CHAPITRE 1

FONCTIONS. GENERALITES.

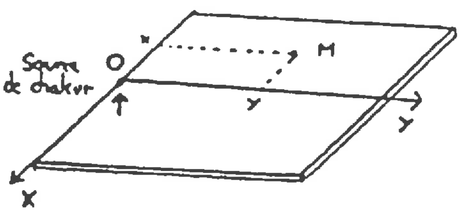
§1. FONCTIONS DE N VARIABLES.

1.1 Définitions et exemples.

La notion de fonction est naturelle: elle apparaît à chaque fois que l'on cherche à décrire quantitativement un phénomène où une quantité mesurable **dépend** ou **est fonction de** un ou plusieurs facteurs mesurables ou **variables.** Si n facteurs $x_1,\ldots,x_n$ interviennent on dit que a est fonction des n variables $x_1,\ldots,x_n$ et on écrit $a = a(x_1,\ldots,x_n)$.

Exemple 1 Les fonctions de la variable "temps" sont nombreuses. Ainsi, la distance l parcourue par une automobile roulant à vitesse constante v dépend de la durée t du trajet; $l = l(t)$ est une fonction de la variable t. Cette dépendance peut être explicitée: pour des unités de temps et de distance bien choisies, on a $l(t) = vt$. De même, une pierre lâchée dans un puits vertical, se trouve, t secondes après, à la profondeur $h = 1/2\ gt^2$ (en mètres pour $g = 9{,}81\ldots$); $h = h(t)$ est également une fonction du temps t.

Exemple 2 La surface s d'un carré est fonction s(l) de la longueur de son côté; en revanche, la surface S d'un rectangle est fonction de 2 variables, sa longueur L et sa largeur l. On a $s = s(l) = l^2$ et $S = S(L,l) = Ll$.



Exemple 3 "Plaque métallique chauffée à l'origine" Une plaque métallique est chauffée en un point O. La température d'un point M de cette plaque dépend de sa position par rapport à O qui est déterminée par les coordonnées x et y de M selon deux axes Ox et Oy tracés sur la plaque. On a donc $T = T(x,y)$ mais la dépendance n'est pas aussi facile à expliciter que dans les exemples précédents.

Exemple 4 Selon la fonction de production de Cobb-Douglas, la production Q s'exprime comme fonction $Q = Q(K,L)$ du capital K et de la main d'oeuvre L selon la formule $Q(K,L) = \gamma K^{\alpha} L^{1-\alpha}$ (où $\alpha \in [0,1]$ et $\gamma \geq 0$).

Dans chacun de ces exemples est mise en évidence une relation entre quantité étudiée et variables où la connaissance des variables détermine la quantité étudiée. Ainsi, la connaissance de la longueur et de la largeur d'un rectangle détermine sa surface. On appelle fonction la correspondance

$$\text{variables} \to \text{quantité étudiée.}$$

DEFINITION 1.1 *On appelle fonction de* n *variables la donnée* f *d'une correspondance*

$$(x_1,\dots,x_n) \to f(x_1,\dots,x_n) \qquad ((x_1,\dots,x_n) \in E)$$

associant à tout n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ *d'un sous-ensemble* E *de* R^n *, un unique nombre réel* $f(x_1,\dots,x_n)$ *, appelé valeur de* f *au point* $(x_1,\dots,x_n)$.

La notation suivante est également souvent utilisée pour la fonction f:

$$f: \begin{cases} E \to \mathbf{R} \\ (x_1,\dots,x_n) \to f(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$$

L'ensemble E s'appelle **le domaine de définition** de la fonction f. Très souvent, il n'est donné qu'implicitement dans la définition de f. Ainsi, dans l'exemple 2, E est l'ensemble $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ des couples (L,l) où L et l sont positifs; en effet, longueur et largeur d'un rectangle sont des nombres positifs. Quand aucune contrainte due à la nature du problème n'apparaît, le domaine de définition est l'ensemble de tous les n-uplets $(x_1,\dots,x_n)$ pour lesquels l'expression $f(x_1,\dots,x_n)$ a un sens. C'est le cas notamment quand la fonction f est définie par sa valeur $f(x_1,\dots,x_n)$ en un point générique $(x_1,\dots,x_n)$. Il est alors d'usage de noter D_f le domaine de définition de f .

Exemple 5 La fonction "surface du carré" de l'exemple 2 est la fonction $l \to l^2$ $(l \geq 0)$; son domaine est $\mathbf{R}_+$. Mais la fonction $l \to l^2$ est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Exemple 6 La fonction f définie par $f(x) = 1/x$ a pour domaine l'ensemble $D_f = \mathbf{R}^*$, la fonction $g(x,y) = 1/(x^2+y^2)$ a pour domaine l'ensemble $D_g = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exemple 7 La correspondance

$$x \to \begin{cases} -8 & \text{si } x < -2 \\ x^3 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 8 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

définit une fonction d'une variable. De telles fonctions, définies par différentes expressions sur des domaines disjoints sont dites "définies par morceaux".

Un nombre réel z est une **valeur** prise par la fonction f s'il peut s'écrire sous la forme $z = f(x_1,\dots,x_n)$. **L'ensemble image** de la fonction, noté $f(D_f)$, est l'ensemble de toutes les valeurs prises par la fonction sur le domaine; c'est-à-dire:

$$f(D_f) = \{ f(x_1,\dots,x_n) \mid (x_1,\dots,x_n) \in D_f \}.$$

L'ensemble image est un sous-ensemble de **R**. De façon plus générale, pour I sous-ensemble de D_f, on définit **l'ensemble image de I par f,** noté f(I), comme l'ensemble de toutes les valeurs prises par f sur I; c'est-à-dire:

$$f(I) = \{ f(x_1,\ldots,x_n) \mid (x_1,\ldots,x_n) \in I\}.$$

Exemple 8 L'ensemble image de la fonction $f(x) = x^2$ est l'ensemble de tous les carrés de nombres réels; c'est l'ensemble $\mathbf{R}_+$. L'ensemble image de l'intervalle I = [2,3[est l'ensemble de tous les carrés de nombres réels compris entre 2 et 3 et différents de 3 i.e., f([2,3[) = [4,9[. On obtient de façon analogue f([-2,3[) = [0,9[.

Exemple 9 Soit $f(x,y) = x^2-y^2$. Montrer que $f(D_f) = \mathbf{R}$. Déterminer ensuite l'ensemble f(D(O,1)) image par f du disque unité $D(O,1) = \{ x^2+y^2 \le 1 \}$.

Solution. Soit $c \in \mathbf{R}$. On a $\begin{cases} c = f(\sqrt{c},0) & \text{si } c \ge 0 \\ c = f(0,\sqrt{-c}) & \text{si } c \le 0 \end{cases}$

D'où $f(D_f) = \mathbf{R}$. Montrons maintenant que f(D(O,1)) = [-1,1]. Dans le raisonnement précédent, si $|c| \le 1$, alors les points

$$(\sqrt{|c|},0) \text{ et } (0,\sqrt{|c|})$$

sont dans le disque D(O,1). Cela montre que $f(D(O,1)) \supset [-1,1]$. Montrons inversement que $[-1,1] \supset f(D(O,1))$. Soit $(x,y) \in D(0,1)$. On a $x^2+y^2 \le 1$; en particulier, $0 \le x^2 \le 1$ et $0 \le y^2 \le 1$. D'où

$$-1 \le f(x,y) = x^2-y^2 \le 1,$$

c'est-à-dire $f(x,y) \in [-1,1]$.

1.2 Représentations du domaine de définition.

Une variable Le domaine de définition d'une fonction d'une variable est un sous-ensemble de **R**; généralement, on peut l'écrire comme une réunion d'intervalles.

Exemple 10 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes:

(a) $f(x) = \sqrt{-x} + 1/\sqrt{2+x}$

(b) $f(x) = \text{Log}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$

(c) $f(x) = \left(\dfrac{1-|x|}{2-|x|}\right)^{1/2}$

(d) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$

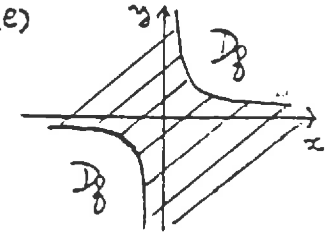
(e) $f(x) = e^{-1/\text{Log}(x)}$

(f) $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$

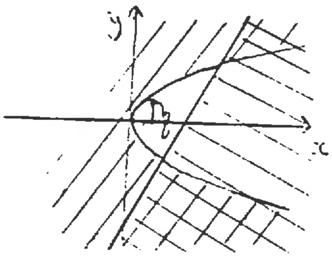
Deux variables Le domaine de définition d'une fonction de 2 variables est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$, i.e., une partie du plan Oxy. En général, c'est graphiquement qu'on en a la meilleure représentation.

Exemple 11 Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes:

(e)



(f)



(a) $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$

(b) $f(x,y) = x/(2x-4y+1)$

(c) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

(d) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}$

(e) $f(x,y) = (xy-1)^{1/2}$

(f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + \sqrt{4-x^2-y^2}$

(g) $f(x,y) = \sqrt{2x-x^2-y^2}$

(h) $f(x,y) = \sqrt{36-4x^2-9y^2}$

(i) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{Log}(y-x+1)}{(4-xy)^{1/2}}$

(j) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{Log}(y-2x+3)}{(x-y^2)^{1/2}}$

1.3 Opérations.

Deux fonctions de n variables s'ajoutent, se multiplient, se divisent de façon naturelle. Si f et g sont deux fonctions de n variables,

- la somme f+g est la fonction

$$(x_1,\ldots,x_n) \to f(x_1,\ldots,x_n)+g(x_1,\ldots,x_n)$$

définie en tous les points $(x_1,\ldots,x_n)$ où f et g le sont. On a donc

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

- le produit fg est la fonction

$$(x_1,\ldots,x_n) \to f(x_1,\ldots,x_n)g(x_1,\ldots,x_n)$$

définie en tous les points $(x_1,\ldots,x_n)$ où f et g le sont. On a donc

$$D_{fg} = D_f \cap D_g$$

- le quotient f/g est la fonction

$$(x_1,\ldots,x_n) \to f(x_1,\ldots,x_n)/g(x_1,\ldots,x_n)$$

définie en tous les points $(x_1,\ldots,x_n)$ où f et g le sont et où $g(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$. On a donc

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g \setminus \{ (x_1,\ldots,x_n) \mid g(x_1,\ldots,x_n) = 0 \}$$

Exemple 12 Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition de la fonction f/g où $f(x,y) = xy$ et $g(x,y) = \mathrm{Log}(xy)$.

La composition est une opération un peu plus délicate. La fonction composée fog n'a de sens que si f est une fonction d'une seule variable $u \to f(u)$. La fonction fog est alors la fonction

$$(x_1,\ldots,x_n) \to f[g(x_1,\ldots,x_n)].$$

On notera que si f et g sont toutes deux des fonctions d'une variable, les deux composées fog et gof sont définies mais sont distinctes.

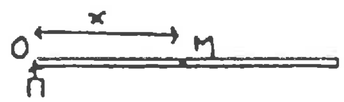
Exemple 13 (a) Soient $f(x) = x+1$ et $g(x) = 2x+1$. Montrer que les fonctions fog et gof sont distinctes.
(b) Soient $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. Montrer que les ensembles D_{fog} et D_{gof} sont distincts.

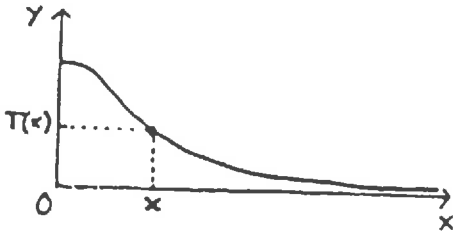
Exemple 14 Soit $f(x) = 1/(1-x)$. Déterminer fof, fofof et de façon générale f^n = fof...of pour n entier positif.

Exemple 16 Soit $f(x,y) = \mathrm{Log}(e^{(x+y)^3}+1)$. La fonction f est composée des fonctions "élémentaires" suivantes: g: $(x,y) \to x+y$, h: $u \to u^3$, j: $v \to e^v$, k: $w \to w+1$ et l: $t \to \mathrm{Log}(t)$. On a f = lokojohog.

§2. GRAPHE D'UNE FONCTION.

2.1 Graphe d'une fonction d'une variable.





Considérons une règle métallique graduée chauffée en l'une de ses extrémités O. La température T d'un point de la règle dépend de sa distance à O, notée x. Il n'est pas facile de donner une formule pour la fonction $T = T(x)$; en revanche, on en a une représentation graphique intuitive assez bonne.

On a obtenu la figure ci-contre en reportant sur le plan R^2 tous les points de coordonnées $(x,T(x))$ pour x variant entre 0 et la longueur de la règle. Le graphe ou courbe représentative d'une fonction quelconque est défini de la même façon.

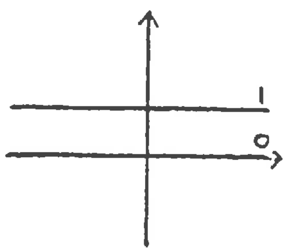
DEFINITION 2.1 *Soit* f *une fonction d'une variable. On appelle graphe de* f, *l'ensemble* G_f *de tous les points du plan* R^2 *de coordonnées* $(a,f(a))$ *où* a *varie dans* D_f *; c'est-à-dire:*

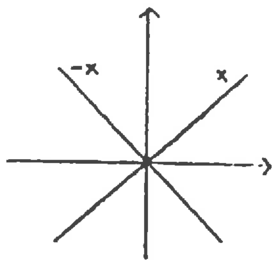
$$G_f = \{ M(a,f(a)) \mid a \in D_f \}$$

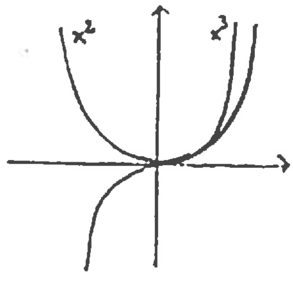
Le graphe G_f *est une courbe plane; elle est d'équation* $y = f(x)$ (avec $x \in D_f$).

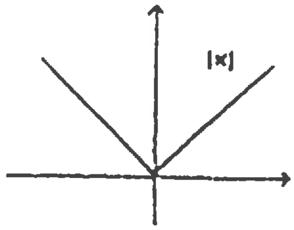
Exemple 1 Graphes des fonctions "simples"

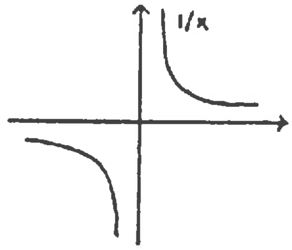
(a) $x \to 0$ et $x \to 1$ (b) $x \to x$ et $x \to -x$
(c) $x \to x^2$ et $x \to x^3$ (d) $x \to |x|$
(e) $x \to 1/x$ (f) $x \to \sqrt{x}$

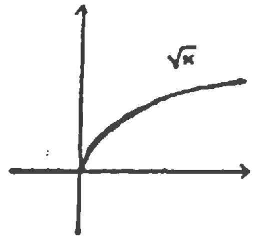










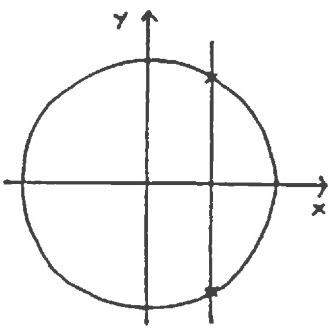


Exemple 2 Le graphe d'une fonction f(x) = ax+b est la courbe d'équation y = ax+b; c'est donc la droite de pente a et passant par le point A(0,b). C'est une droite horizontale ssi a = 0, i.e., ssi la fonction f est constante.

Exemple 3 Représenter le graphe des fonctions suivantes.
(a) f(x) = 2x+1
(b) g(x) = |x-1|+|x-2|+|2x]
(c) h(x) = [x] (où [x] désigne la partie entière de x, i.e., le plus grand entier inférieur à x).

Test des verticales Soit f une fonction et a ∈ D_f. Le seul point du graphe G_f d'abscisse a est le point de coordonnées (a,f(a)). Autrement dit, il ne peut y avoir deux points distincts de même abscisse sur le graphe d'une fonction. Cette propriété, qu'on appelle test des verticales et qui caractérise les graphes de fonctions, peut encore s'énoncer de la façon suivante:

PROPOSITION 2.2 *Une droite verticale ne peut couper le graphe d'une fonction qu'en au plus un point.*

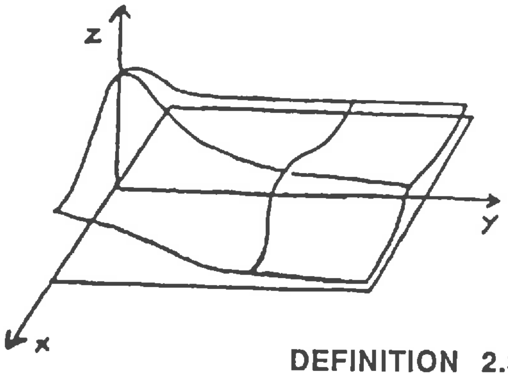


Ainsi, un cercle n'est pas le graphe d'une fonction car il ne satisfait pas le test des verticales. En conclusion, le graphe d'une fonction est une courbe plane, mais inversement, une courbe donnée n'est le graphe d'une fonction que si elle passe positivement le test des verticales.

Note. Une droite verticale x = a peut ne couper le graphe d'une fonction en aucun point. En fait, c'est le cas ssi a ∉ D_f. Par exemple, la droite x = 0 ne coupe pas le graphe de la fonction x → 1/x.

2.2 Graphe d'une fonction de 2 variables.

On a également une représentation graphique intuitive de la fonction température T(x,y) de l'exemple 3 du §1 (plaque métallique chauffée à l'origine). On a introduit ci-contre un troisième axe Oz; le graphe est alors l'ensemble de tous les



points de l'espace de coordonnées (x,y,T(x,y)). Le graphe ou surface représentative d'une fonction quelconque est défini de la même façon.

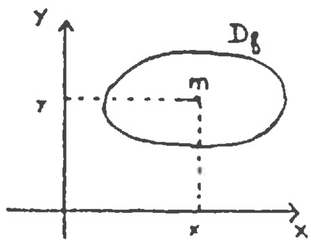
DEFINITION 2.3 *Soit* f *une fonction de 2 variables. On appelle graphe de* f *, l'ensemble* G_f *de tous les points du plan* R^3 *de coordonnées* (a,b,f(a,b)) *où le point* m(a,b) *varie dans* D_f *; c'est-à-dire:*

$$G_f = \{ M(a,b,f(a,b)) \mid m(a,b) \in D_f \}$$

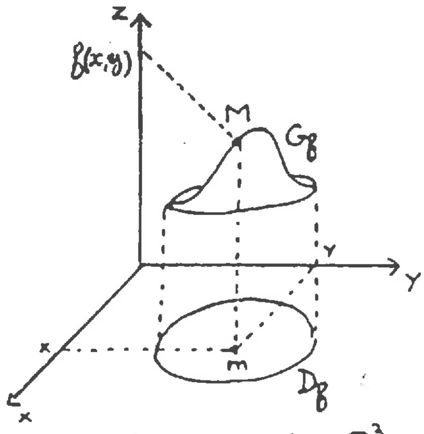
Le graphe G_f *est une surface dans l'espace; elle est d'équation*

$$z = f(x,y) \text{ (avec } (x,y) \in D_f).$$

Pour une fonction de 2 variables, il convient donc de distinguer, d'une part, la représentation dans le plan R^2 de son domaine de définition, et d'autre part, la représentation dans l'espace R^3, de son graphe.

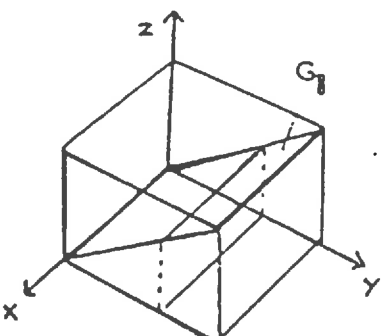


Représentation de D_f dans $\mathbb{R}^2$



Représentation de G_f dans $\mathbb{R}^3$

Dès que l'on dépasse 2 variables, il devient plus difficile de représenter graphiquement les fonctions. Le graphe d'une fonction de 3 variables, par exemple, est une variété géométrique de l'espace à 4 dimensions R^4.

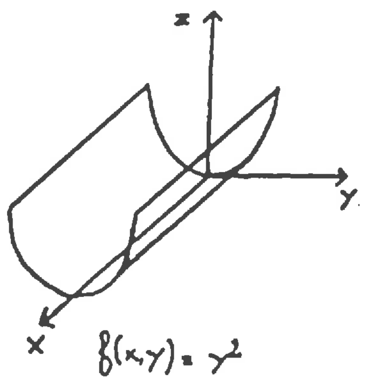


$f(x,y) = y$

Exemple 4 Soit $f(x,y) = x^3-y^2$. Donner les coordonnées de plusieurs points sur le graphe G_f de f. Les points suivants sont-ils sur G_f: A(1,2,3), B(2,3,-1), C(4,8,0)?

Exemple 5 Le graphe G_f d'une fonction constante f(x,y) = c est le plan horizontal d'équation z = c.

Exemple 6 Le graphe G_f de la fonction f(x,y) = y est le plan d'équation z = y. Plus généralement, le graphe d'une fonction du type f(x,y) = ax+by+c est un plan, le plan d'équation z = ax+by+c.



Exemple 7 Soit $f(x,y) = x^2+y^2$. Son graphe G_f est le paraboloïde de révolution $z = x^2+y^2$.

Exemple 8 Soit $f(x,y) = y^2$. Les points d'abscisse $x = 0$ sur G_f sont les points de coordonnées $(0,y,y^2)$, i.e., les points de la parabole $z = y^2$ du plan vertical $x = 0$. La fonction ne dépendant pas de x, le même raisonnement vaut pour $x = a$ quelconque. C'est-à-dire: on obtient le graphe G_f en dessinant la parabole $z = y^2$ sur tous les plans verticaux $x = a$. D'où la figure ci-contre; la surface obtenue est un paraboloïde cylindrique.

Exemple 9 Le graphe G_f de la fonction $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ est d'équation

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ou de façon équivalente $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$

C'est donc la demi-sphère située dans le demi-espace supérieur $z \geq 0$.

Test des verticales La sphère complète n'est pas le graphe d'une fonction de 2 variables. En effet, pour qu'une surface donnée soit le graphe d'une fonction de 2 variables, il faut et il suffit qu'elle satisfasse le test des verticales: si $m(a,b) \in D_f$, le seul point de G_f au dessus de m est le point $M(a,b,f(a,b))$. Autrement dit

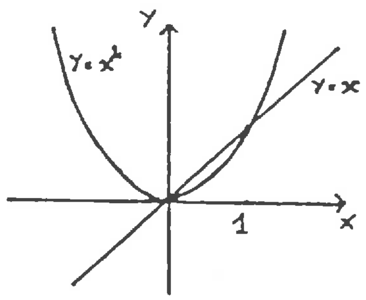
PROPOSITION 2.4 *Toute droite verticale ne peut couper le graphe d'une fonction de deux variables qu'en au plus un point.*

2.3 Relation d'ordre et graphes.

Soient f et g deux fonctions de n variables. On peut les comparer: si E est contenu à la fois dans D_f et dans D_g, on dira que $f \geq g$ sur E si pour tout $(x_1,...,x_n)$ dans E, on a

$$f(x_1,...,x_n) \geq g(x_1,...,x_n).$$

Géométriquement, $f \geq g$ sur E signifie que E, le graphe G_f de f se situe au dessus du graphe G_g de g .



Exemple 10 Soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. On a $f \geq g$ sur $]-\infty,-1]$ et sur $[1,+\infty[$ mais $g \geq f$ sur $[-1,+1]$.

Exemple 11 Soient $f(x,y) = x^2+y^2$, $g(x,y) = 0$, $h(x,y) = 2xy$ et $k(x,y) = 2x$. Montrer que $f \geq g$ et $f \geq h$ sur $\mathbf{R}^2$. Déterminer les parties de $\mathbf{R}^2$ sur lesquelles $f \geq k$ et celles sur lesquelles $k \geq f$.

§3. PROPRIETES GEOMETRIQUES DES GRAPHES DE FONCTIONS.

3.1 Monotonie (une variable).

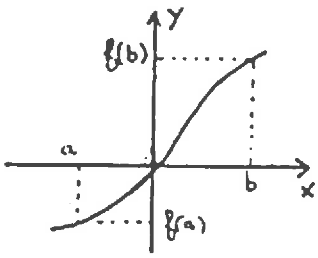
Une des premières choses que l'on peut dire de la courbe représentative d'une fonction d'une variable, c'est qu'elle "monte" ou/et qu'elle "descend". Cela renvoie à la notion de fonction monotone sur un intervalle.

DEFINITION 3.1 *Une fonction* $x \to f(x)$ *est dite croissante (resp. décroissante) sur un intervalle* I *inclus dans* D_f *si pour tous* a *et* b *dans* I, *on a*

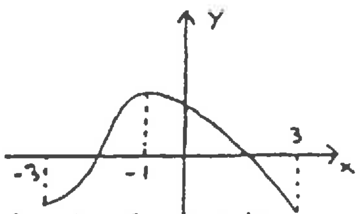
$$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

$$(\textit{resp. } a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)).$$

On obtient la définition de "strictement croissante" (resp. "strictement décroissante") en remplaçant les inégalités par des inégalités strictes. La fonction f *est dite (strictement) monotone sur* I *si elle est soit (strictement) croissante soit (strictement) décroissante.*



f est croissante



f croît sur [-3,-1] et décroît sur [-1,3]

Une fonction f étant donnée, le problème se pose alors de déterminer les intervalles où f est monotone. La théorie des fonctions dérivées conduit au résultat suivant.

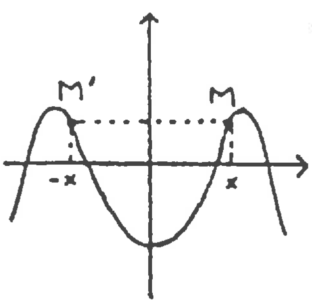
THEOREME 3.2 *Soit* f *une fonction dérivable. Alors* f *est croissante (resp. décroissante) sur les intervalles où la dérivée* f' *ne prend que des valeurs* ≥ 0 *(resp.* ≤ 0*).*

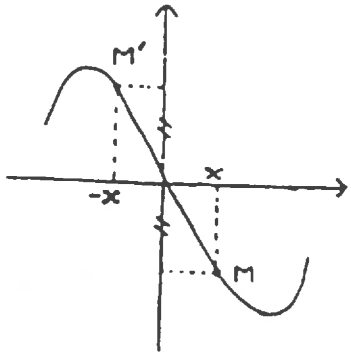
Le problème précédent est donc ramené à celui de déterminer le signe de f'.

Exemple 1 Soit $f(x) = x^2-x$; $f'(x) = 2x-1$. la fonction f est donc croissante sur $[1/2,+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty,1/2]$.

3.2 Propriétés de symétrie (une variable).

Soit f une fonction d'une variable. Dire que son graphe est symétrique par rapport à l'axe Oy, c'est dire que pour tout $x \in D_f$, les points du graphe G_f d'abscisse x et -x ont même ordonnée, i.e., que $f(x) = f(-x)$, pour tout $x \in D_f$. Une fonction qui a cette propriété est dite **paire**.





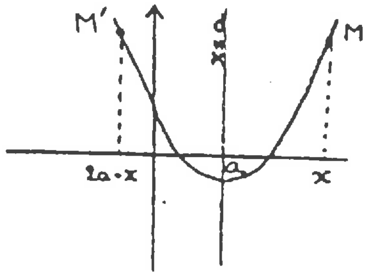
Exemple 2 $x \to x^2$, $x \to |x|$, $x \to \cos(x)$ sont des fonctions paires.

Dire que le graphe d'une fonction f est symétrique par rapport au point origine O, c'est dire que pour tout $x \in D_f$, les points du graphe G_f d'abscisse x et -x ont des ordonnées opposées (voir figure ci-contre), i.e., que $f(-x) = -f(x)$, pour tout $x \in D_f$. Une fonction qui a cette propriété est dite **impaire.**

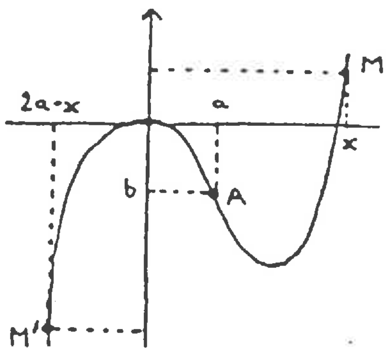
Exemple 3 $x \to x$, $x \to x^3$, $x \to 1/x$, $x \to \sin(x)$ sont des fonctions impaires.

Exemple 4 Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires.

(a) $x \to \sin(x)/(x^3+x)$
(b) $x \to x^6+5x^4+3x^2+1$
(c) $x \to \sin(x^2)$
(d) $x \to (\sin(x))^2$
(e) $x \to (\sin(x)\cos(x))/(x|x|)$
(f) $x \to \sin(\sin(x))$



Exemple 5 Déterminer toutes les fonctions paires (resp. impaires) de la forme $x \to ax+b$.



Ces propriétés de symétrie se généralisent. La droite verticale x = a est **axe de symétrie** du graphe G_f ssi pour tout $x \in D_f$, on a

$$f(2a-x) = f(x)$$

Le point A(a,b) est **centre de symétrie** du graphe G_f ssi pour tout $x \in D_f$, on a

$$f(2a-x) = 2b-f(x)$$

On notera que si une telle propriété de symétrie a lieu, il suffit d'étudier f sur la moitié de son domaine, par exemple $[a,+\infty[$.

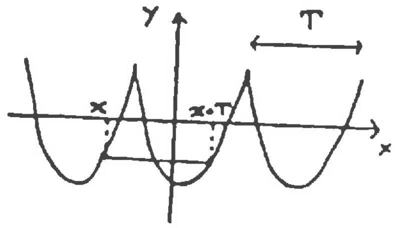
Exemple 6 Vérifier que la droite x = 1 est axe de symétrie de la fonction $f(x) = x^2-2x$.

Exemple 7 Vérifier que la droite x = 2 est axe de symétrie de la fonction $f(x) = |x-1|+|x-3|$. Montrer plus généralement que si g est une fonction quelconque, le graphe de la fonction $f(x) = g(x)+g(2a-x)$ admet la droite x = a comme axe de symétrie.

Exemple 8 Vérifier que le point A(1,-2) est centre de symétrie de la fonction définie par $f(x) = x^3-3x^2$. Même question avec A(3,2) et $f(x) = (2x-1)/(x-3)$.

Les formules de définition sont toujours faciles à vérifier quand on connait par avance l'axe ou le centre de symétrie. Mais ces formules sont à proscrire quand on cherche à déterminer s'il y a axe ou centre de symétrie. Il y a plusieurs exemples classiques à connaître: ainsi, les fonctions f: $x \to ax^2+bx+c$ (où $a \neq 0$) dont le graphe est une parabole, admettent pour axe de symétrie la droite verticale passant par l'extremum de f , i.e., la droite $x = -b/2a$ (Cf. Exemple 6); le graphe d'une homographie $f: x \to (ax+b)/(cx+d)$ est symétrique par rapport au point d'intersection $A(-d/c,a/c)$ des asymptotes (Cf. Exemple 8). Ces exemples seront revus au Ch.3.

3.3 Périodicité (une variable).



Soit $T \neq 0$ un nombre réel. Une fonction f est dite **périodique de période T** si pour tout $x \in D_f$, les points du graphe G_f d'abscisse x et x+T ont même ordonnée, i.e., si pour tout $x \in D_f$, on a

$$f(x+T) = f(x).$$

Le graphe G_f d'une fonction périodique de période T reste inchangé si on le translate de T unités le long de l'axe Ox.

Exemple 9 Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.

Exemple 10 Représenter les deux fonctions $x \to [x]$ et $x \to x-[x]$. Montrer que la seconde est périodique.

Si T est une période de f, 2T, 3T, -T et plus généralement nT pour $n \in \mathbf{Z}$ en sont d'autres. Mais il est avantageux d'en connaître une plus petite possible dans $\mathbf{R}^*_+$. On notera aussi qu'il suffit d'étudier une fonction périodique de période T sur n'importe quel intervalle de longueur T.

Exemple 11 Etudier la périodicité des fonctions suivantes (on cherchera une plus petite période possible dans $\mathbf{R}^*_+$

(a) $x \to |\sin(x)|$ (d) $x \to \sin(2x)+\sin(6x)$
(b) $x \to \sin(3x)$ (e) $x \to 2x-[2x]$
(c) $x \to \sin(2\pi x)$ (f) $x \to \cos(2x+3)$

3.4 Fonctions bornées.

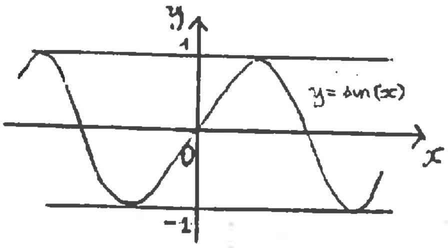
Une fonction $f(x_1,\dots,x_n)$ est dite **majorée** (par un nombre réel M) sur un sous-ensemble E si toutes les valeurs prises par f sur E sont inférieures à M ; c'est-à-dire:

$$(\forall\ (x_1,\dots,x_n) \in E)(f(x_1,\dots,x_n) \leq M)$$

On obtient la définition de "**minorée**" en changeant le sens de la dernière inégalité. La fonction $f(x_1,\dots,x_n)$ est dite **bornée** sur E si elle est à la fois majorée et minorée sur E; c'est-à-dire:

$$(\exists\ m,M \in \mathbf{R})(\forall\ (x_1,\dots,x_n) \in E)(m \leq f(x_1,\dots,x_n) \leq M)$$

Géométriquement, une fonction d'une variable f(x) est majorée (resp. minorée) sur E si son graphe reste au dessous (resp. au



dessus) d'une droite horizontale fixe sur E. Pour des fonctions de deux variables, il faut remplacer les droites horizontales par des plans horizontaux: par exemple, une fonction $f(x,y)$ est bornée sur son domaine si son graphe est coincé entre deux plans horizontaux.

Exemple 12 Les fonctions sin et cos sont bornées sur **R**, supérieurement par +1 et inférieurement par -1.

Exemple 13 La fonction $1/x$ n'est ni majorée ni minorée sur **R** mais elle l'est par exemple sur l'intervalle $[1,2]$. La fonction de 2 variables $f(x,y) = \exp(-x^2-y^2)$ est bornée sur $\mathbf{R}^2$, par 0 et 1.

3.5 Fonctions homogènes (n variables).

DEFINITION 3.3 *Une fonction* $f(x_1,\dots,x_n)$ *est dite homogène de degré* $k \in \mathbf{R}$ *si pour tout* $(x_1,\dots,x_n) \in D_f$ *et tout nombre réel* $t > 0$, *on a*

$$f(tx_1,\dots,tx_n) = t^k f(x_1,\dots,x_n)$$

k *s'appelle le degré d'homogénéité de* f.

Exemple 14 Montrer que les fonctions suivantes sont homogènes. Déterminer leur degré d'homogénéité.

(a) $x \to x^k$

(b) $(x,y) \to x^3+2y^3-3xy^2$

(c) $(x,y,z) \to (xy+yz+zx)/(x+y+z)$

(d) $(x,y) \to \mathrm{tg}(y/x)$

(e) $(x,y) \to (x^3+2y^3)^{1/3}$

(f) $(x,y) \to x^\alpha y^{1-\alpha}$ $(\alpha \in]0,1[)$.

Pour $t \in \mathbf{R}_+^*$, notons h_t l'homothétie centrée à l'origine et de rapport t. De façon précise, h_t est la transformation

$$M(x,y,z) \to M'(tx,ty,tz).$$

Les fonctions homogènes de degré 1 ont la propriété suivante.

THEOREME 3.4 *Le graphe d'une fonction* $f(x,y)$ *homogène de degré* 1 *est invariant par toute homothétie* h_t.

Exemple 15 La fonction $f(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ est homogène de degré 1. Son graphe est un cône de Cobb-Douglas; il est invariant par toute homothétie.

Démonstration. Soit $P(x,y,f(x,y))$ un point quelconque du graphe G_f. Son image par h_t est le point $P'(tx,ty,tf(x,y))$. Il s'agit de voir que le point P' est encore un point du graphe, i.e., que ses coordonnées satisfont l'équation de G_f

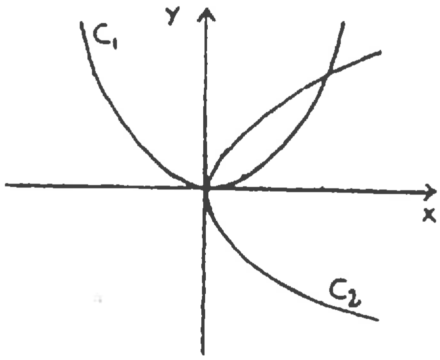
3ème coord.= f(1ère coord.,2ème coord.),

i.e., que $tf(x,y) = f(tx,ty)$.

Cette égalité traduit exactement l'homogénéité de degré 1 de f.

§4. FONCTIONS IMPLICITES.

4.1 Une variable



Exemple 1 Considérons la parabole verticale C_1 d'équation $3y-x^2 = 0$. La courbe C_1 est le graphe d'une fonction d'une variable: en effet, C_1 satisfait le test des verticales. Pour trouver de quelle fonction c'est le graphe, il suffit de résoudre en y l'équation $3y-x^2 = 0$. C_1 est le graphe de la fonction $y(x) = x^2/3$. On dit que l'équation $3y-x^2 = 0$ définit implicitement y en fonction de x (ou définit une fonction implicite y(x)).
A l'inverse, la parabole horizontale C_2 d'équation $3x-y^2 = 0$ n'est pas le graphe d'une fonction d'une variable: C_2 ne satisfait pas le test des verticales; on ne peut pas résoudre en y de façon unique l'équation $3x-y^2 = 0$; par exemple, pour $x = 3$, l'équation a les deux solutions 3 et -3. L'équation $3y-x^2 = 0$ ne définit pas implicitement y en fonction de x.

DEFINITION 4.1 *Une relation (ou équation)* $F(x,y) = 0$ *entre* x *et* y *définit implicitement* y *en fonction de* x *(ou définit une fonction implicite* y(x)*) si*

(*) *pour tout* $x \in \mathbf{R}$ *, l'équation* $F(x,y) = 0$ *a au plus une solution* y(x)

(en gros, si $F(x,y) = 0$ *se résout en y de façon unique).*

On se rappelera la motivation géométrique: la relation $F(x,y) = 0$ définit une fonction implicite y(x) ssi la courbe C d'équation $F(x,y) = 0$ satisfait le test des verticales. La courbe C est alors le graphe de la fonction y(x).

Exemple 2 Etudier si les relations suivantes définissent implicitement y en fonction de x.

(a) $2e^{3x^2y} - 5 = 0$ (c) $xy-x = y$

(b) $2e^{3y^2x} - 5 = 0$ (d) $x = |y|$

Si la relation $F(x,y) = 0$ se résout en x de façon unique, on dit que la relation $F(x,y) = 0$ définit implicitement x en fonction de y (ou définit une fonction implicite x(y)). On notera que si on laisse x en abscisse et y en ordonnée, la condition géométrique pour que $F(x,y) = 0$ définisse implicitement x(y) est cette fois **le test des horizontales:** aucune droite horizontale ne doit couper la courbe C d'équation $F(x,y) = 0$ en plus d'un point.

Exemple 3 Etudier si les relations suivantes définissent implicitement y(x) ou/et x(y).

(a) $x^2-y^2 = 1$ (c) $y^2-xy = 1$

(b) $\dfrac{2x+y}{xy^2} = 2$ (d) $\mathrm{Log}(x) = \dfrac{1-\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}$

Solution. (c) L'équation ne définit pas implicitement $y(x)$: en effet, pour $x = 0$, l'équation a deux solutions, 1 et -1. En revanche, l'équation définit implicitement $x(y)$: $x(y) = (y^2-1)/y$.

4.2 n variables.

De façon générale, on dit qu'une relation $F(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = 0$ entre n+1 variables $x_1, \ldots,x_n,x_{n+1}$ définit implicitement x_{n+1} en fonction de $x_1,\ldots,x_n$ (ou définit une fonction implicite $x_{n+1}(x_1,\ldots,x_n)$) si

(**) pour tout $x_1,\ldots,x_n$, l'équation $F(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = 0$ a au plus une solution $x_{n+1}(x_1,\ldots,x_n)$

(en gros, si l'équation $F(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = 0$ se résout de façon unique en x_{n+1}).

Pour $n = 2$, on dispose, comme en §4.1, du test des verticales: la relation $F(x,y,z) = 0$ définit une fonction implicite $z(x,y)$ ssi la surface S d'équation $F(x,y,z) = 0$ satisfait le test des verticales. La surface S est alors le graphe de la fonction $z(x,y)$.

Exemple 4 Etudier si les relations suivantes définissent implicitement $z(x,y)$.

(a) $x+2y+3z = 1$

(b) $z-x^2= y^2+1$

(c) $\dfrac{x+3z}{2y+z} = xy^2$

(d) $x^2+y^2+z^2= r^2$

(e) $z^2-x^2-y^2 = 0$

(f) $e^{|x|\sqrt{z}/y^2} = 3$

§5. NOTION D'ANTECEDENT ET APPLICATIONS.

DEFINITION 5.1 *Soit f une fonction de n variables. Soit c un nombre réel. On dit qu'un point $(x_1,\ldots,x_n)$ dans le domaine D_f est un antécédent de c par f si $f(x_1,\ldots,x_n) = c$.*

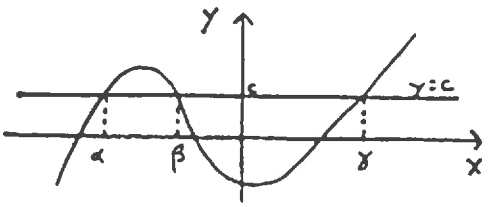
Exemple 1 Soit $f(x) = x+1$. Le nombre $c = 8$ a un unique antécédent: $x = 7$. Plus généralement, tout nombre réel y a pour unique antécédent $y-1$.

Exemple 2 Soit $f(x) = x^2$. Le nombre $c = 4$ a 2 antécédents: 2 et -2. Plus généralement, tout nombre réel $y > 0$ a 2 antécédents: $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$. Un nombre réel $y < 0$ n'a pas d'antécédent.

Exemple 3 Soit $f(x,y) = x^2+y^2$. Les antécédents de 1 par f sont les points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que nombre $x^2+y^2 = 1$; ce sont donc tous les points du cercle unité $C(O,1)$.

Note. L'ensemble des antécédents par f d'un nombre réel donné peut être vide, réduit à un point, à un nombre fini de points ou même infini.

5.1 Propriétés ensemblistes des fonctions d'une variable.



Géométriquement, on obtient les antécédents d'un nombre réel c par une fonction f d'une variable de la manière suivante: on trace la droite horizontale d'équation y = c; les antécédents de c par f sont les abscisses des points d'intersection de cette droite et du graphe G_f.

Injectivité

Une fonction f est dite **injective** si tout nombre réel c a **au plus un** antécédent par f. De façon équivalente, f est injective si on ne peut pas trouver deux nombres distincts x_1 et x_2 où f prenne la même valeur. On peut formaliser cette définition de plusieurs façons:

(i) $(\forall\ y \in \mathbb{R})$(L'équation $f(x) = y$ a au plus une solution $x \in D_f$)

(ii) $\nexists\ x_1, x_2 \in D_f \mid x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$

(iii) $(\forall\ x_1, x_2 \in D_f)\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

(iv $(\forall\ x_1, x_2 \in D_f)\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

Exemple 4 Les fonctions $x \to x^2$, $x \to |x|$, $x \to 0$ ne sont pas injectives. Dans chacun des cas, on a par exemple $f(2) = f(-2)$.

Exemple 5 La fonction $x \to ax+b$ est injective si $a \neq 0$. En effet, l'équation $y = ax+b$ a pour unique solution $x = (y-b)/a$.

Exemple 6 Montrer que la fonction $x \to (2x+1)/(x-1)$ est injective. Tout nombre réel admet-il un antécédent?

Exemple 7 Montrer qu'une fonction qui possède un axe de symétrie n'est pas injective. Idem pour les fonctions périodiques.

Dans la pratique, on utilise un des 2 critères suivants. Le premier, qui dérive de la définition (i), est celui utilisé dans les exemples 5 et 6.

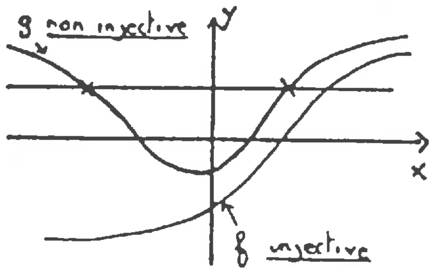
PROPOSITION 5.2 (Critère algébrique)

f est injective ssi l'équation $f(x) = y$ (avec $x \in D_f$) *définit implicitement* x *en fonction de* y.

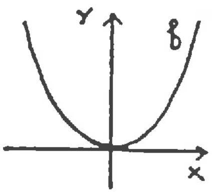
Exemple 8 : La fonction $x \to \dfrac{3e^x-1}{5e^x-2}$ est elle injective?

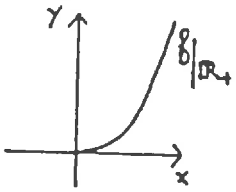
Le second est un critère géométrique; on l'appelle **test des horizontales pour l'injectivité:**

PROPOSITION 5.3 (Critère géométrique) *f est injective ssi toute droite horizontale ne coupe le graphe G_f qu'en au plus un point.*



Généralisation Soit I un sous-ensemble de D_f. La fonction $x \to f(x)$ avec la contrainte $(x \in I)$ est appelée **restriction de f à I** et notée $f|_I$. Son graphe est la partie du graphe G_f située "au dessus" de I. Une fonction f sera dite injective sur I si la restriction $f|_I$ est injective, c'est-à-dire si tout nombre réel c a au plus un antécédent par f **qui soit dans I.**





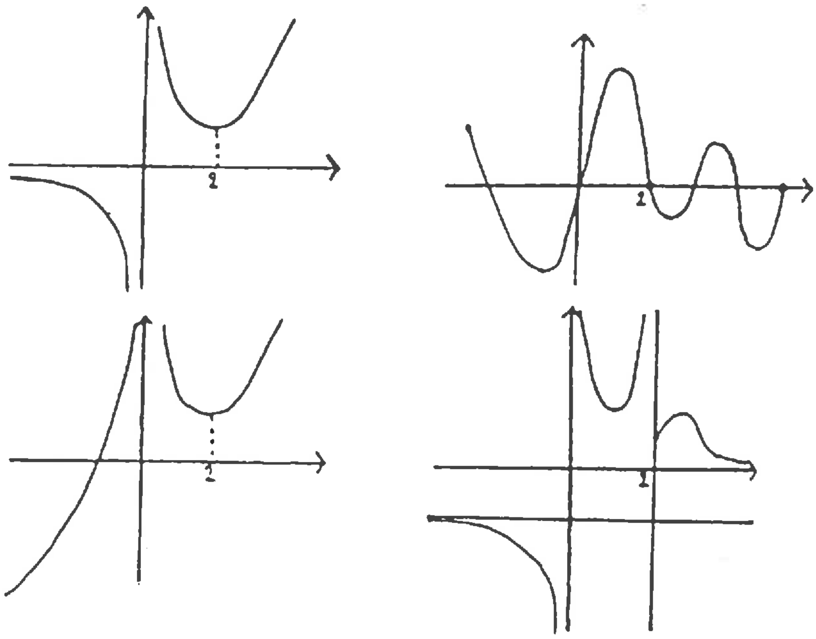
Exemple 9 La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas injective, mais les fonctions $f|_{\mathbf{R}+}$ et $f|_{\mathbf{R}-}$ le sont.

Ensemble image L'ensemble image $f(D_f)$ d'une fonction f est l'ensemble de toutes les valeurs prises par f (Cf. §1.1). Notons que dire qu'un nombre réel c est une valeur de f revient à dire que c a **au moins un antécédent** par f. On déduit

PROPOSITION 5.4 *Un nombre réel* c *appartient à l'ensemble image* $f(D_f)$ *ssi la droite horizontale* $y = c$ *coupe le graphe* G_f *en au moins un point. L'ensemble image* $f(D_f)$ *de* f *est donc l'ensemble des nombres réels* c *tels que la droite horizontale* $y = c$ *coupe le graphe* G_f *en au moins un point.*

Méthode des horizontales De façon pratique, on détermine l'ensemble image $f(D_f)$ à partir du graphe de f de la façon suivante: on fait glisser une droite horizontale $y = c$ le long de Oy; $f(D_f)$ est l'ensemble des "niveaux" c où cette droite coupe le graphe.

Exemple 10 Déterminer les ensembles image des fonctions définies par les graphes ci-dessous. Sont-elles injectives?



On peut également trouver algébriquement l'ensemble image d'une fonction: on résout en x l'équation $y = f(x)$; l'ensemble image est alors l'ensemble de tous les nombres réels y pour lesquels cette équation a au moins une solution.

Exemple 11 Déterminer algébriquement les ensembles image des fonctions suivantes

(a) $x \to 1/x$ (b) $x \to (2x+1)/(x-1)$

(c) $x \to -x^2+2x-3$ (d) $x \to \exp\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}\right)$.

Solution. (c) L'équation $-x^2+2x-3 = y$ a au moins une solution ssi le discriminant du trinôme $x^2-2x+(3+y) = 0$ est ≥ 0, i.e., ssi $-2-y \geq 0$. L'ensemble image est donc $]-\infty,-2]$.

Il est cependant beaucoup plus aisé d'utiliser la Proposition 5.4 plutôt que la méthode algébrique. C'est une des raisons pour lesquelles il est important de savoir tracer le graphe d'une fonction.

Généralisation Soit I un sous-ensemble de D_f. L'ensemble f(I) image de I par f est l'ensemble image de la restriction $f|_I$. C'est donc l'ensemble de tous les nombres réels c tels que la droite horizontale $y = c$ coupe le graphe G_f en au moins un point d'abscisse dans I.

Exemple 12 Déterminer les ensembles f(I) des fonctions de l'exemple 10 pour $I = \mathbf{R}_+$, $I = \mathbf{R}_-$, $I = [2,+\infty[$, $I =]2,+\infty[$.

Surjectivité Une fonction f est dite surjective sur I si l'ensemble f(I) est **R** tout entier (on dit seulement "surjective" quand $I = D_f$). La fonction f est surjective sur **I** si tout nombre réel c s'écrit $c = f(x)$ avec $x \in \mathbf{I}$, ou encore si toute droite horizontale coupe le graphe G_f en au moins un point d'abscisse dans **I**.

Exemple 13 La fonction $x \to x^3$ est surjective (sur **R**) mais pas sur $\mathbf{R}_+$.

Réciproque d'une injection

Soit f une injection, i.e., une fonction injective. Soit y un nombre réel dans l'ensemble image $f(D_f)$ de f; y a **au moins un** antécédent par f par définition de l'ensemble image et en a **au plus un** car f est injective. Par conséquent, y a **exactement un** antécédent par f; cet antécédent est x(y), l'unique solution de l'équation $f(x) = y$. La correspondance

$$y \to x(y) \quad (y \in f(D_f))$$

définit donc une fonction, appelée **réciproque de f** et notée f^{-1}.

Le domaine de définition de la réciproque f^{-1} est l'ensemble image de f, son ensemble image est le domaine de f et la valeur de f^{-1} en y est l'unique antécédent de y par f. On a donc, pour f injective:

$$\begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(D_f) \end{cases} \iff \begin{cases} y = f(x) \\ x \in D_f \end{cases}$$

De façon pratique, on détermine la réciproque d'une fonction en résolvant l'équation $f(x) = y$. **Si cette équation définit implicitement x(y)**, la fonction f est injective. Sa réciproque est la fonction définie sur l'ensemble $f(D_f)$ (qu'on détermine par les méthodes expliquées plus haut) par $f^{-1}(y) = x(y)$.

Exemple 14 Vérifier que la fonction $f(x) = (2x+1)/(x-1)$ est injective et déterminer sa réciproque.

Solution. On sait (Cf. Exemple 6) que l'équation $y = (2x+1)/(x-1)$ se résout de façon unique en $x(y) = (y+1)/(y-2)$; f est donc injective. L'ensemble image de f est $\mathbf{R}\backslash\{2\}$ (Cf. Exemple 11). La réciproque de f est la fonction

$$y \to (y+1)/(y-2) \quad (y \neq 2)$$

qu'on peut noter aussi

$$x \to (x+1)/(x-2) \quad (x \neq 2)$$

(x et y sont des lettres muettes).

Exemple 15 Vérifier que la fonction $f(x) = \sqrt{x-1}$ est injective et déterminer sa réciproque.

Solution. L'équation $y = \sqrt{x-1}$ se résout de façon unique en $x(y) = y^2+1$; f est donc injective. L'ensemble image de f est $\mathbf{R}_+$. La réciproque de f est la fonction

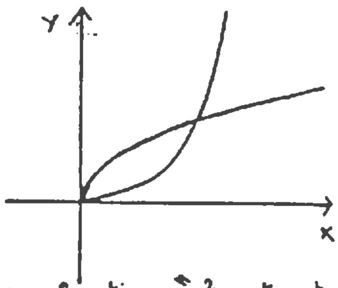
$$y \to y^2+1 \quad (y \geq 0)$$

Attention! La fonction $y \to y^2+1$ est définie sur **R** tout entier mais ce n'est pas la réciproque de f.

Exemple 16 Soit $f(x) = x^2$. Les fonctions $f|_{R_+}$ et $f|_{R_-}$ sont injectives. Déterminer leur réciproque.

Graphe de la réciproque

Soit f une injection. Dans le plan Oxy, le graphe de la réciproque $f^{-1}: x \to f^{-1}(x)$ est la courbe plane d'équation $y = f^{-1}(x)$ ou, de façon équivalente $x = f(y)$. Le graphe de la réciproque f^{-1} se déduit donc du graphe G_f de f en échangeant x et y, i.e., par une symétrie par rapport à la première diagonale y = x.



Les fonctions x^2 restreinte à $\mathbb{R}_+$ et $\sqrt{x}$

Exemple 17 Tracer le graphe des fonctions

(a) $x \to (2x+1)/(x-2)$ (b) $x \to \sqrt{x-1}$

(utiliser les exemples 14 et 15).

Exemple 18 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la fonction $f(x) = ax+b$ soit égale à sa réciproque.

Bijection

Par une injection f, les éléments du domaine D_f et ceux de l'ensemble image $f(D_f)$ se correspondent de façon biunivoque. On dit que f est une bijection de D_f sur $f(D_f)$. On notera qu'alors, la réciproque est également une bijection, de $f(D_f)$ sur D_f.

5.2 Courbes de niveau des fonctions de 2 variables.

DEFINITION 5.5 *Soient* f *une fonction de* 2 *variables et* $c \in \mathbb{R}$. *On appelle courbe (ou ligne) de niveau* c *de* f *l'ensemble des antécédents de* c *par* f. *On la note* l_f^c ; *c'est une courbe plane, d'équation* $f(x,y) = c$.

Lignes de niveau et sections

On appelle **section** d'un objet dans R^3 toute intersection de cet objet avec un plan. Par exemple, les sections d'une sphère sont des cercles; les sections d'une boule sont des disques; les sections d'un cône sont des coniques (i.e., des ellipses, des hyperboles ou des paraboles); les sections horizontales d'une sphère sont des cercles concentriques.

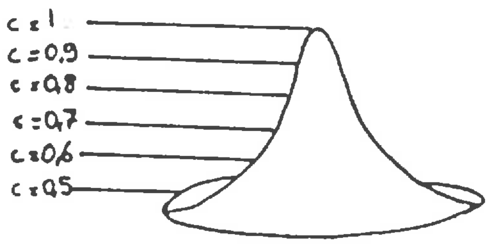
Soit f(x,y) une fonction. La section de son graphe G_f par le plan horizontal z = c est la courbe de l'espace R^3 d'équation

$$\begin{cases} f(x,y) = z \\ z = c \end{cases} \quad \text{ou, de façon équivalente} \quad \begin{cases} f(x,y) = c \\ z = c \end{cases}$$

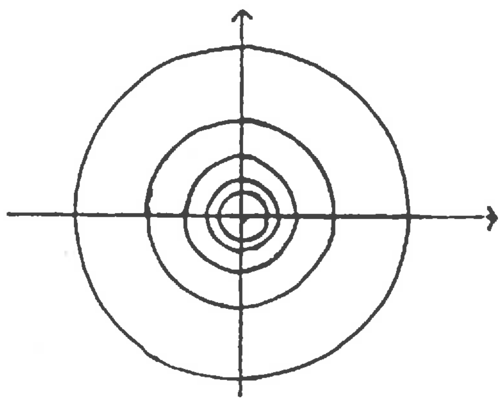
Autrement dit, c'est la courbe du plan horizontal z = c d'équation f(x,y) = c. Projetons cette courbe dans le plan Oxy, identifié au plan R^2. On obtient une courbe plane, d'équation $f(x,y) = c$, soit la ligne de niveau c de f. D'où le résultat suivant.

PROPOSITION 5.6 *La ligne de niveau* c *de* f *s'obtient en projetant sur le plan* Oxy *la courbe section du graphe* G_f *par le plan horizontal* $z = c$.

La représentation sur un même graphique des courbes de niveau c, pour des niveaux c choisis à intervalles réguliers donne une idée assez précise du relief de la surface représentative.



Graphe de $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

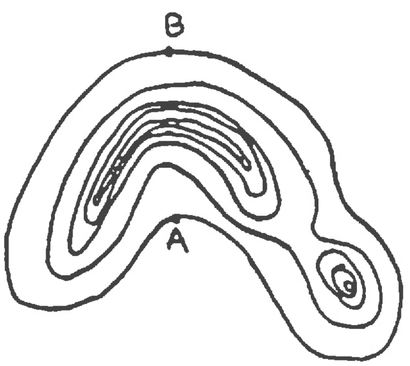


Lignes de niveau de f

Les courbes de niveau sont utilisées sur les cartes géographiques pour rendre compte du relief ou, en météorologie, de la température (les lignes de niveau s'appellent alors les **isothermes**) ou encore de la pression (les lignes de niveau s'appellent alors les **isobares**). On les utilise aussi en Economie:

• En théorie de la production: Si $Q = f(K,L)$ est une fonction de production, la courbe de niveau Q_0 est l'ensemble des combinaisons possibles de capital K et de travail L permettant de produire Q_0. On l'appelle **isoquant** de niveau Q_0.

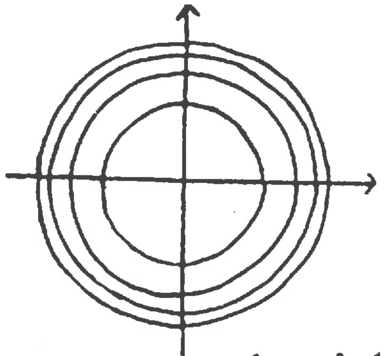
• En théorie de la consommation: Si $U = U(x,y)$ est la fonction d'utilité d'un consommateur, la courbe de niveau U_0 est appelée **courbe d'indifférence** de niveau U_0 du consommateur.



Exemple 19 Par où passer pour aller de A à B sur la figure ci-contre?

Exemple 20 Déterminer les courbes de niveau des fonctions suivantes:

(a)	$(x,y) \to y$	(e)	$(x,y) \to \sqrt{xy}$
(b)	$(x,y) \to y^2$	(f)	$(x,y) \to 2x^2+3y^2$
(c)	$(x,y) \to x^2+y^2$	(g)	$(x,y) \to y^2-x^2$

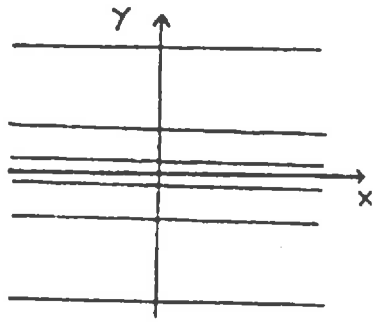


Lignes de niveau de $f(x,y)=x^2+y^2$

(d) $(x,y) \to x\text{-}y^2$ (h) $(x,y) \to xy+x+y$

Rép. (a) droites horizontales (b) couples de droites horizontales symétriques par rapport à Ox (ou ø) (c) cercles concentriques (ou ø) (d) paraboles d'axe horizontal (e) hyperboles équilatères (ou ø) (f) ellipses (ou ø) (g) hyperboles (h) hyperboles.

Exemple 21 Soit $f(x,y) = (x^4+y^4)/(8-x^2y^2)$. Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition D_f ainsi que l_f^2 la courbe de niveau 2.



Lignes de niveau de $f(x,y)=y^2$

Remarque. Une courbe de niveau est toujours incluse dans le domaine de définition de la fonction; cela résulte de la définition. Et deux courbes de niveaux distincts c_1 et c_2 sont nécessairement disjointes (en effet, un point $m(x,y)$ de l'intersection devrait vérifier à la fois $f(x,y) = c_1$ et $f(x,y) = c_2$).

Pour avoir une meilleure représentation du graphe G_f d'une fonction f, on peut, en plus des lignes de niveau, regarder quelques sections verticales. Par exemple, les sections de G_f par les plans Oxz et Oyz sont, à l'intérieur de ces plans, les courbes d'équation respectives $f(x,0) = z$ et $f(0,y) = z$.

Exemple 22 En utilisant cette méthode, tracer le graphe des fonctions $f(x,y) = x^2+y^2$ et $g(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2}$.

Graphes de révolution Le graphe G_f d'une fonction f est dit de révolution (autour de l'axe Oz) si les lignes de niveau sont soit vides soit des cercles centrés à l'origine O. Tous les graphes de révolution sont des cas particuliers du modèle suivant.

Soit φ une fonction **d'une variable** définie sur $\mathbf{R}_+$. Posons

$$f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Alors le graphe G_f de f est un graphe de révolution; il s'obtient en faisant tourner autour de l'axe Oz le graphe de la fonction $\varphi(y)$ dessiné dans le plan Oyz.

Exemple 23 Identifier la fonction φ pour les fonctions f et g de l'exemple 22.

§6. FONCTIONS PARTIELLES.

6.1 Définitions et notation.

Quand on fixe (i.e., quand on donne une valeur à) n-1 variables dans une fonction de n variables, on obtient une fonction d'une variable. De façon précise, si $f(x_1,\ldots,x_n)$ est une fonction de n variables et $m_o = (a_1,\ldots,a_n) \in D_f$, on note

$$f(a_1,\ldots,a_{i-1},\bullet,a_{i+1},\ldots,a_n)$$

la fonction obtenue en substituant a_j à x_j pour tout $j \neq i$ dans $f(x_1,...,x_n)$, c'est-à-dire la fonction:

$$x_i \rightarrow f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n).$$

Les n fonctions $f(a_1,...,a_{i-1},\bullet,a_{i+1},...,a_n)$, $i = 1,...,n$, associées au point $m_o = (a_1,...,a_n) \in D_f$ sont appelées fonctions partielles de f au point m_o.

Exemple 1 Soit $f(x,y,z) = xyz+yz+z$. Les 3 fonctions partielles de f au point $m_o(-1,1,3)$ sont les fonctions

$f(\bullet,1,3)$: $x \rightarrow 3x+6$

$f(-1,\bullet,3)$: $y \rightarrow 3$

$f(-1,1,\bullet)$: $z \rightarrow z$

6.2 Etude d'un exemple.

Reconsidérons l'exemple de la plaque métallique chauffée à l'origine (Cf. §1. Ex.3). La température d'un point de l'axe Oy d'équation $x = 0$ ne dépend que de de son ordonnée y; la fonction qui donne la température des points de l'axe $x = 0$ est la fonction partielle

$$T(0,\bullet): y \rightarrow T(0,y)$$

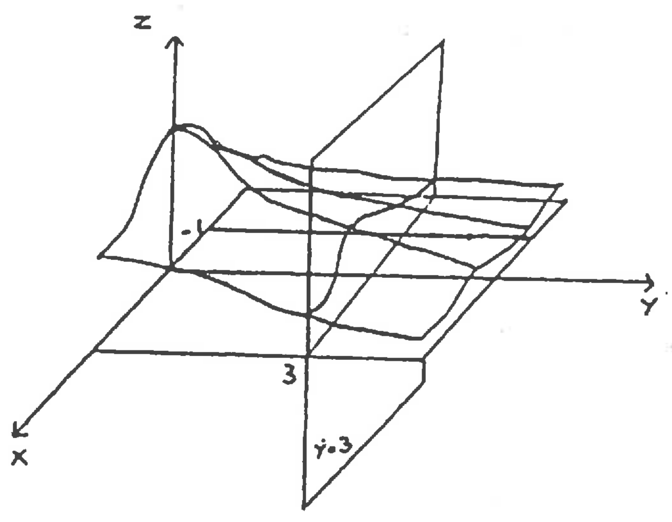
De façon plus générale, la température des points de la droite d'équation $x = x_o$ est donnée par la fonction partielle

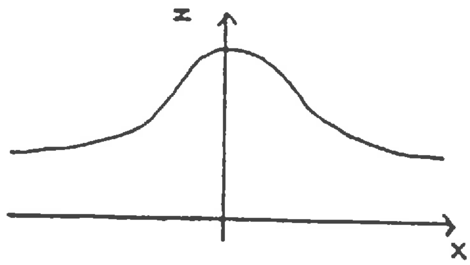
$$T(x_o,\bullet): y \rightarrow T(x_o,y)$$

et la température des points de la droite $y = y_o$ est donnée par la fonction partielle

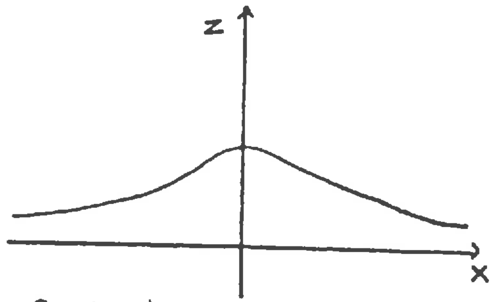
$$T(\bullet,y_o): x \rightarrow T(x,y_o)$$

Les graphes de ces fonctions sont visibles sur le graphe de T:

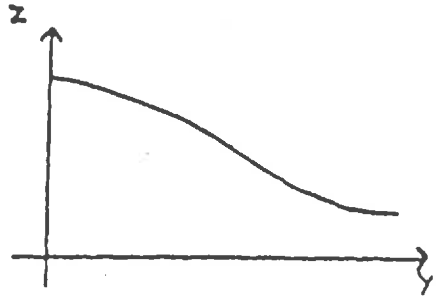




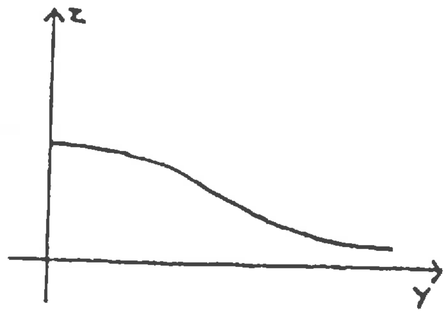
Graphe de $x \mapsto T(x,0)$
(Section de G_T par $y = 0$)



Graphe de $x \mapsto T(x,3)$
(Section de G_T par $y = 3$)



Graphe de $y \mapsto T(0,y)$
(Section de G_T par $x = 0$)



Graphe de $y \mapsto T(-1,y)$
(Section de G_T par $x = -1$)

• Le graphe de la fonction partielle $T(x_o,y)$ est la section du graphe G_T de la fonction $T(x,y)$ par le plan vertical d'équation $x = x_o$.

• Le graphe de la fonction partielle $T(x,y_o)$ est la section du graphe G_T de la fonction $T(x,y)$ par le plan vertical d'équation $y = y_o$.

Ces résultats sont valables pour n'importe quelle fonction $f(x,y)$ de 2 variables.

Les fonctions partielles décrivent comment varie une quantité dépendant de n variables quand toutes les variables sauf une sont fixées . Prenons par exemple la fonction de Cobb-Douglas avec $\alpha = 1/2$ (Cf. §1 Exemple 4): $Q(K,L) = \gamma\sqrt{K}\sqrt{L}$. Fixons $K = K_o$; alors $Q(K_o,L) = \delta\sqrt{L}$ où $\delta = \gamma\sqrt{K_o}$. On voit que $Q(K_o,L)$ croît comme $\sqrt{L}$, en particulier moins vite que L: à capital constant, doubler la main d'oeuvre n'a pas pour effet de doubler la production. Nous reviendrons sur cela de façon beaucoup plus précise au moment de l'étude des dérivées partielles.