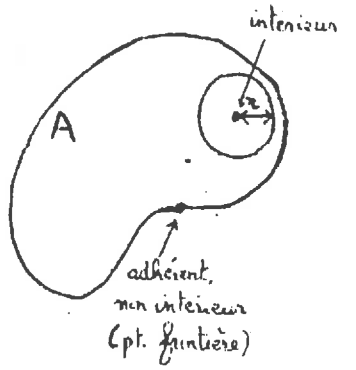
CHAPITRE 2

LIMITES ET CONTINUITÉ

§1. LIMITES.

1.1 Préliminaires "topologiques".



L'étude de la notion de limite est l'occasion d'introduire quelques définitions de "topologie". Nous aurons besoin des notions de point intérieur, de point adhérent et de point d'accumulation d'un ensemble A. Nous commençons par des définitions informelles.

Soit A un sous-ensemble de **R**, $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$. Les **points intérieurs** de A sont les points de A qui ne sont pas sur le "bord" de A. Précisément, un point m_0 est un point intérieur de A si m_0 est dans A et si une distance minimale d > 0 le sépare de tous les points du complémentaire de A (Cf. Déf.1.1). On dit aussi que A est un **voisinage** de m_0 si m_0 est intérieur à A.

Exemple 1 Soit A =]0,1] U {2}. Le point 1/2 est intérieur à A; A est un voisinage de 1/2. Les points 1 et 2 ne sont pas intérieurs à A.

On dit qu'un point m_0 est un **point adhérent** à A si on peut se rapprocher aussi près que l'on veut de m_0 en restant dans A. On dit qu'un point m_0 est un **point d'accumulation** de A si on peut se rapprocher aussi près que l'on veut de m_0 en restant dans A mais sans être égal à m_0 (Cf. Déf.1.1).

Exemple 2 Soit A =]0,1] U {2}; 0, 1, 2 sont adhérents à A; 0, 1 sont des points d'accumulation de A mais 2 n'en est pas un.

Les points de A sont automatiquement adhérents à A. Les points d'accumulation sont automatiquement des points adhérents. Les points intérieurs de A sont automatiquement dans A; ce sont aussi automatiquement des points d'accumulation de A. Toutes les réciproques sont fausses.

Exemple 3 Remarquer qu'un point m_0 est un point intérieur de A ssi il n'est pas adhérent au complémentaire de A.

On définit enfin le **bord** ou la **frontière** de A comme l'ensemble des points qui sont adhérents mais non intérieurs à A.

Formalisation Le reste de cette section va consister à mettre en forme ces définitions. En fait, il s'agit simplement de traduire de façon précise l'idée de proximité. On va utiliser pour cela les notions de distance et de boules. La distance entre deux points a été définie au Ch.1. Rappelons une propriété importante: **l'inégalité triangulaire.** Tout d'abord l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, qui joue le rôle de distance dans **R**:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

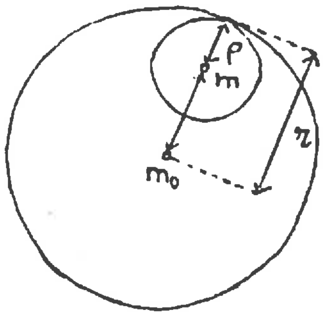
On en déduit l'inégalité suivante, qui est également d'usage fréquent:

$$|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$$

On gardera à l'esprit que $|x-y|$ est la distance $d(x,y)$ sur la droite réelle entre les nombres x et y. Ainsi, la condition $|x-a| < \varepsilon$ signifie simplement que $x \in]a-\varepsilon,a+\varepsilon[$.
De façon générale, notons d la distance sur **R**, $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$. L'inégalité triangulaire pour la distance s'énonce: pour m_1, m_2, m_3 trois points quelconques, on a:

$$d(m_1,m_3) \leq d(m_1,m_2) + d(m_2,m_3)$$

(avec égalité ssi m_2 est sur le segment joignant m_1 à m_3).



On appelle **boule ouverte** (resp. **fermée**) de centre m_0 et de rayon r l'ensemble de tous les points m tels que $d(m_0,m) < r$ (resp. $d(m_0,m) \leq r$). On la note $B(m_0,r)$ (resp. $\overline{B}(m_0,r)$); c'est un intervalle, un disque ou une boule selon que l'on est dans **R**, $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$. Ces notions s'étendent à $\mathbf{R}^n$; il suffit pour cela de définir la distance sur $\mathbf{R}^n$. Si $p(a_1,...,a_n)$ et $q(b_1,...,b_n)$ sont deux points de $\mathbf{R}^n$, leur distance $d(p,q)$ est définie par

$$d(p,q) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + ... + (a_n-b_n)^2}$$

Exemple 4 Soient $m \in B(m_0,r)$ et $\rho = r-d(m_0,m)$. Montrer que $B(m_0,r) \supset B(m,\rho)$.

DEFINITION 1.1 (a) *Un point* m_0 *est dit* ***intérieur*** *à un ensemble* A *si* A *contient une boule ouverte centrée en* m_0 *et de rayon* $r > 0$. *On dit aussi que* A *est un* ***voisinage*** *de* m_0.
(b) *Un point* m_0 *est dit* ***adhérent*** *à un ensemble* A *si toute boule ouverte centrée en* m_0 *et de rayon* $r > 0$ *coupe* A.
(c) *On dit que* m_0 *est un* ***point d'accumulation*** *de* A *si toute boule ouverte centrée en* m_0 *et de rayon* $r > 0$ *coupe* A *en au moins un point autre que* m_0. *On note* A' *l'ensemble des points d'accumulation de* A.

Exemple 5 Soit $A =]0,1] \cup \{2\}$. Montrer que 1/2 est intérieur à A, que ni 1 ni 2 ne sont intérieurs à A, que 0, 1 et 2 sont des points adhérents, que 0 et 1 sont des points d'accumulation de A mais que 2 n'en est pas un.

Solution. 1/2 est intérieur à A car la boule ouverte $B(1/2,1/2) =]0,1[$ contient 1/2 et est inclus dans A. En revanche, 2 n'est pas intérieur à A car il n'existe aucune boule ouverte centrée en 2 qui soit incluse dans A (pour $r > 0$ quelconque, $B(2,r) \cap \complement A \supset]2,2+r[\neq \emptyset$). Le raisonnement est analogue pour 1.
Les points 1 et 2 sont dans A donc sont adhérents à A. 0 est adhérent à A car n'importe quelle boule ouverte centrée en 0 coupe A (les points "proches" de 1 par valeur supérieure). N'importe quelle boule centrée en 1 coupe A en une infinité de points (les points "proches" de 1 par valeur inférieure); donc 1 est un point d'accumulation de A. Raisonnement analogue pour 0. Par contre, la

boule $B(2,1/2) =]3/2,5/2[$ ne coupe A qu'en 2; donc 2 n'est pas un point d'accumulation.

Exemple 6 Soit A une boule ouverte. Déterminer l'ensemble de tous les points intérieurs à A, les points adhérents à A et les points d'accumulation de A. Même question avec A une boule fermée, enfin avec $A = \{ m(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 \leq 4 \} \cup \{0\}$.

Exemple 7 Montrer qu'un point intérieur à un ensemble A est automatiquement un point d'accumulation de A.

Il est d'usage de noter $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble de tous les points intérieurs à A et $\overline{A}$ l'ensemble de tous les points adhérents à A et Fr(A) les points qui sont dans $\overline{A}$ mais pas dans $\overset{\circ}{A}$. Il résulte des définitions que:

$$\begin{cases} \overline{A} \supset A \supset \overset{\circ}{A} \\ \overline{A} \supset Fr(A) \\ \overline{A} \supset A' \supset \overset{\circ}{A} \end{cases}$$

Exemple 8 Pour $A =]0,1] \cup \{2\}$ (voir Exemple 5), nous avons: $\overset{\circ}{A} =]0,1[$, $\overline{A} = [0,1] \cup \{2\}$, $Fr(A) = \{0,1,2\}$ et $A' = [0,1]$.

Exemple 8.1 Montrer que si $A \subset B$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Ouverts et fermés

Un sous-ensemble A de $\mathbf{R}^n$ est dit **ouvert** s'il est voisinage de chacun de ses points, i.e., si

$(\forall m_0 \in A)\ (\exists r > 0)\ (B(m_0,r) \subset A)$

De façon équivalente, A est ouvert ssi $A = \overset{\circ}{A}$.

Exemple 8.2 Montrer que les boules ouvertes sont des ouverts (utiliser l'exemple 4).

Exemple 8.3 Soit A une partie quelconque de $\mathbf{R}^n$. Montrer que l'ensemble $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A. L'ensemble $\overset{\circ}{A}$ est appelé intérieur de A.

Solution. Montrons d'abord que $\overset{\circ}{A}$ est ouvert. Soit $m \in \overset{\circ}{A}$. Par définition, il existe $r > 0$ tel que $B(m,r) \subset A$. En utilisant les exemples 8.1 et 8.2, on obtient

$$B(m,r) = \overset{\circ}{B}(m,r) \subset \overset{\circ}{A}$$

ce qui prouve que m est intérieur à $\overset{\circ}{A}$.
Soit maintenant O un ouvert tel que $O \subset A$. En utilisant l'exemple 8,1, on déduit $O = \overset{\circ}{O} \subset \overset{\circ}{A}$, ce qui montre que $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand des ouverts contenus dans A.

Un sous-ensemble A de $\mathbf{R}^n$ est dit **fermé** s'il contient ses points adhérents, i.e., si $\overline{A} = A$.

Exemple 8.4 Soit A une partie quelconque de $\mathbf{R}^n$. Montrer que A est ouvert ssi son complémentaire CA est fermé, que A est fermé ssi son complémentaire CA est ouvert

Exemple 8.5 Montrer que les boules fermées sont des fermés, mais ne sont pas des ouverts. Montrer que les boules ouvertes ne sont pas des fermés.

Attention! Il existe des ensembles ni ouverts ni fermés, par exemple l'intervalle $[0,1[$. Noter aussi que l'ensemble $\mathbf{R}^n$ est ouvert <u>et</u> fermé.

Exemple 8.6 Soit A une partie quelconque de $\mathbf{R}^n$. Montrer que l'ensemble $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A. L'ensemble $\bar{A}$ est appelé adhérence (ou fermeture) de A.

1.2 Définitions.

La notion de limite est assez naturelle. Par exemple, elle est implicite quand on parle de vitesse instantanée d'un objet: en effet, la vitesse instantanée est la "valeur limite" des vitesses moyennes sur des intervalles de temps de plus en plus petits. La notion de limite dérive de celle de l'infini (l'infiniment grand ou l'infiniment petit): c'est ce qui se passe "à l'infini". Ainsi, 2π est la valeur limite quand n "tend vers l'infini" des périmètres des polygones à n côtés inscrits dans le cercle unité.

Précisons par des exemples numériques. Plus un nombre réel x est grand, plus $1/x$ est petit; on dit que $1/x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et on écrit:

$$\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 1/x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La fonction $\sin(x)/x$ n'est pas définie en 0 mais on s'aperçoit en calculant des valeurs que les nombres $\sin(x)/x$ calculés pour des x de plus en plus petits mais en restant non nuls, se rapprochent d'une valeur limite, à savoir 1. On a:

$$\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1.$$

Exemple 9 A l'aide d'une calculette, on peut voir que $\lim_{x\to+\infty} 2^{1/x} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$, $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$ etc...

Une variable Si la notion de limite est intuitive, en donner une définition est beaucoup plus difficile. Le premier énoncé précis n'apparaît qu'au 19 ème siècle, dans le *Cours d'Analyse* du mathématicien français Cauchy.

(*) Soient x_o et L deux nombres réels. On dit qu'une fonction f(x) a pour limite (ou tend vers) L quand x tend vers x_o si les nombres f(x) deviennent arbitrairement proches de L pourvu que les points x s'approchent suffisamment de x_o.

Notes 1) Comprendre l'expression "arbitrairement proche pourvu que..." est essentiel: cela signifie que la distance entre f(x) et L devient plus petite que n'importe quel nombre > 0, pourvu que...

2) Il y a une condition sur x_0 pour que la définition soit raisonnable. On souhaite regarder les valeurs f(x) de f quand x se rapproche indéfiniment près de x_0, en restant différent de x_0. Encore faut il que l'on puisse, en restant à l'intérieur du domaine D_f de f, se rapprocher indéfiniment près de x_0. Par exemple, il ne peut être question d'étudier la limite de $\sqrt{x}$ quand x tend vers -1. La bonne hypothèse sur x_0 est la suivante: x_0 doit être un point d'accumulation du domaine D_f de f, c'est-à-dire $x_0 \in (D_f)'$. C'est en particulier le cas si D_f contient un voisinage **épointé** de x_0, i.e., un voisinage de x_0 privé de x_0.

La définition suivante reformule de façon axiomatique la définition donnée plus haut.

DEFINITION 1.2 *Soient* f(x) *une fonction,* $x_0 \in (D_f)'$ *et* L *un nombre réel. On dit que* f(x) *a pour limite* L *quand* x *tend vers* x_0 *, ce que l'on note* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *ou* $f(x) \underset{x \to x_0}{\to} L$ si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x-x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$$

Dans la définition suivante, x tend vers $+\infty$, i.e., devient très grand. Il faut supposer que D_f contienne des nombres arbitrairement grands, c'est-à-dire ne soit pas majoré, ce que nous noterons "$+\infty \in (D_f)'$ ".

DEFINITION 1.3 *Soient* f(x) *une fonction telle que* $+\infty \in (D_f)'$ *et* L *un nombre réel. On dit que* f(x) *a pour limite* L *quand* x *tend vers* $+\infty$ *ce que l'on note* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ *ou* $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} L$ si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A > 0)(\forall x \in D_f)(x > A \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$$

On obtient la définition de $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ *en remplaçant* $x > A$ *par* $x < -A$ *dans la définition ci-dessus.*

Exemple 10 Etudier les limites des fonctions suivantes au(x) point(s) indiqués.

(a) $f(x) = 1/x$; $+\infty$ (b) $f(x) = ax+b$; x_0 quelconque

(c) $f(x) = |x|$; $3, x_0$ (d) $f(x) = 2^{1/x}$; $+\infty$

(e) $f(x) = x^2$; 3 (f) $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$; 0,1/2

Solution. (e) <u>Analyse du problème</u>: On soupçonne que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$. Montrons le. Il s'agit de montrer que $|x^2-9|$ devient arbitrairement petit quand x se rapproche de 3. Dans un premier temps, on cherche à majorer $|x^2-9|$ pour comprendre pourquoi cette quantité va devenir "petite". On a $|x^2-9| = |x-3|\ |x+3|$. Il y a 2 termes: le premier $|x-3|$ est petit car x est proche de 3; le second $|x+3|$ est proche de 6; le produit $|x-3|\ |x+3|$ vaut en gros $6\ |x-3|$ et est donc "petit".

Recherche du α: Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Comment choisir $\alpha > 0$ pour que la condition $|x-3| < \alpha$ garantisse $|x^2-9| = |x-3|\ |x+3| < \varepsilon$? Si déjà, on choisit $\alpha < 1$, on aura $2 < x < 4$ et donc $|x+3| < 7$. Si alors on s'arrange pour qu'on ait aussi $\alpha < \varepsilon/7$, on obtiendra

$$|x^2-9| = |x-3|\ |x+3| < 7\ (\varepsilon/7) = \varepsilon\ ,$$

soit la conclusion désirée.

Rédaction: Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $\alpha = \min(1, \varepsilon/7)$. Soit $x \in D_f$ tel que $|x-3| < \alpha$. En remarquant que $|x-3| < \alpha < 1$ entraîne $2 < x < 4$ et donc $|x+3| < |x| + |3| < 7$, on obtient:

$$|x^2-9| = |x-3|\ |x+3| < 7\ (\varepsilon/7) = \varepsilon\ ,$$

soit la conclusion désirée.

Remarque. La notion de limite a un caractère "local":
• le comportement de la fonction loin de x_0 n'a aucune incidence sur la limite en x_0. On peut donc restreindre à loisir l'étude de l'inégalité $|f(x)-L| < \varepsilon$ à un voisinage donné de x_0. C'est ce que nous avons fait dans l'exemple ci-dessus quand nous avons décidé de choisir $\alpha < 1$ et par là de ne s'occuper que des x dans l'intervalle]2,3[(1/2 ou 2 à la place de 1 aurait tout aussi bien marché).
• par contre, au voisinage de x_0, les valeurs de f diffèrent "peu" de la valeur limite L.

Exemple 11 Soit f une fonction telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est bornée.

Solution. Par définition, on a

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \alpha > 0)(\forall\ x \in D_f)(0 < |x-x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$$

Cela signifie que, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, $\varepsilon = 1$ par exemple, il existe un intervalle $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ sur lequel la fonction f prend des valeurs toutes comprises entre $L-\varepsilon$ et $L+\varepsilon$. (Evidemment la longueur 2α de l'intervalle dépend de ε). En particulier, la fonction f est bornée sur l'intervalle $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$.

Considérons une fonction f telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$. Soit $\varepsilon > 0$. On sait, par définition, qu'à partir d'un certain nombre A, les nombres f(x) seront dans l'intervalle $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$. Le nombre A dépend évidemment de ε: plus ε est petit, plus A sera grand.

Exemple 12 Soit $f(x) = (x^3-5x+1)/x^3$. Trouver A tel que

$$x > A \Rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon,$$

pour $\varepsilon = 1/100$, $1/1000$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

n variables La notion de "limite" conserve un sens pour des fonctions de plusieurs variables.

DEFINITION 1.4 *Soient* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *une fonction de n variables,* $m_o(a_1,\ldots,a_n) \in (D_f)'$ *et* L *un nombre réel. On dit que* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *a pour limite* L *quand* x_1 *tend vers* $a_1,\ldots, x_n$ *tend vers* a_n *ce que l'on note*

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \vdots \\ x_n\to a_n}} f(x_1,\ldots,x_n) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{m\to m_o} f(m) = L \quad \textit{si}$$

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \alpha > 0)(\forall\, m(x_1,\ldots,x_n) \in D_f)\left(\begin{cases} |x_1-a_1| < \alpha \\ \quad\vdots \\ |x_n-a_n| < \alpha \\ m\neq m_o \end{cases} \Rightarrow |f(x_1,\ldots,x_n)-L| < \varepsilon\right)$$

Remarque. La Déf.1.3 généralise la Déf.1.1. Là aussi, on n'a fait que traduire la condition: "les nombres $f(x_1,\ldots,x_n)$ deviennent arbitrairement proches de L pourvu que $m(x_1,\ldots,x_n)$ s'approche suffisamment de $m_o(a_1,\ldots,a_n)$. La notion de voisinage permet d'unifier les deux définitions: d'une manière générale, on a $\lim\limits_{m\to m_o} f(m) = L$ si

(*) pour tout voisinage W de L, il existe un voisinage V de m_o tel que $f(V\setminus\{m_o\})$ soit contenu dans W.

Exemple 13 Etudier les limites des fonctions suivantes au point indiqué.

(a) $f(x,y) = x$; (x_o,y_o) (c) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$; $(0,0,0)$

(b) $f(x,y) = ax+by$; (x_o,y_o) (d) $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$; $(1,2,\ldots,n)$

Solution. (b) Montrons que $f(x,y)$ a pour limite $f(x_o,y_o) = ax_o+by_o$ quand $m(x,y)$ tend vers $m_o(x_o,y_o)$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit

$$\alpha = \min\left(\frac{\varepsilon}{2|a|}, \frac{\varepsilon}{2|b|}, 1\right).$$

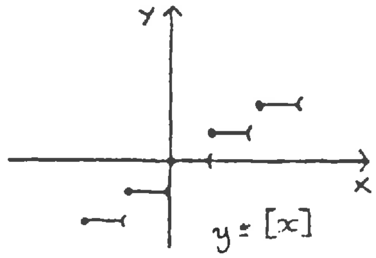
Pour tout $m(x,y) \in D_f$ tel que $|x-x_o| < \alpha$ et $|y-y_o| \leq \alpha$, on a

$$\begin{aligned} |f(x,y)-f(x_o,y_o)| &= |a(x-x_o)+b(y-y_o)| \\ &\leq |a|\,|x-x_o| + |b|\,|y-y_o| < \frac{|a|\varepsilon}{2|a|} + \frac{|b|\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

1.3 Variantes de la définition.

Limites à droite et à gauche **Exemple 14** La fonction $f(x) = [x]$ n'a pas de limite quand x tend vers 0 (Cf. Exemple 25 pour une démonstration). Cependant, les nombres [x] se rapprochent arbitrairement près de 0 quand x s'approche de 0 par valeurs supérieures et les nombres [x] se rapprochent arbitrairement près de -1 quand x s'approche de 0 par valeurs inférieures. Il est d'usage de dire que [x] a une limite à droite et une limite à gauche quand x tend vers 0, qui valent respectivement 0 et -1. On note:

$$\lim_{x\to 0^+} [x] = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} [x] = -1$$



De façon générale, pour demander qu'une variable x_i tende vers a_i par valeurs supérieures (i.e., $x_i \to a_i^+$) ou inférieures (i.e., $x_i \to a_i^-$)), il suffit de remplacer dans la Déf.1.4 la condition "$|x_i-a_i| < \alpha$" respectivement par:

(i) $a_i < x_i < a_i+\alpha$ (i.e., $0 < x_i-a_i < \alpha$)

(i') $a_i-\alpha < x_i < a_i$ (i.e., $-\alpha < x_i-a_i < 0$)

Exemple 15 La définition de $\lim\limits_{\substack{x\to 2^- \\ y\to 0 \\ z\to -1^+}} f(x,y,z) = 8$ est:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \alpha > 0)(\forall\, m(x,y,z) \in D_f)\left(\begin{cases} -\alpha < x-2 < 0 \\ |y| < \alpha \\ 0 < z+1 < \alpha \end{cases} \Rightarrow |f(x,y,z)-8| < \varepsilon\right)$$

Exemple 16 Etudier les limites, à droite, à gauche des fonctions suivantes au(x) point(s) indiqué(s).

(a) $f(x) = [x]$; x_0 entier, puis x_0 non entier.

(b) $f(x) = x/|x|$; 0

(c) $f(x) = (x^2-4)/|x-2|$; 2

(d) $f(x) = x/|x| + [y]$; (0,3)

(d) $f(x) = x[y]/|x|$; (0,3).

Limites à droite et à gauche ont un intérêt théorique important pour les fonctions d'une variable. On y reviendra en §1.4.

Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

De façon générale, pour demander qu'une variable x_i tende vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, il suffit de remplacer dans la Déf.1.4 la condition "$|x_i-a_i| < \alpha$" respectivement par:

(ii) $x_i > 1/\alpha$

(ii') $x_i < -1/\alpha$

Exemple 17 La définition de $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ y\to +\infty \\ z\to -\infty}} f(x,y,z) = 0$ est:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \alpha > 0)(\forall\, m(x,y,z) \in D_f)\left(\begin{cases} 0 < |x-2| < \alpha \\ y > 1/\alpha \\ z < -1/\alpha \end{cases} \Rightarrow |f(x,y,z)| < \varepsilon\right)$$

Limites infinies

La définition de limite se généralise aisément au cas d'une limite infinie. Il suffit de comprendre la condition "les nombres $f(x_1,\dots,x_n)$ deviennent arbitrairement proches de $+\infty$ (resp. $-\infty$) pourvu que..." comme "les nombres $f(x_1,\dots,x_n)$ deviennent arbitrairement grands (resp. petits) pourvu que...". Il suffit donc de remplacer dans la Déf.1.4 la condition "$|f(x_1,\dots,x_n)-L| < \varepsilon$" par:

(iii) $f(x_1,\dots,x_n) > \varepsilon$ pour $+\infty$
(iii') $f(x_1,\dots,x_n) < -\varepsilon$ pour $-\infty$

Plutôt que la lettre ε qu'on réserve pour des quantités petites, on emploie plus communément la lettre A.

Exemple 18 La définition de $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to+\infty\\ z\to-\infty}} f(x,y,z) = +\infty$ est:

$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall m(x,y,z) \in D_f)\left(\begin{cases} 0 < |x-2| < \alpha \\ y > 1/\alpha \\ z < -1/\alpha \end{cases} \Rightarrow f(x,y,z) > A\right)$$

Exemple 19 Démontrer que

$$\lim_{x\to 0^+} 1/x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} 1/x = -\infty, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1/(x^2+y^2) = +\infty$$

Limites par valeurs supérieures et inférieures

On note parfois L^+ (resp. L^-) la limite pour indiquer que les nombres $f(x_1,\dots,x_n)$ se rapprochent de L en restant supérieur à L (resp. inférieur à L). On obtient la définition précise en remplaçant dans la Déf.1.4 la condition "$|f(x_1,\dots,x_n)-L| < \varepsilon$" par:

(iv) $0 \le f(x_1,\dots,x_n)-L < \varepsilon$ pour L^+
(iv') $-\varepsilon < f(x_1,\dots,x_n)-L \le 0$ pour L^-

Exemple 20 $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x = 0^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1/x = 0^-$

1.4 Propriétés des limites.

Unicité de la limite

Intuitivement il est clair qu'une fonction, si elle a une limite au voisinage d'un point donné, ne peut en avoir qu'une seule. En effet, comment l'ensemble des nombres f(m) pourrait-il se rapprocher arbitrairement près, de 2 nombres distincts à la fois?

Exemple 21 Rédiger une démonstration précise.

Sur l'existence des limites

Maintenant, il faut marquer qu'**une fonction n'a pas forcément de limite** au voisinage d'un point donné. Nous allons en voir 3 exemples: la fonction sinus en $+\infty$, la fonction [x] en 0, la fonction x/y au point (0,0). Intuitivement, il est clair qu'il n'existe aucun nombre fixe[1] L duquel se rapprochent ces fonctions quand la variable tend vers le point m_o considéré. Le démontrer est plus délicat. En général, on procède de la façon suivante: on montre que

[1] Par nombre, nous entendons ici nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

(*) il existe 2 nombres distincts L_1 et L_2 et 2 familles infinies de points m du domaine qui tendent vers m_o et tels que les valeurs f(m) correspondantes tendent vers L_1 pour une famille et L_2 pour l'autre.

c'est-à-dire, énoncé de façon plus rigoureuse:

(* bis) il existe 2 nombres distincts L_1 et L_2 et 2 sous-ensembles infinis F_1 et F_2 du domaine D_f telle que:

(i) m_o est un point d'accumulation de F_1 et de F_2.

(ii) Les fonctions $f|_{F_1}$ et $f|_{F_2}$ restrictions de f à F_1 et de F_2 ont respectivement pour limite L_1 et L_2 quand m tend vers m_o, ce qu'on note:

$$\lim_{\substack{m \to m_o \\ m \in F_1}} f(m) = L_1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{m \to m_o \\ m \in F_2}} f(m) = L_2$$

Sous la condition (*), l'ensemble de tous les nombres f(m) ne peut se rapprocher arbitrairement près d'un unique nombre L; la fonction f n'a donc pas de limite au point m_o.

[Plus formellement, il faut dire: la définition de la limite d'une restriction $f|_F$ s'obtient en remplaçant dans la définition générale l'expression "$\forall\ m \in D_f$" par "$\forall\ m \in D_f \cap F$". Donc, si f a pour limite L alors toutes les restrictions de f ont pour limite L. Sous la condition (*), une fonction f ne peut donc pas avoir de limite.]

La condition (*) est donc une condition suffisante pour qu'une fonction n'ait pas de limite.

Note. En fait, on peut montrer que le critère (*) est une condition nécessaire et suffisante. C'est une conséquence d'un résultat important de topologie, le Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exemple 22 Montrer que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Solution. Considérons les 2 familles de nombres réels

$$F_1 = \{ x = k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \} \text{ et } F_2 = \{ x = \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \}.$$

On a

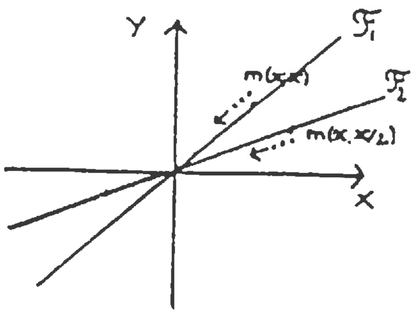
$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in F_1}} \sin(x) = \lim_{k \to +\infty} \sin(k\pi) = \lim_{k \to +\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in F_2}} \sin(x) = \lim_{k \to +\infty} \sin(\pi/2 + k\pi) = \lim_{k \to +\infty} 1 = 1$$

Comme $1 \neq 0$, le critère (*) est satisfait: la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Exemple 23 Montrer que la fonction f(x,y) = x/y n'a pas de limite en $m_o(0,0)$.

Solution. Considérons les 2 familles de nombres réels



$F_1 = \{\ m(x,x)\ |\ x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}\ \}$ et $F_2 = \{\ (x,x/2)\ |\ x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}\ \}$.

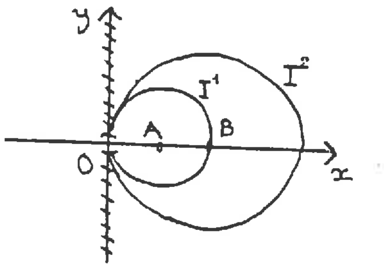
F_1 et F_2 sont deux droites passant par l'origine privées de l'origine; en particulier, l'origine est un point d'accumulation de F_1 et de F_2. Et on a

$$\lim_{\substack{m\to m_0\\ m\in F_1}} f(m) = \lim_{x\to+\infty} f(x,x) = \lim_{x\to+\infty} x/x = 1$$

$$\lim_{\substack{m\to m_0\\ m\in F_2}} f(m) = \lim_{x\to+\infty} f(x,x/2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x/2} = 2$$

Comme $1 \neq 2$, le critère (*) est satisfait: la fonction f n'a pas de limite en (0,0).

Exemple 24 Soit $f(x,y) = (x^2+y^2)/2x$. Représenter sur un même graphe le domaine de définition de f, la ligne de niveau 1, notée l^1, la ligne de niveau 2, notée l^2. Déterminer la limite de f(x,y) lorsque (x,y) tend vers (0,0), en restant sur l^1, en restant sur l^2. La fonction f admet-elle une limite au point (0,0)?



Solution. La fonction f est définie sur $\mathbf{R}^2\setminus Ox$. Les lignes de niveau l^1 et l^2 sont respectivement les cercles C(A(1,0),1) et C(B(2,0),2) privés de l'origine. L'origine O(0,0) est un point d'accumulation de l^1 et de l^2. Sur une ligne de niveau c, la fonction f(x,y) est identiquement égale à c. On a donc

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in l^1}} f(x,y)) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in l^1}} 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in l^2}} f(x,y)) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in l^2}} 2 = 2$$

Comme $1 \neq 2$, la fonction f(x,y) n'a pas de limite au point O(0,0).

Exemple 25 Montrer que la fonction [x] n'a pas de limite en 0.

Solution. Soient $F_1 =]-1,0[$ et $F_2 =]0,1[$. On a:

$$\lim_{\substack{x\to0\\ x\in F_1}} [x] = \lim_{x\to0} -1 = -1 \qquad \neq \qquad \lim_{\substack{x\to0\\ x\in F_2}} [x] = \lim_{x\to0} 0 = 0$$

Limites à droite et à gauche

Dans ce dernier exemple, on a en fait raisonné sur les limites à droite et à gauche de 0 de f. On peut également les utiliser pour montrer qu'une limite existe, en vertu du résultat suivant.

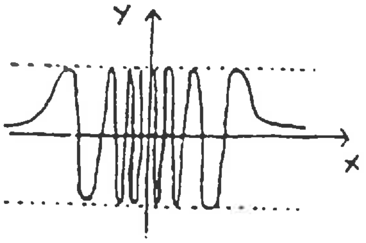
THEOREME 1.5 *Soit f une fonction d'une variable. La fonction f a une limite L quand x tend vers x_0 ssi L est à la fois limite à droite et à gauche de x_0 de f.*

Preuve. Dans le sens $\Rightarrow$, c'est une conséquence du critère (*). Pour la réciproque, il suffit de remarquer que les conditions

$$0 < x-x_0 < \alpha \text{ et } -\alpha < x-x_0 < 0$$

des définitions de $L = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ et $L = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ s'unissent pour donner la condition

$$0 < |x-x_0| < \alpha$$
de la définition de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.



$y = \sin(1/x)$

Exemple 26 Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x > 2 \\ a & \text{si } x < 2 \end{cases}.$$
Etudier la limite de f en 2.

Note. Il existe des fonctions qui n'admettent ni limite à droite ni limite à gauche; par exemple, la fonction $x \to \sin(1/x)$.

§2. CALCUL DES LIMITES

2.1 Théorèmes généraux.

Dans ce paragraphe et pour le reste du chapitre, m_0 désigne un point au sens large, c'est à dire un point à n coordonnées pouvant être des nombres réels, $+\infty$, $-\infty$, a_i^+, a_i^-... D'autre part, on suppose implicitement dans tous les énoncés que m_0 est un point d'accumulation du domaine des fonctions dont on envisage la limite.

THEOREME 2.1 *Soient* f *et* g *deux fonctions de* n *variables telles que* $\lim\limits_{m\to m_0} f(m) = p$ *et* $\lim\limits_{m\to m_0} g(m) = q$, *où* p *et* q *sont deux nombres réels. Alors, on a*

(i) $\lim\limits_{m\to m_0} (f+g)(m) = p+q$

(ii) $\lim\limits_{m\to m_0} (fg)(m) = pq$

(iii) si $q \neq 0$, $\lim\limits_{m\to m_0} (f/g)(m) = p/q$.

Preuve. Nous allons démontrer (ii) pour les fonctions d'une variable et laisser le reste du Th.2.1 en exercice. On écrit
$$f(x)g(x)-pq = (f(x)-p)g(x) + p(g(x)-q).$$
D'après l'exemple 11 du paragraphe §1, la fonction g est bornée sur un voisinage de x_0. C'est-à-dire, il existe $A > 0$ et $\alpha_1 > 0$ tel que

(*) $|g(x)| < A$ pour tout $x \in]x_0-\alpha_1, x_0+\alpha_1[$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = p$, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que

(**) $|f(x)-p| < \varepsilon/2A$ pour tout $x \in]x_0-\alpha_2, x_0+\alpha_2[$

Par définition de $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = q$, il existe $\alpha_3 > 0$ tel que

(***) $|g(x)-q| < \varepsilon/(2|p|+1)$ pour tout $x \in]x_0-\alpha_3, x_0+\alpha_3[$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Pour tout $x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, les trois majorations (*), (**) et (***) sont valables. On obtient:
$$|f(x)g(x)-pq| \leq |f(x)-p|\ |g(x)| + |p|\ |g(x)-q|$$

$$< \frac{A\varepsilon}{2A} + \frac{|p|\varepsilon}{2|p|+1}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Exemple 1 Calculer les limites suivantes:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10}$ au point 0

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{x^3z+xy+y^2}{x+y+z}$ au point (1,2,3)

Les résultats ci-dessus s'étendent au cas de limites infinies, avec quelques restrictions concernant les règles de calcul avec $+\infty$ et $-\infty$. Sont valables les règles suivantes:

$$\begin{cases} (+\infty) + p = +\infty \\ (-\infty) + p = -\infty \\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty \\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty \end{cases}$$

mais $(+\infty) + (-\infty)$ est indéterminé.

$$\begin{cases} p \times (+\infty) = +\infty \text{ si } p > 0 \\ p \times (+\infty) = -\infty \text{ si } p < 0 \\ p \times (-\infty) = -\infty \text{ si } p > 0 \\ p \times (-\infty) = +\infty \text{ si } p < 0 \\ (+\infty) \times (+\infty) = +\infty \\ (-\infty) \times (+\infty) = -\infty \end{cases}$$

mais $0 \times (\pm\infty)$ est indéterminé.

$$\begin{cases} 1/+\infty = 0^+ \\ 1/-\infty = 0^- \\ 1/0^+ = +\infty \\ 1/0^- = -\infty \end{cases}$$

mais ∞/∞ et $0/0$ sont indéterminés

Les cas $(+\infty)+(-\infty)$, $0 \times (+\infty)$, $0 \times (-\infty)$, ∞/∞ ($= \infty \times 0$) et $0/0$ ($= 0 \times \infty$) sont appelés **formes indéterminées.** Le Th.2.1 ne permet pas de conclure dans ces cas-là. Cela ne veut pas dire que la limite n'existe pas mais qu'il faut utiliser une autre méthode pour conclure. Il y a diverses techniques qui permettent de "lever l'indétermination": simplification dans une fraction, mise en facteur du terme prépondérant, multiplication par la quantité conjuguée (Cf. Exemple 2)... Ce sont des méthodes ad hoc; c'est l'utilisation d'équivalents qui rendra plus systématique la résolution de ce genre d'exercices.

Exemple 2 Etudier les limites suivantes:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x}$ en 2 (b) $f(x) = \dfrac{2x^3+x+1}{3x^3-x^2+7x}$ en $+\infty$

(c) $f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ en $+\infty$. (d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x\,\mathrm{Log}(x)}$ en 0^+.

Le résultat suivant, dit de composition des limites est d'application constante. Dans la pratique, on peut "composer des limites". Cependant c'est faux en toute généralité (Cf. Exemple 6) si on ne rajoute pas certaines hypothèses. On pourra vérifier que les hypothèses ci-dessous sont suffisantes.

THEOREME 2.2 *Soient* $f(x_1,\dots,x_n)$ *une fonction de n variables et* $g(x)$ *une fonction de une variable telles que*

$$\lim_{m\to m_0} f(m) = a \quad et \quad \lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Alors on peut conclure que

$$\lim_{m\to m_0} gof(m) = L$$

si l'une des 3 hypothèses suivantes est satisfaite:

(i) $g(a) = L$
(ii) g *n'est pas définie en* a
(iii) *il existe un voisinage épointé de* m_0 *sur lequel* f *ne prend jamais la valeur* a.

Exemple 3 Etudier les limites suivantes:
(a) $f(x) = \sqrt{(2x+1)/x}$ en 2, en $+\infty$
(b) $f(x) = \exp(x^2-y^2)$ en $(0,0)$, en $(+\infty,0)$
(c) $f(x) = \sin(x^2+y^2)/(x^2+y^2)$ en $(0,0)$

Le théorème suivant est un résultat largement intuitif, voire banal; sa démonstration est facile (nous la laissons en exercice). Pourtant c'est un résultat fondamental pour toute l'analyse réelle.

THEOREME 2.3 *Soient* f, g et h *trois fonctions de* n *variables définies sur un voisinage* V *de* m_0

$$\text{(i)} \left\{\begin{array}{l} f(m) \le g(m) \le h(m) \text{ pour tout } m \in V \\ \lim\limits_{m\to m_0} f(m) = \lim\limits_{m\to m_0} h(m) = L \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{m\to m_0} g(m) = L$$

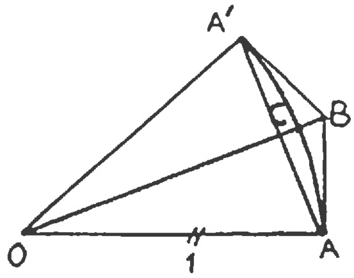
$$\text{(ii)} \left\{\begin{array}{l} |f(m)-L| \le g(m) \text{ pour tout } m \in V \\ \lim\limits_{m\to m_0} g(m) = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{m\to m_0} f(m) = L$$

$$\text{(iii)} \left\{\begin{array}{l} f(m) \ge g(m) \text{ pour tout } m \in V \\ \lim\limits_{m\to m_0} g(m) = +\infty \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lim_{m\to m_0} f(m) = +\infty$$

Exemple 4 En utilisant la figure ci-contre, montrer que

$$\sin(x) < x < \mathrm{tg}(x) \text{ pour tout } x \in \,]0,\pi/2[$$

En déduire que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$



Solution. On a

$$\begin{cases} AA' = 2\sin(x) \\ \text{long. arc } AA' = 2x \end{cases}$$

Comme le plus court chemin de A à A' est la ligne droite, on a $2\sin(x) < 2x$. Considérons ensuite le secteur angulaire (OAC); son aire vaut $x/2$ [1]. Elle est inférieure à l'aire du triangle (OAB) qui vaut $\mathrm{tg}(x)/2$. Cela fournit la seconde partie de l'inégalité de l'énoncé.
On peut réécrire cette inégalité

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \text{ pour tout } x \in \,]0,\pi/2[$$

En passant à la limite, i.e., en appliquant le Th.2.3 (i), on obtient bien que $\sin(x)/x$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

Exemple 5 Etudier les limites suivantes:

(a) $f(x) = x \sin(a/x)$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ en (0,0)

(<u>Indication</u>: montrer que, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a $|f(x,y)| \leq |x|$)

Exemple 6 Montrer que la conclusion du Th.2.2 est fausse pour

$$f(x) = x \sin(1/x) \text{ et } g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x \neq 0 \end{cases}.$$

Montrer qu'aucune des hypothèses (i), (ii), (iii) n'est satisfaite.

2.2 <u>Limites classiques</u>.

Limites par substitution Soit à étudier la limite de $f(x_1,\ldots,x_n)$ quand $m(x_1,\ldots,x_n)$ tend vers $m_o(a_1,\ldots,a_n)$. Quand les théorèmes généraux s'appliquent, il suffit très souvent de substituer les coordonnées $(a_1,\ldots,a_n)$ du point m_o aux variables $(x_1,\ldots,x_n)$ pour obtenir la limite. Il faut bien comprendre que cette procédure n'est pas toujours légitime. Il peut arriver:

$\boxed{1}$ que la substitution fasse apparaître des formes indéterminées.

$\boxed{2}$ que l'on soit dans l'un des cas où le théorème de composition des limites ne s'applique pas.

Exemple 7 Soit $f(x) = [-x^2]$. On a $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$ et $f(0) = 0$.

---

[1] De façon générale, l'aire d'un secteur angulaire de rayon r et d'angle $\theta \in [0,2\pi]$ vaut $\frac{\theta r^2}{2}$.

C'est ce type de questions qui conduit à l'idée de continuité. Nous y reviendrons au chapitre suivant. Pour le moment, retenons que l'on peut calculer les limites par substitution si cela a un sens (i.e., si $f(a_1,...,a_n)$ est défini) et si la fonction est construite à partir des fonctions usuelles du Ch.3.

Fonctions monotones **THEOREME 2.4** _ (a) *Soit* $f(x)$ *une fonction croissante et non majorée (i.e., qui prend des valeurs arbitrairement grandes). Alors*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

(b) *Soit* $f(x)$ *une fonction croissante et majorée. Alors* f *admet une limite finie en* $+\infty$.

Preuve. (a) Il s'agit de montrer que

$$(\forall B > 0)(\exists A > 0)(\forall x \in D_f)(x > A \Rightarrow f(x) > B)$$

Soit $B > 0$. La fonction f étant non majorée, il existe A tel que $f(A) > B$. Soit maintenant x quelconque dans D_f tel que $x > A$. Comme f est croissante, on obtient: $f(x) \geq f(A) > B$.

La démonstration de (b) s'appuie sur une propriété fondamentale de l'ensemble des nombres réels, que nous admettrons.

THEOREME-DEFINITION 2.5 *Soit* S *une partie non vide et majorée de* $\mathbf{R}$. *Alors il existe un plus petit majorant de* S. *Ce nombre réel est appelé* ***borne supérieure*** *de* S. *Par définition donc, la borne supérieure d'un ensemble* S *est le plus petit élément qui soit supérieur à tous les éléments de* S.

Exemple 8 Le nombre réel 1 est la borne supérieure de $S = [0,1[$. En effet, les majorants de S sont tous les nombres de l'intervalle $[1,+\infty[$; 1 est le plus petit de ces nombres.

Remarques. (a) Rappelons que "majorant" signifie "nombre plus grand que" et que "majorant de S" signifie "nombre plus grand que tous les éléments de S".

(b) Bien comprendre que la borne supérieure d'un ensemble S

- n'existe pas forcément (par exemple **N**, **R** n'ont pas de borne supérieure).
- est un majorant de S (c'est le plus petit majorant de S).
- n'est pas en général un élément de S (voir Exemple 8).

(c) C'est ce dernier point qui distingue les notions de borne supérieure et de plus grand élément. Le nombre réel 1 est la borne supérieure de $[0,1[$ mais $[0,1[$ n'a pas de plus grand élément. Le nombre réel 1 est la borne supérieure de $[0,1]$; il est dans $[0,1]$, c'est donc aussi son plus grand élément.

Preuve de Th.2.4 (b). Il faut d'abord deviner quelle va être la limite. Considérons l'ensemble image $f(D_f)$; par hypothèse, c'est un ensemble non vide et majoré. D'après le Th.2.5, il admet une borne supérieure M. Montrons que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = M$$

Il s'agit de montrer que

(*) $\quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists A > 0)(\forall x \in D_f)(x > A \Rightarrow |f(x)-M| < \varepsilon)$

Soit $\varepsilon > 0$. Le nombre réel $M-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $f(D_f)$ (car il est strictement plus petit que M qui est le plus petit des majorants). Donc il existe $x_0 \in D_f$ tel que $f(x_0) > M-\varepsilon$. Pour $x > x_0$, on a

$$M-\varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le M < M+\varepsilon$$

en particulier

$$M-\varepsilon < f(x) < M+\varepsilon.$$

Nous avons donc établi (*) pour $A = x_0$.

Note. Le Th.2.4(b) reste vrai si $+\infty$ est remplacé par x_0^+ ou x_0^- (où $x_0 \in \mathbf{R}$) et si "croissante" est remplacé par "décroissante". Nous laissons le lecteur énoncer et démontrer ces diverses variantes du Th.2.4.

Les fonctions Log et exp vérifient les hypothèses du Th.2.4(a) (Cf. Exercice 49). On a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Log}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$$

Exemple 9 En déduire les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{Log}(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0^+$$

(Utiliser $\mathrm{Log}(x) + \mathrm{Log}(1/x) = 0$ et $\exp(-x) = 1/\exp(x)$).

Croissance comparée des fonctions exponentielle, puissance et logarithme

Les exemples suivants expliquent comment calculer les limites de fonctions construites à partir d'exponentielles, de puissances de x et de logarithmes.

Exemple 10 (Exponentielle et puissance en $+\infty$)

(a) $f(x) = e^x/x$ (b) $f(x) = e^x/x^2$ (c) $f(x) = e^x/x^n$

Solution (a). Pour (a), (b) et (c), il faut partir de l'inégalité

$$e^x > x \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}$$

(qui se démontre par exemple en étudiant la fonction e^x-x).

Pour (a), on l'écrit pour $x/2$ (avec $x > 0$), soit

$$e^{x/2} > x/2$$

En élevant au carré, on obtient $(e^{x/2})^2 = e^x > x^2/4$, dont on déduit

$$e^x/x > x/4$$

Le Th.2.3 (iii) permet de conclure que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Exemple 11 (Log et puissance en $+\infty$)

(a) $f(x) = (\mathrm{Log}(x))/x^2$ (b) $(\mathrm{Log}(x))/\sqrt{x}$

Solution (a). On pose $u = \mathrm{Log}(x)$ soit $x = e^u$. Cela donne $f(x) = u/e^{2u}$. Le théorème de composition des limites permet d'écrire:

$$\lim_{x \to +\infty} (\mathrm{Log}(x))/x^2 = \lim_{u \to +\infty} u/e^{2u}$$

On est ramené au cas de l'exemple 10. La limite cherchée est nulle.

Exemple 12 (Exponentielle et puissance en $-\infty$)
(a) $f(x) = x\, e^x$

Solution. On se ramène au cas de l'exemple 10 en posant $u = -x$ et en utilisant $e^{-x} = 1/e^x$. La limite cherchée est 0.

Exemple 13 (Log et puissance en 0^+)
(a) $f(x) = x\ \mathrm{Log}(x)$ (b) $f(x) = \sqrt{x}\ \mathrm{Log}(x)$

Solution. On se ramène au cas de l'exemple 12 en posant $u = \mathrm{Log}(x)$.

Ces idées se généralisent aisément et conduisent au principe suivant appelé "règle de croissance comparée des fonctions exponentielle, puissance et logarithme".

(*) En présence d'une forme indéterminée dans un produit, exp(*) l'emporte sur toute puissance de * en $+\infty$ et les puissances de * l'emportent sur toute puissance de Log * en $+\infty$ et en 0^+.

Cette règle sera énoncée plus rigoureusement plus loin (Cf. §3 Exemple 17).

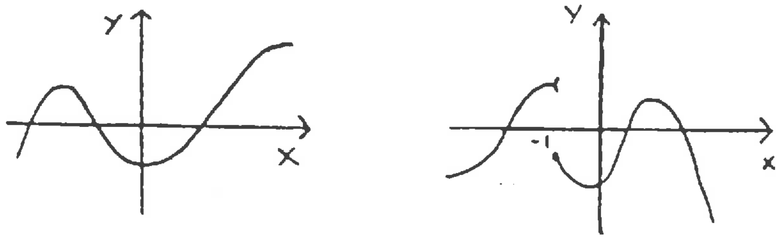
Exemple 14 Etudier les limites suivantes:
(a) $f(x) = (x^2+2x+1)\mathrm{Log}(1+x)$ en -1^+
(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{Log}(x)+\sqrt{x}}$ en $+\infty$
(c) $f(x) = x^{1/x}$ en $+\infty$
(d) $f(x) = x\ \mathrm{Log}(1/x)\ e^{-x}$ en $+\infty$

Solution. (a) $f(x)$ est de la forme $(*)^2\mathrm{Log}(*)$ avec $* = 1+x$ tendant vers 0. Donc f a pour limite 0.
(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}(1 + \mathrm{Log}(x)/\sqrt{x})} = \dfrac{x^{3/2}}{1 + \mathrm{Log}(x)/\sqrt{x}}$
D'après la règle, le dénominateur tend vers $1+0 = 1$. D'où $f(x)$ tend vers $+\infty$.
(c) $f(x) = \exp(\mathrm{Log}(x)/x)$ tend vers $\exp(0) = 1$ en $+\infty$.
(d) $f(x) = -x\mathrm{Log}(x)/e^x$; e^x l'emporte: la limite est nulle.

On fera attention de vérifier qu'on est bien dans le cadre d'application de la règle. Voici quelques exemples où la règle ne s'applique pas.

CONTINUITE

Une fonction f(x) définie sur un intervalle I est continue si on peut tracer son graphe d'un seul coup de crayon. Il s'agit d'une propriété "globale" de la fonction. La fonction de gauche sur la figure ci-dessous est continue sur **R**.

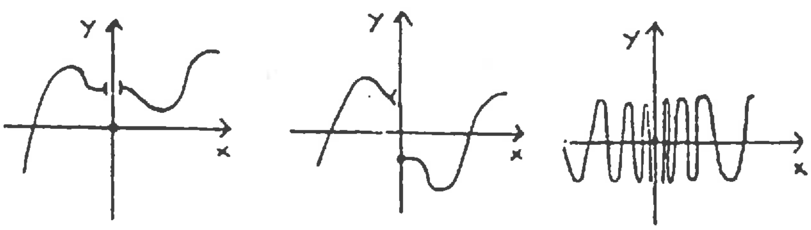


Celle de droite ne l'est pas: il y a une "rupture" ou "discontinuité" au point $x_0 = -1$; par contre, il y a continuité en tous les autres points. La continuité apparaît donc aussi (et d'abord) comme une propriété "locale", i.e., une propriété de la fonction en un point donné.

§1. CONTINUITE EN UN POINT.

1.1 Définitions.

Commençons par quelques exemples typiques de discontinuité.



$f(0) \neq \lim\limits_{x \to 0} f$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f$ $\qquad$ f n'a de limite ni à droite ni à gauche de 0

Exemple 1 Tracer le graphe des fonctions suivantes et préciser quel est le "type de discontinuité" en 0.

(a) $f(x) = [x]$

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Dans les trois cas de figure ci-dessus, la limite de f en 0, soit n'existe pas, soit est différente de la valeur de f en 0. On dira qu'une fonction f est continue en 0 si l'inverse est vrai, i.e., si la fonction f a une limite en 0 qui vaut f(0).

DEFINITION 1.1 *Soient* $f(x_1,\dots,x_n)$ *une fonction de* n *variables et* $m_0(a_1,\dots,a_n) \in D_f$ *. La fonction* f *est dite continue en* m_0 *si la limite* $\lim\limits_{m\to m_0} f$ *de* f *en* m_0 *existe et vaut* $f(m_0)$.

Pour vérifier la continuité d'une fonction en en un point, il faut donc calculer et comparer deux nombres: l'un est une valeur de f, l'autre est une limite.

Exemple 2 Soient f et g les deux fonctions définies par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$, i.e., $\begin{cases} \neq f(0)\text{: f non continue en 0} \\ = g(0)\text{: g continue en 0} \end{cases}$.

Exemple 3 Etudier la continuité en $x_0 \in D_f$ des fonctions suivantes.
(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = 1/x$ (c) $f(x) = e^x$ (d) $f(x) = |x|$
(e) f est construite à partir des fonctions usuelles du Ch.3.

Remarque. En fait, il y a continuité de f en m_0 ssi la limite de f en m_0 existe et peut être calculée par substitution (Cf. Ch.4 §2.2). Donc dire comme au Ch.4 que le calcul des limites par substitution est licite pour les fonctions usuelles revient exactement à dire que ces fonctions sont continues en chaque point de leur domaine. Cela sera formellement établi un peu plus tard (Cf. §2.1 Remarque).

Exemple 4 Etudier la continuité des fonctions suivantes en 0.
(a) $f(x) = [-x^2]$ en 0 (b) $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1.2 Continuité à droite et à gauche.

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction d'une variable.

DEFINITION 1.2 *Une fonction* f(x) *est dite continue à droite (resp. à gauche) d'un point* x_0 *de son domaine si*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad (\textit{resp.}, \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0))$$

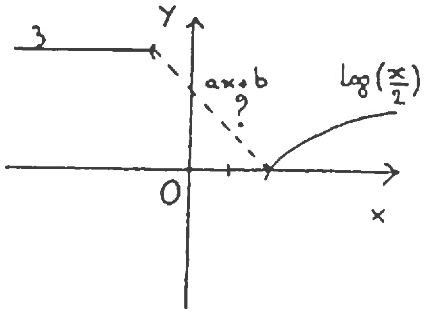
Exemple 5 La fonction $f(x) = [x]$ est continue à droite de 0 mais discontinue à gauche de 0.

La proposition suivante résulte du Th.1.5 du Ch.4.

PROPOSITION 1.3 *Une fonction* $f(x)$ *est continue en un point* $x_0 \in D_f$ *ssi elle est continue à droite et à gauche de* x_0.

Exemple 6 Etudier la continuité, à droite, à gauche des fonctions suivantes en un point $x_0 \in \mathbf{R}$.

(a) $f(x) = [x]$ (b) $f(x) = [-x]$ (c) $f(x) = [x]+[-x]$



Exemple 7 Déterminer les valeurs des paramètres a et b pour que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{pour } x < -1 \\ ax+b & \text{pour } -1 \le x \le 2 \\ \mathrm{Log}(x/2) & \text{pour } x > 2 \end{cases}$$

soit continue.

Notes. (a) On distingue deux cas dans l'étude de la continuité d'une fonction "définie par morceaux":

- en tout point x_0 frontière d'un des morceaux, on calcule les limites à droite et à gauche de x_0 et on utilise la Prop.1.3.
- en un point x_0 non frontière, i.e., intérieur à l'un des morceaux, il y a continuité ssi l'expression définissant f sur le morceau considéré est continue en x_0.

(b) Une fonction peut être discontinue en un point x_0 pour diverses raisons: discontinuité à droite, mais pas à gauche ou l'inverse ou discontinuité des deux côtés... Répondre à ces questions s'appelle préciser la nature de la discontinuité.

1.2 Théorèmes généraux.

La Proposition ci-dessous résulte des Th.2.1 et Th.2.2 du Ch.4.

PROPOSITION 1.4 (i) *Soient* f *et* g *deux fonctions de n variables continues en* m_0. *Alors les fonctions* $f+g$ *et* fg *sont continues en* m_0. *Si de plus* $g(m_0) \neq 0$, *alors la fonction* f/g *est continue en* m_0.

(ii) *Si* f *est continue en* m_0 *et* g *continue en* $f(m_0)$, *alors* $g \circ f$ *est continue en* m_0.

Exemple 8 Les fonctions polynômes, en particulier les fonctions puissances x^n, $n \in \mathbf{Z}$, sont continues en tout point $x_0 \in \mathbf{R}$. Les fonctions homographiques, et plus généralement les fractions rationnelles (i.e., fractions de deux polynômes) sont continues en tout point de leur domaine.

Exemple 9 Etudier la continuité des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ \mathrm{Log}(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = [x] + \sqrt{x-[x]}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solution. (c) La fonction f est continue en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ (Prop.1.4). Voyons si elle est continue à l'origine (0,0). En ce point, la Prop.1.4 ne s'applique pas; il faut revenir à la définition. La valeur de f en (0,0) est 0 et la limite de f en (0,0) vaut également 0 (Cf. Ch.4 §2 Exemple 5); f est donc continue en (0,0). Conclusion: f est continue en tout point de $\mathbf{R}^2$.

Continuité et suites Le résultat suivant a un intérêt théorique important: la continuité peut être étudiée au moyen de suites. Nous nous limitons pour simplifier aux fonctions d'une variable.

THEOREME 1.5 *Soit* $f(x)$ *une fonction et* $x_0 \in (D_f)'$. *Alors* f *est continue ssi pour toute suite* $(x_n)_{n>0}$ *qui tend vers* x_0 , *on a*

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Démonstration. Dans le sens $\Rightarrow$, c'est une conséquence immédiate du Th.2.2 du chapitre 4 sur les compositions de limites. Inversement nous allons montrer que si f n'est pas continue, il existe une suite $(x_n)_{n>0}$ qui tend vers x_0 et telle que la suite $(f(x_n))_{n>0}$ ne tende pas vers $f(x_0)$. Si f n'est pas continue en x_0, on a par définition

$$(*) \qquad (\exists\, \varepsilon > 0)(\forall\, \alpha > 0)(\exists\, x \in D_f)(\ |x-x_0| < \alpha \text{ et } |f(x)-f(x_0)| \geq \varepsilon)$$

Prenons $\alpha = 1/2^n$, pour n un entier quelconque; (*) fournit l'existence d'un élément x_n vérifiant

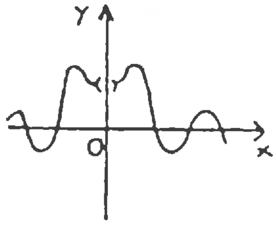
$$(**) \qquad |x_n-x_0| < 1/2^n \text{ et } |f(x_n)-f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Considérons la suite $(x_n)_{n>0}$ ainsi construite. A cause de la première partie de la condition (**), elle tend vers x_0. La seconde partie interdit à la suite $(f(x_n))_{n>0}$ de converger vers $f(x_0)$.

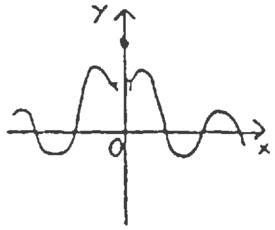
Remarque. On peut utiliser le Th.1.2 pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point: par exemple, [x] n'est pas continue en 0 car la suite [-1/n] converge vers $-1 \neq [0]$. On donne dans l'exercice 15 une application classique de la partie directe du Th.1.2.

1.3 Prolongement par continuité

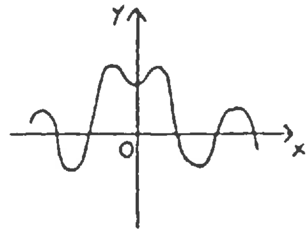
Considérons la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \sin(x)/x$, dont le graphe est représenté ci-dessous à gauche.



Le graphe G_f



La fonction sin(x)/x prolongée par f(0) = 2 (non continue).



La fonction sin(x)/x prolongée par f(0) = 0 (continue).

La fonction f n'est pas définie en 0; prolonger f en 0 signifie définir f en 0. Il y a de multiples façons de prolonger f en 0: il suffit de choisir une valeur dans **R**. Cependant, la fonction f ainsi prolongée, n'a guère de chances d'être continue en 0. Sauf si on a choisi comme valeur de f en 0 le nombre $1 = \lim_{x \to 0} \sin(x)/x$.

Plus généralement, soient $f(x_1,\ldots,x_n)$ une fonction de n variables et m_o un point où f n'est pas définie. Supposons que f admet pour limite un nombre réel L quand $m = (x_1,\ldots,x_n)$ tend vers m_o. Alors la fonction $f(x_1,\ldots,x_n)$ prolongée en m_o par $f(m_o) = L$ est continue en m_o. On dit qu'on a prolongé f par continuité au point m_o.

Exemple 10 Peut-on prolonger la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin(x)}$ par continuité au point 0?

Pour qu'une fonction f soit prolongeable par continuité en un point $m_o \notin D_f$, il faut et il suffit que f admette une limite finie quand m tend vers m_o (en particulier, m_o doit être un point d'accumulation du domaine). Etudier les prolongements par continuité éventuels d'une fonction est donc un simple exercice de calculs de limite.

Exemple 11 Etudier la continuité des fonctions suivantes en précisant la nature des discontinuités éventuelles. Peut-on les prolonger par continuité?

(a) $f(x) = x/|x|$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^2+2x}{\sqrt{x^2+2x+1}}$

(c) $f(x) = (1+x) \operatorname{Log} |1+x|$

(d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{Log} |x|}{x}$

(e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x-1|}}{\sqrt{|x|}}$

(f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x-1|}}{|x|}$

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x-1|}}{x}$

(h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x-1|}}{x^2}$

(i) $f(x) = e^{-1/x^2}$

(j) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2x}$

(k) $f(x,y) = \dfrac{\sin \pi(x^2+y^2)}{\operatorname{Log}(1+x^2+y^2)}$

(l) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x+y)}{e^x e^y - 1}$

Solution. (e)→(h) Les 4 fonctions sont continues sur $D_f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$ en vertu des théorèmes généraux sur la continuité. Il faut étudier ensuite le comportement de la fonction en 0. Sur un voisinage de 0 assez petit, par exemple]-1/2,1/2[, on a

$$\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x-1|} = \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} \underset{0}{\sim} x$$

Conclusions:

(e) $f(x) \underset{0}{\sim} \mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x|} \to 0$; f se prolonge par continuité: $f(0) = 0$.

(f) $f(x) \underset{0}{\sim} x/|x|$ n'a pas de limite en 0; f ne se prol. pas par cont.

(g) $f(x) \underset{0}{\sim} 1 \to 1$; f se prolonge par continuité: $f(0) = 1$.

(h) $f(x) \underset{0}{\sim} 1/x$ n'a pas de limite en 0; f ne se prol. pas par cont.

(j) f est continue sur $D_f = \mathbf{R}^2\backslash\{Oy\}$ (th.gén.). En un point $m_0(0,b)$ où $b \neq 0$, la fonction f n'a pas de limite finie (considérer les points m(x,b) par exemple), donc ne se prolonge pas par continuité. En revanche, la fonction tend vers 0 quand m(x,y) tend vers O(0,0): en effet, on a la majoration

$$\left|\frac{x^2+y^2}{2x}\right| \leq \frac{|x|}{2}$$

La fonction f se prolonge donc par continuité en (0,0): $f(0,0) = 0$.

Exemple 12 Soit $r \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$. Montrer que, pour $r \geq 0$, la fonction puissance $x \to x^r$ se prolonge par continuité en 0.

Exemple 13 Soit $f(x) = \begin{cases} x \,\mathrm{Log}\left(\dfrac{x+1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{e^{1/x} - axe^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Pour quelle valeur du paramètre a la fonction f se prolonge-t-elle par continuité en 0?

§2. PROPRIETES DES FONCTIONS CONTINUES.

2.1 Continuité sur un ensemble.

DEFINITION 2.1 *On dit qu'une fonction* $f(x_1,...,x_n)$ *est continue sur un sous-ensemble* E *de* $\mathbf{R}^n$ *si elle est continue en tous les points de* E. *Le domaine de continuité est l'ensemble de tous les points de* $\mathbf{R}^n$ *où* f *est continue. Enfin,* f *est dite continue si* f *est continue sur son domaine de définition.*

Exemple 1 Les fonctions polynômes en n variables, les fonctions fractions de deux polynômes sont des fonctions continues. La fonction [x] a pour domaine de continuité l'ensemble $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$; ce n'est pas une fonction continue.

De la Prop.1.4, on déduit immédiatement

PROPOSITION 2.2 (a) *Si* f *et* g *sont deux fonctions continues sur* E *, alors* f+g, fg *sont continues sur* E *et* f/g *est continue sur l'ensemble* $E \setminus \{m \in R^n \mid g(m) = 0\}$. *Si* f *est continue sur* E *et* g *est continue sur* f(E), *alors* gof *est continue sur* E.

(b) *Si* f *et* g *sont deux fonctions continues, alors* f+g, fg, f/g *et* gof *sont continues.*

Les fonctions usuelles du Ch.3 sont continues. D'après la Prop.2.2, toutes les fonctions construites à partir des fonctions usuelles sont également continues.

Remarque. La continuité des fonctions usuelles peut être formellement établie de la façon suivante. Certains arguments s'appuient sur des résultats à venir.

• Les fonctions polynômes. La continuité provient de celle de la fonction x et des théorèmes généraux (Prop.2.2). Ce cas fournit en particulier la continuité des fonctions puissances entières et des fonctions fractions de deux polynômes.

• Les fonctions racines n-ièmes $\sqrt[n]{}$. Ce sont des fonctions réciproques de fonctions continues (Cf. Th.2.9)

• La fonction Log. Elle est définie comme primitive de fonction continue; elle est donc elle même continue (et même dérivable).

• La fonction exponentielle. C'est la réciproque de la fonction Log.

• Les fonctions puissances. Elles sont construites à partir de la fonction exponentielle. (Quand l'exposant est rationnel, on peut également déduire la continuité de celle des fonctions racines n-ièmes).

• La fonction sin. La continuité en 0 résulte de l'inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$. On obtient la continuité en un point quelconque en utilisant les formules d'addition (Cf. Exercice 18)

• Les fonctions cos et tg. Elles se déduisent de la fonction sin: pour tout $x \in R$, on a

$$\begin{cases} \cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \\ tg(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{cases}$$

2.2 Propriétés locales.

Soit $f(x_1,\dots,x_n)$ une fonction continue en un point m_o. Par définition, la valeur $f(m_o)$ de f en m_o est la limite de f en m_o. Il en résulte que

(*) au voisinage de m_o, la fonction f prend des valeurs f(m) "peu différentes" de $f(m_o)$.

Cet énoncé est certes imprécis mais il traduit assez bien l'idée qu'il faut avoir de la continuité en un point.

Exemple 2 Voir sur un exemple pourquoi l'énoncé ne s'applique pas si la fonction f n'est pas continue.

Le résultat ci-dessous précise l'énoncé (*).

PROPOSITION 2.3 *Soient* $f(x_1,...,x_n)$ *une fonction continue en un point* m_o *et* ε *un nombre strictement positif quelconque. Alors il existe un voisinage de* m_o *sur lequel la fonction prend des valeurs toutes comprises dans l'intervalle* $]f(m_o)-\varepsilon,f(m_o)+\varepsilon[$.

Preuve. La Prop.2.3 ne fait que reformuler la définition de la continuité de f en m_o.

Nous expliquons dans l'exemple suivant comment il faut utiliser l'énoncé (*) et la Prop.2.3.

Exemple 3 Soit $f(x_1,...,x_n)$ une fonction continue en un point m_o. On suppose $f(m_o) \neq 0$. Montrer qu'il existe un voisinage de m_o où f ne s'annule pas.

Solution. Intuitivement, c'est clair. En effet, d'après l'énoncé (*), au voisinage de m_o, f prend des valeurs "proches" de $f(m_o)$, qui est non nul. Si elles sont suffisamment proches, elles ne peuvent pas être nulles. Il s'agit maintenant de rendre rigoureux ce raisonnement.
Supposons dans un premier temps $f(m_o) > 0$. On choisit $\varepsilon = f(m_o)/2$; c'est un nombre strictement positif. D'après la Prop.2.3, il existe un voisinage V de m_o sur lequel f prend des valeurs comprises dans l'intervalle $]f(m_o)-\varepsilon,f(m_o)+\varepsilon[$, i.e., l'intervalle

$$\left]\frac{f(m_o)}{2}, \frac{3f(m_o)}{2}\right[.$$

En particulier, elles sont non nulles. Si $f(m_o) < 0$, le raisonnement est similaire.

Exemple 4 Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout x dans l'intervalle $]-\alpha,\alpha[$, on ait

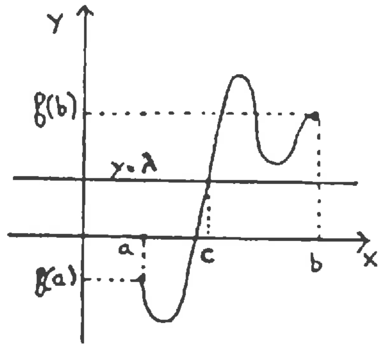
$$\frac{1}{2}\,|\mathrm{Log}(1+x)| \leq |\sin(x)| \leq \frac{1}{2}\,|\mathrm{Log}(1+x)|$$

(Appliquer le résultat de l'exemple 3 à la fonction $f(x) = \frac{|\sin(x)|}{|\mathrm{Log}(1+x)|}$)

Exemple 5 Soit $f(x_1,...,x_n)$ une fonction continue en un point m_o. En utilisant la Prop.2.3, montrer qu'il existe un voisinage de x_o sur lequel f est bornée.

2.3 Propriété de la valeur intermédiaire.

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction d'une variable définie sur un intervalle I.



Soient a et b deux éléments de I. Considérons maintenant un nombre quelconque λ compris entre f(a) et f(b). Les deux points A(a,f(a)) et B(b,f(b)) du graphe G_f se trouvent de part et d'autre de la droite $y = \lambda$ (voir figure ci-contre). Si f est continue sur I, on peut aller du point A au point B le long du graphe "sans lever le crayon". On est alors obligé de couper la droite $y = \lambda$. On appelle cette propriété la propriété de la valeur intermédiaire. C'est la plus importante propriété des fonctions continues sur un intervalle.

Exemple 6 Voir sur un exemple pourquoi l'hypothèse de continuité est essentielle.

Théorème des valeurs intermédiaires (1ère forme)

THEOREME 2.4 _ *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* I *et* a *et* b *deux éléments de* I . *Alors*

(*) *Toute droite horizontale* $y = \lambda$ *passant entre les points* A(a,f(a)) *et* B(b,f(b)) *coupe le graphe* G_f *au moins une fois.*

La propriété (*) *s'énonce de façon équivalente*

(* bis) *Si* λ *est un nombre réel quelconque compris entre* f(a) *et* f(b) , *alors il existe* c *entre* a *et* b *tel que* $f(c) = \lambda$.

Exemple 7 Soit f une fonction continue sur [a,b]. On suppose $f(a)f(b) < 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois entre a et b.

Exemple 8 Montrer qu'un polynôme de degré impair a au moins une racine dans **R**.

Preuve du Th.2.4. Nous donnons une preuve succincte de (* bis). Elle s'appuie sur une propriété fondamentale de l'ensemble des nombres réels (Cf. Ch.4 Th.2.5), à savoir

(**) Toute partie S non vide et majorée admet une borne supérieure (i.e., un plus petit majorant).

Supposons par exemple $f(a) \geq \lambda$ (si $f(a) \leq \lambda$, le raisonnement est analogue). On considère l'ensemble $S = \{ x \in [a,b] \mid f(x) \geq \lambda\}$. C'est un ensemble non vide ($a \in S$) et majoré (par b). Soit c sa borne supérieure. Les deux points suivants montrent qu'on ne peut avoir ni $f(c) > \lambda$ ni $f(c) < \lambda$.

• Supposons $f(c) > \lambda$. En utilisant la Prop.2.3, on obtient qu'il existe un voisinage de c où f prend des valeurs $> \lambda$ (s'inspirer de l'exemple 3). Cela contredit le fait que c est <u>un</u> majorant de S.

• Supposons $f(c) < \lambda$. En utilisant la Prop.2.3, on obtient qu'il existe un voisinage de c où f prend des valeurs $< \lambda$. Cela contredit le fait que c est <u>le plus petit</u> des majorants de S.

Conclusion: $f(c) = \lambda$.

En d'autres termes, le Th.2.4 énonce qu'une fonction continue qui prend les valeurs $\alpha = f(a)$ et $\beta= f(b)$ en a et b prend également toutes les valeurs intermédiaires. C'est-à-dire,

$$(\forall\ \alpha,\beta \in f(I))\ (f(I) \supset [\alpha,\beta])$$

Cela signifie exactement que l'ensemble image f(I) est un intervalle (Cf. Exercice 25 pour un rappel sur les intervalles).

Théorème des valeurs intermédiaires (2ème forme)

THEOREME 2.5 _ *L'image* f(I) *d'un intervalle* I *par une application continue* f *est un intervalle.*

Exemple 9 Voir sur un exemple pourquoi l'hypothèse de continuité est essentielle dans le Th.2.5.

Généralisation (n variables). Une fonction continue de n variables $f(x_1,\ldots,x_n)$ vérifie la propriété suivante qu'on peut voir comme une version à n variables de la propriété de la valeur intermédiaire.

(***) L'image par f d'une boule (ouverte ou fermée) est un intervalle de **R**.

La démonstration est laissée en exercice (Cf. Exercice 28).

Terminons ce paragraphe par un cas particulier important du Théorème des valeurs intermédiaires.

COROLLAIRE 2.6 *L'image* f([a,b]) *de l'intervalle* [a,b] *par une fonction* f *continue et monotone est l'intervalle fermé de bornes* f(a) *et* f(b).

Exemple 10 Voir sur des exemples pourquoi l'hypothèse "continue et monotone" est essentielle.

2.3 Inversion des fonctions continues.

Le résultat que nous avons en vue dans ce paragraphe est le Th.2.9: la réciproque d'une fonction continue et injective sur un intervalle est elle-même continue. Nous le déduirons des deux résultats fondamentaux suivants. Rappelons que f désigne une fonction d'une variable définie sur un intervalle I.

THEOREME 2.7 *Si* f *est strictement monotone et si l'ensemble image* f(I) *est un intervalle, alors* f *est continue sur* I.

THEOREME 2.8 *Si* f *est injective et continue, alors* f *est strictement monotone.*

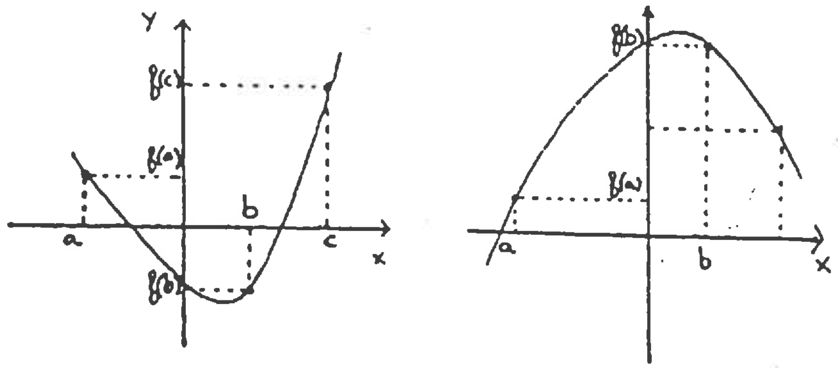
Exemple 11 Déduire du Th.2.7 la continuité de la fonction sinus (appliquer le Th.2.7 à la restriction de sin(x) à $[-\pi/2,\pi/2]$).

Preuve du Th.2.7. Soit x_0 quelconque dans I. Nous allons démontrer, en revenant à la définition que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Le point capital de la preuve est de remarquer que, puisque f(I) est un intervalle et qu'il contient $f(x_0)$, il existe un petit intervalle fermé J de longueur non nulle, contenant $f(x_0)$ et contenu dans $f(I) \cap]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$. Notons f(a) et f(b) les bornes de cet intervalle J. Il résulte de la stricte monotonie de f que l'intervalle ouvert de bornes a et b est un voisinage de x_0 qui est envoyé par f dans J, donc en particulier dans $]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$.

Preuve du Th.2.8. On raisonne par l'absurde. Si f n'est pas strictement monotone, il existe 3 points a, b, c dans I vérifiant

(*) a < b < c et f(b) est à l'extérieur du segment de bornes f(a) et f(c).

Quitte à changer f en -f on peut supposer que f(c) > f(a). Ci-dessous sont représentés les deux cas de figure possibles.



Dans chacun de ces cas, la propriété de la valeur intermédiaire combinée au test des horizontales pour l'injectivité permet de conclure que f ne peut pas être injective.

THEOREME 2.9 *Soit* f *une fonction continue et injective sur un intervalle* I. *Alors la fonction* f^{-1}, *réciproque de* f, *est continue sur l'intervalle* f(I).

Preuve. Le Th.2.9 se déduit des Th.2.7 et Th.2.8. D'après le Th.2.8, une fonction f continue et injective est strictement monotone. Il est facile de voir qu'alors sa réciproque f^{-1} est également strictement monotone (Cf. Exercice 11 du Ch.3). D'autre part, la fonction f^{-1}, définie sur l'intervalle f(I), a pour ensemble image I. C'est un intervalle, donc d'après le Th.2.7, f^{-1} est continue.

Du Th.2.9, on déduit en particulier la continuité des fonctions racines n-ièmes et de la fonction exponentielle (Cf. Remarque en §2.1). Voici d'autres exemples classiques.

La fonction Arcsin La fonction sinus n'est pas injective mais sa restriction à l'intervalle $I = [-\pi/2,\pi/2]$ l'est. On note Arcsin la réciproque de cette restriction. La fonction Arcsin est définie par:

$$\begin{cases} \mathrm{Arcsin}(x) = y \\ x \in [-1,1] \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(y) = x \\ y \in [-\pi/2,\pi/2] \end{cases}$$

Exemple 12 $\mathrm{Arcsin}(1) = \pi/2$; $\mathrm{Arcsin}(1/2) = \pi/6$.

Attention! On a bien $\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x$ mais on n'a $\mathrm{Arcsin}(\sin(y)) = y$ que si $y \in [-\pi/2,\pi/2]$. Par exemple, $\mathrm{Arcsin}(\sin(3\pi/2)) = -\pi/2$ et non pas $3\pi/2$.

La fonction Arcos La fonction cosinus n'est pas injective mais sa restriction à l'intervalle $I = [0,\pi]$ l'est. On note Arcos la réciproque de cette restriction. La fonction Arcsin est définie par:

$$\begin{cases} \mathrm{Arcos}(x) = y \\ x \in [-1,1] \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(y) = x \\ y \in [0,\pi] \end{cases}$$

Exemple 13 $\mathrm{Arcos}(1) = 0$; $\mathrm{Arcos}(1/2) = \pi/3$.

Attention! On a bien $\cos(\mathrm{Arcos}(x)) = x$ mais on n'a $\mathrm{Arcos}(\cos(y)) = y$ que si $y \in [0,\pi]$. Par exemple, on a $\mathrm{Arcos}(\cos(-\pi/4)) = \pi/4$ et non pas $-\pi/4$.

Exemple 14 Etablir la formule $\mathrm{Arcos}(x) + \mathrm{Arcos}(-x) = \pi$.

Solution. Montrons que $\mathrm{Arcos}(-x) = \pi-\mathrm{Arcos}(x)$. D'après la définition, il s'agit de montrer que

$$\begin{cases} \cos(\pi-\mathrm{Arcos}(x)) = -x \\ \pi-\mathrm{Arcos}(x) \in [0,\pi] \end{cases}$$

• $\cos(\pi-\mathrm{Arcos}(x)) = -(\cos(\mathrm{Arcos}(x))) = -x$
• Par définition, $\mathrm{Arcos}(x) \in [0,\pi]$. On en déduit que $\pi-\mathrm{Arcos}(x)$ est dans l'intervalle $[\pi-0,\pi-\pi] = [0,\pi]$.

La fonction Arctg La fonction tangente n'est pas injective mais sa restriction à l'intervalle $I =]-\pi/2,\pi/2[$ l'est. On note Arctg la réciproque de cette restriction. La fonction Arctg est définie par:

$$\begin{cases} \mathrm{Arctg}(x) = y \\ x \in \mathbf{R} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{tg}(y) = x \\ y \in]-\pi/2,\pi/2[\end{cases}$$

Exemple 15 Arctg(1) $= \pi/4$; Arctg($\sqrt{3}$) $= \pi/3$.

Attention! On a bien tg(Arctg(x)) = x mais on n'a Arctg(tg(y)) = y que si $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Par exemple, Arctg(tg($3\pi/4$)) $= \pi/4$ et non pas $3\pi/4$.

Exemple 16 Montrer que, pour tout $x > 0$, on a:

$$\mathrm{Arctg}(x) + \mathrm{Arctg}(1/x) = \pi/2.$$

D'après le Th.2.9, les fonctions Arcsin, Arcos et Arctg sont des fonctions continues.

2.4 Image continue d'un fermé borné.

Nous nous contenterons dans cette section de citer et d'expliquer une dernière propriété importante des fonctions continues. Ici, f désigne une fonction de n variables définie sur un sous-ensemble E de $\mathbf{R}^n$. On rappelle les deux définitions suivantes.

DEFINITION 2.10 *On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbf{R}^n$ est* ***borné*** *s'il peut être inclus dans une boule.*

Exemple 17 L'intérieur d'une ellipse, d'un rectangle sont des sous-ensembles bornés de $\mathbf{R}^2$. En revanche, le premier quadrant, la parabole $y = x^2$ ne sont pas bornés.

DEFINITION 2.11 *On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbf{R}^n$ est* ***fermé*** *s'il contient tous ses points adhérents.*

Exemple 18 (a) Les boules fermées sont des fermés. Les boules ouvertes ne sont pas des fermés: en effet, les points du bord d'une boule ouverte B sont adhérents à B mais ne sont pas dans B.
(b) Un intervalle de **R** n'est un fermé que s'il contient ses bornes, i.e., s'il s'agit d'un intervalle fermé. L'ensemble **Z** est un fermé. L'ensemble $\{1/n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$ n'est pas fermé.

THEOREME 2.12 *L'image f(E) d'un ensemble E fermé et borné par une fonction continue f est un sous-ensemble fermé et borné de* **R**.

On pourra retenir le Th.2.12 sous la forme suivante qu'on utilise très souvent:

(*) Une fonction f continue sur un ensemble E fermé et borné est bornée et atteint ses bornes.

Par "f atteint ses bornes", il faut comprendre ceci. L'ensemble image f(E) est borné; il a donc une borne supérieure M et une borne inférieure μ. Raisonnons sur M; c'est le plus petit nombre réel qui soit supérieur à tous les éléments de f(E). Il est important de comprendre qu'à priori, M n'est pas nécessairement dans f(E). Mais c'est le cas sous les hypothèses du Th.2.12; l'ensemble f(E) est fermé, il contient donc ses bornes μ et M. Autrement dit, les bornes μ et M de f(E) sont des "valeurs atteintes" par la fonction f sur E.

La propriété (*) s'énonce donc de façon plus précise:

(* bis) $(\exists\ \xi,\zeta \in E)(\forall\ x \in E)(\ f(\xi) \le f(x) \le f(\zeta))$

c'est-à-dire, f a un maximum et un minimum sur E.

Voici deux exemples: le premier est celui d'une fonction bornée qui n'atteint pas ses bornes, le second montre comment on peut utiliser le Th.2.12.

Exemple 19 Soient $f(x) = 1/x$ et $E =]1,2[$. La fonction f est bornée sur E par 1 et 1/2, mais f n'atteint pas ces bornes. Ici, le Th.2.12 ne s'applique pas car E n'est pas fermé.

Exemple 20 Soient f(x) une fonction continue sur un intervalle [a,b]. On suppose que, pour tout $x \in [a,b]$, on a $0 \le f(x) < 1$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b (f(x))^n\, dx = 0$$

(La définition et les propriétés de l'intégrale sont revues au §3).

Solution. La fonction f est continue, donc sa borne supérieure M est atteinte, i.e., M s'écrit $M = f(\zeta)$. De l'hypothèse sur f, on déduit $M < 1$. On a donc:

$$0 \le f(x) \le M < 1 \text{ pour tout } x \in [a,b]$$

En élevant à la puissance n et en prenant l'intégrale, on obtient

$$(**) \qquad 0 \le \int_a^b (f(x))^n\, dx \le (b-a)\ M^n$$

Or, comme $0 \le M < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} M^n = 0$, ce qui conduit à la conclusion désirée.

Note. Dans l'exemple ci-dessus, bien comprendre que si la fonction n'est pas continue, rien n'empêche la borne supérieure M d'être égale à 1, auquel cas l'inégalité (**) ne permet plus de conclure.