est sa longueur exprimée en mètres et g l'accélération de la pesanteur en mètres par seconde au carré.

(b) Pour un pendule donné, on mesure $\ell = 10\,\text{cm}$. En prenant $\pi = 3$ et $g = 10\text{m}/s^2$, qu'obtient-on pour T?

(c) Estimer l'incertitude sur T sachant que $\Delta\pi = 2.10^{-1}$, $\Delta\ell = 1\,\text{mm}$ et $\Delta g = 2.10^{-1}\text{m}/s^2$.

Exercice 6 [6 pts]: Soit $w = f(x+y-3z, y-2z, z-x)$. Montrer que $\dfrac{\partial w}{\partial x} + 2\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignants: **M.-F. BARME, N. BORNE, P. DÈBES, J.-P. DOERAENE, M. QUEFFELEC**
Matière: **MATHÉMATIQUES**
Filière: **Licence SVTE Semestre 1**
Année universitaire: **2004/2005**
Date et heure: **le lundi 10 janvier 2005 à 10h**
Durée de l'épreuve: **2h**

Ni calculatrices ni documents ni portables

Exercice 1 [16 pts]: (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{2x^2+4x}{(x+1)(x^2+1)}$$

(b) Calculer la primitive $\displaystyle\int \frac{2x^2+4x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$

Exercice 2 [22 pts]: (a) Montrer que les fonctions $\ln(ax)$ et $\ln(\frac{a}{x})$ ont pour dérivées respectives $\frac{1}{x}$ et $\frac{-1}{x}$ (où a est une constante réelle non nulle).

(b) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ de la fonction $f(x,y,z) = -\frac{1}{x}\ln\left(\frac{y}{x\,z}\right)$ et écrire la différentielle df.

Soient N_0 le nombre de millions d'atomes de carbone 14 présents par gramme dans un organisme vivant sur terre et $N(t)$ le nombre de millions d'atomes de carbone 14 par gramme au temps t après sa mort. On rappelle que $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ où λ est une constante liée au carbone 14. On note $V = -N'(t)$ la vitesse de désintégration du carbone 14 (exprimée en millions d'atomes par an et par gramme).

(c) Exprimer t en fonction de V, N_0 et λ; vérifier que $t = f(\lambda, V, N_0)$.

On estime connaître $N_0 = 68000$ à 500 près (on compte ici en millions d'atomes) et $\lambda = 0{,}0001244$ (l'unité est 1/an) à 10^{-7} près. Dans un morceau de sarcophage égyptien, on mesure environ 10 désintégrations par minute et par gramme, soit une vitesse de désintégration $V = 5,256$ (en millions par an et par gramme) à $0,01$ près.

(d) Ecrire l'âge t (en années) du sarcophage en fonction de ces données, et l'incertitude sur t résultant des incertitudes sur N_0, λ et V.
N.B.: on ne demande pas d'effectuer les calculs.

.../...

Exercice 3 [22 pts]: On considère les points de l'espace à trois dimensions de coordonnées $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(1,1,1)$.

(a) Montrer que $ABCD$ est un tétraèdre régulier (c'est-à-dire que toutes ses faces sont des triangles équilatéraux).

(b) On définit le centre du gravité G du tétraèdre $ABCD$ par la relation :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$$

Déterminer les coordonnées de G.

(c) Calculer la surface du tétraèdre $ABCD$.

(d) La molécule de méthane CH_4 comporte quatres atomes d'hydrogène situés aux sommets d'un tétraèdre régulier et un atome de carbone situé en son centre. Calculer l'angle entre deux liaisons CH (on pourra donner son cosinus).

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant: **P. DÈBES**
Matière: **MATHÉMATIQUES**
Filière: **Licence SVTE 1er semestre**
Année universitaire: **2005/2006**
Date et heure: **le vendredi 4 novembre à 8h**
Durée de l'épreuve: **1h30**

Ni calculatrices ni documents

Exercice 1 [8 pts]: La population de Valenciennes est de 133100 habitants en 2005 et était de 121000 habitants en 2000.

(a) En supposant que son taux de croissance est constant, montrer que la population $P(n)$ à l'année n est

$$P(n) = 121000 \left(\frac{11}{10}\right)^{(n-2000)/5}$$

(b) Calculer en quelle année sa population était de 100 000 habitants.

Exercice 2 [8 pts]: (a) Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour la fonction $g(x) = e^{x^2-2x}$ entre les points $x_0 = 1$ et $x_0 + h = x$.

(b) En déduire $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{x^2-2x} - 1}{(x-1)^2}$

Exercice 3 [8 pts]: (a) Calculer $\cos(2\arcsin(1/4))$.

(On rappelle la formule $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$).

(b) Montrer que $\arccos(7/8) = 2\arcsin(1/4)$.

Exercice 4 [8 pts]: Pour l'expression

$$\ell(x, y) = \sin(y)e^x \, dx + \cos(y)(e^x + 1) \, dy$$

déterminer s'il existe $f(x, y)$ tel que $\ell(x, y) = df$.

Exercice 5 [8 pts]: (a) Une première mesure des côtés perpendiculaires d'un triangle rectangle donne 3 cm et 4 cm. Quelle longueur obtient-on à partir de ces mesures pour son hypoténuse?

(b) Une mesure plus précise donne 4,02 cm et 2,94 cm pour la longueur des deux côtés. En utilisant la méthode des différentielles, donner une estimation de la correction à apporter au premier calcul.

UNIVERSITE LILLE 1

Enseignants: **M-F. BARME, P. DÈBES, J-P. DOERAENE, J. NAGEL, M. QUEFFELEC, L. RAMERO**
Matière: **MATHÉMATIQUES**
Filière: **Licence SVTE 1ère année**
Année universitaire: **2005/2006**
Date et heure: **Mardi 3 Janvier 2006, 10H30**
Durée de l'épreuve: **2H**

Ni calculatrices, ni documents, ni portables

Exercice 1 [16 pts]:
(a) Déterminer les extrema relatifs (maxima, minima et cols) de la fonction

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y + 18$$

.
(b) Trouver la norme minimale d'un vecteur $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ dont la somme des composantes, $x+y+z$, vaut 6.

Exercice 2 [16 pts]:
Calculer les intégrales:
$I_0 = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$, $I_1 = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2}\,dx$, $I_2 = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$, $I_3 = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x+1}{x(1+x^2)}\,dx$.

Exercice 3 [12 pts]:
On considère les vecteurs $\overrightarrow{v(t)} = (t, cost, sint)$ et $\overrightarrow{r(t)} = (1, tcost, tsint)$.
(a) Montrer que $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{r})'(t) = \overrightarrow{v'(t)} \cdot \overrightarrow{r(t)} + \overrightarrow{v(t)} \cdot \overrightarrow{r'(t)}$.
(b) Montrer que $(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{r})'(t) = \overrightarrow{v'(t)} \wedge \overrightarrow{r(t)} + \overrightarrow{v(t)} \wedge \overrightarrow{r'(t)}$.
On rappelle que la dérivée d'un vecteur se fait composante par composante : par exemple si $\overrightarrow{u(t)} = (1, t^2, ln(t))$, alors $\overrightarrow{u'(t)} = (0, 2t, 1/t)$.

Exercice 4 [16 pts]:
Soit la fonction d'une variable réelle $f(x) = Arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}tan(\frac{x}{2}))$, considérée sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

(a) Calculer sa dérivée.

(b) Exprimer cette dérivée en fonction de $cos(x/2)$, puis en fonction de $cosx$.

(c) En déduire une primitive de $\frac{1}{2+cosx}$.

Exercice –: On considère les trois points de $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{cases} A(-2, \sqrt{6}, -\sqrt{6}) \\ B(-2, -\sqrt{6}, \sqrt{6}) \\ M(4\cos(t), 2\sqrt{2}\sin(t), -2\sqrt{2}\sin(t)) \end{cases} \qquad \text{où } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

(a) Calculer $||\overrightarrow{AM}||$, $||\overrightarrow{BM}||$ et $||\overrightarrow{AB}||$. Pour quelle(s) valeurs(s) de t le triangle de sommets A, B et M est-il équilatéral? Pour la (ou les) valeur(s) trouvée(s), déterminer l'aire du triangle de sommets A, B et M.

(b) Montrer que

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 8 + 16\cos(t) \\ ||\overrightarrow{AM}||.||\overrightarrow{BM}|| = 16\,(1 + 2\cos(t)) \end{cases}$$

En déduire le cosinus de l'angle α entre les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$. Que remarque-t-on?

UNIVERSITÉ LILLE 1

Enseignant: **P. DÈBES**
Matière: **MATHÉMATIQUES**
Filière: **Licence SVTE 1er semestre**
Année universitaire: **2006/2007**
Date et heure: **novembre**
Durée de l'épreuve: **1h30**

Ni calculatrices ni documents

Exercice 1 [8 pts]: La population de Valenciennes est de 133100 habitants en 2005 et était de 121000 habitants en 2000.

(a) En supposant que son taux de croissance est constant, montrer que la population $P(n)$ à l'année n est

$$P(n) = 121000 \left(\frac{11}{10}\right)^{(n-2000)/5}$$

(b) Calculer en quelle année sa population était de 100 000 habitants.

Exercice 2 [8 pts]: (a) Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour la fonction $g(x) = e^{x^2-2x}$ entre les points $x_0 = 1$ et $x_0 + h = x$.

(b) En déduire $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2-2x}-1}{(x-1)^2}$

Exercice 3 [8 pts]: (a) Calculer $\cos(2\arcsin(1/4))$.

(On rappelle la formule $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$).

(b) Montrer que $\arccos(7/8) = 2\arcsin(1/4)$.

Exercice 4 [8 pts]: Pour l'expression

$$\ell(x, y) = \sin(y)e^x\, dx + \cos(y)(e^x + 1)\, dy$$

déterminer s'il existe $f(x, y)$ tel que $\ell(x, y) = df$.

Exercice 5 [8 pts]: (a) Une première mesure des côtés perpendiculaires d'un triangle rectangle donne 3 cm et 4 cm. Quelle longueur obtient-on à partir de ces mesures pour son hypoténuse?

(b) Une mesure plus précise donne 4,02 cm et 2,94 cm pour la longueur des deux côtés. En utilisant la méthode des différentielles, donner une estimation de la correction à apporter au premier calcul.

UNIVERSITE LILLE 1

Enseignants: **M-F. BARME, N. BORNE, P. DÈBES, J-P. DOERAENE, S. MALEK, J. NAGEL, M. QUEFFÉLEC, M. TIBAR**
Matière: **MATHÉMATIQUES**
Filière: **Licence SVTE 1ère année**
Année universitaire: **2006/2007**
Date et heure: **DS du Samedi 18 Novembre 2006, 8H**
Durée de l'épreuve: **2H**

Ni calculatrices, ni documents, ni portables

Exercice 1 [12 pts] :
(a) Donner la formule de Taylor-Young, en 0, à l'ordre 2, de la fonction $e^{\cos(x)}$.
(b) En déduire

$$\lim_{x\to 0} \frac{e - e^{\cos(x)}}{x^2}$$

Exercice 2 [12 pts] : Soit $f(x) = \arcsin(\frac{1-x^2}{1+x^2})$
(a) montrer que pour tout x réel, $-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$; en déduire le domaine de définition de f.
(b) Etudier la parité de f.
(c) On pose $g(x) = f(x) + 2\arctan(x)$. Montrer que $g'(x) = 0$ pour $x > 0$.
(d) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ pour $x \geq 0$.
(e) Tracer le graphe de f, on pourra commencer par redonner l'allure du graphe de la fonction $\arctan(x)$.

Exercice 3 [8 pts] :
(a) Calculer

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

(conseil : faire le changement $t = 1 + x^2$).
(b) Calculer $\int_0^1 \arctan(x)\, dx$ (conseil : faire une primitive par partie).

Exercice 4 [8 pts] :
Résoudre le système d'équations:

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 16 \\ 2\ln(x) - \ln(y) = \ln(2) \end{cases}$$

UNIVERSITE LILLE 1

Enseignants: **M-F. BARME, N. BORNE, P. DÈBES, J-P. DOERAENE, S. MALEK, J. NAGEL, M. QUEFFÉLEC, M. TIBAR**
Matière: **MATHÉMATIQUES**
Filière: **Licence SVTE 1ère année**
Année universitaire: **2006/2007**
Date et heure: **DS du lundi 8 Janvier 2007, 8H**
Durée de l'épreuve: **2H**

Ni calculatrices, ni documents, ni portables

Exercice 1 [15 pts] : On considère les points $A : (0, 1, 2)$ et $B : (1, 3, -1)$ de $\mathbf{R}^3$ et (D) la droite d'équation paramétrique ($t \in \mathbf{R}$) :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Soit M un point de (D) de paramètre t.
(a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}$.
(b) Calculer sa norme.
(c) Calculer en fonction de t, l'aire du triangle ABM.

Exercice 2 [25 pts] :
Le graphe de la fonction $f(x, y) = x^3 + y^3 + 6xy$ a l'allure ci-dessous

(a) Au vu de la figure, dire lesquels parmi les points $M_1, \ldots, M_5$ sont des points critiques (ou stationnaires). Puis déterminer les coordonnées de ces points critiques (ou stationnaires) et préciser s'ils donnent lieu à un extremum relatif (ou local).

(b) Donner la différentielle df de f. En déduire une valeur approchée de $f(-0.98 , -1.01)$.

(c) Montrer que l'équation du plan $\mathcal{P}$ tangent au graphe de f au point $M_3(-1, -1, 4)$ est $3x + 3y + z + 2 = 0$.

(d) Trouver l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan d'équation $z = 4$.

TSVP

Exercice 3 [20 pts] :
(a) Calculer
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \ dt$$
(indication : utiliser l'égalité $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$).
(b) Calculer
$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2} \ dx$$
(indication : utiliser le changement de variable $x = \sin t$).
(c) Calculer
$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2} \ dx$$

UNIVERSITE LILLE 1

Enseignants: **M-F. BARME, N. BORNE, P. DÈBES, J.-P. DOERAENE, S. MALEK, J. NAGEL, M. QUEFFÉLEC, M. TIBAR**
Matière: **MATHÉMATIQUES**
Filière: **Licence LSTB 1ère année, 1er semestre**
Année universitaire: **2006/2007**
Date et heure: **5 Mars, 10H30**
Durée de l'épreuve: **2H**

Ni calculatrices, ni documents, ni portables

Exercice 1 (18 points) Soit $f(x,y) = x^2 - xy + xy^2 - x^3$.
1) Chercher les points critiques (c.-à-d. stationnaires) de f.
2) Calculer les dérivées partielles secondes de f en chacun des points critiques de f.
3) Donner la nature de ces points (c.-à-d. déterminer si f atteint en chacun d'eux un maximum, minimum ou col).

Exercice 2 (12 points) Soit $f(x) = \ln(1+x) - \ln(x) + x$
1) Donner le domaine de f.
2) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
3) Montrer que f' s'annule en $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
4) Donner le tableau de variations de f (c.-à-d. déterminer sur quels intervalles la fonction est croissante et décroissante, si elle atteint des extrêma et/ou des limites infinies).
5) Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) - \ln(x)$$

En déduire l'équation d'une asymptote de f.
6) Tracer le graphe de f ; on prendra 1,58 comme valeur approchée de $f(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$.

Exercice 3 (12 points) On considère les points $A : (0,1,1)$; $B : (2,0,1)$;
$C : (3,1,-1)$ de $\mathbf{R^3}$.
1) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2) Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 4 (18 points)
1) Vérifier que

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$$

et calculer l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

2) Par une intégration par parties, et en utilisant la question 1) calculer

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+t^2)}{t^3}\, dt.$$

3) Montrer que

$$1 + \tan^2(u) = \frac{1}{\cos^2(u)}$$

4) Calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

On fera le changement de variable $x = \tan(u)$ et on utilisera la question 3).