Fiche n° 6: Anneaux, idéaux, morphismes

Par anneau, on entendra un anneau commutatif avec unité.

Exercice 1 Démontrer que tout morphisme d'un corps dans un anneau non nul est injectif.

Exercice 2 Soit A un anneau intègre dans lequel toute chaîne décroissante d'idéaux est finie. Démontrer que A est un corps.

Exercice 3 Montrer que dans un anneau fini A tout idéal premier I est maximal.

Exercice 4 Montrer qu'un idéal propre I d'un anneau A est premier si et seulement si quand le produit de deux idéaux est contenu dans I, alors l'un des deux est contenu dans I. En déduire que si M est un idéal maximal de A, alors le seul idéal premier de A qui contient M^n, $n \geqslant 1$ est M.

Exercice 5 1. Soit d un entier sans facteur carré et $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{Z}$ et $\sqrt{d}$. Trouver le nombre d'éléments de l'anneau quotient $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m)$ où $m \in \mathbb{Z}^*$.

2. L'idéal principal engendré par 2 est-il premier dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$?

Exercice 6 Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Montrer que :

1. Si J est un idéal premier de B, $f^{-1}(J)$ est un idéal premier de A.

2. Si J est un idéal maximal de B, $f^{-1}(J)$ n'est pas nécessairement un idéal maximal de A. Qu'en est-il si f est surjective ?

3. Si f est surjective et I est un idéal premier de A qui contient $\ker f$, $f(I)$ est un idéal premier de A.

4. Si f est surjective et I est un idéal maximal de A, $f(I) = B$ ou $f(I)$ est un idéal maximal de B.

5. Considérons la réduction de polynômes sur $\mathbb{Z}$ modulo m : $r_m : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_m[x]$ et deux idéaux premiers principaux (x) et (x^2+1). Les idéaux $r_6((x))$ et $r_2((x^2+1))$ sont-ils premiers ?

Exercice 7 1. Soit A un anneau principal et I un idéal de A. Montrer que tous les idéaux de l'anneau quotient A/I sont principaux.

2. Trouver les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Trouver les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 8 Soit I et J deux idéaux de l'anneau A. Considérons la projection canonique $\pi_I : A \to A/I$ et l'image $\bar{J} = \pi_I(J)$ de l'idéal J.

1. Montrer que $\bar{J}$ est un idéal de l'anneau quotient A/I.

2. Démontrer qu'on a l'isomorphisme suivant : $(A/I)/\bar{J} \cong A/(I+J)$.

Exercice 9 Soit A un anneau, B un sous-anneau de A et I un idéal de A.

1. Montrer que $B \cap I$ est un idéal de B, $B + I = \{b + i \,|\, b \in B,\ i \in I\}$ est un sous-anneau de l'anneau A et I est un idéal de ce sous-anneau.

2. Montrer que l'anneau quotient $B/(B \cap I)$ est isomorphe à l'anneau quotient $(B+I)/I$.

Exercice 10 Soit F un corps de caractéristique $p > 0$.
Montrer que
1. $X^n - a^n, a \in F\backslash\{0\}$, a des racines multiples si et seulement si $p|n$;
2. a est une racine de $X^p - a^p$ et sa multiplicité est p.

Exercice 11 On veut montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien. On considère l'application norme $N : \mathbb{Z}[i]\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ définie par : $N(z) = |z|^2$, où $|z|$ est le module de z.
Soit $A \in \mathbb{Z}[i], b \in \mathbb{Z}[i]\backslash\{0\}$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\frac{a}{b} - q| < 1$. Conclure.

Exercice 12 Le but de cet exercice est de démontrer que l'anneau $A = \mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$ n'est pas euclidien.
On pose $\alpha = \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$, $N(z) = z\overline{z}$, $\overline{z}$ étant le conjugué de z dans $\mathbb{C}$.
1. Vérifier que $\alpha^2 - \alpha + 5 = 0$ et que si $z \in A\backslash\{0\}$, $N(z)$ est un entier strictement positif.
2. Montrer que $z \in A^\times$ si et seulement si $N(z) = 1$ et déterminer $A^\times$.
3. On suppose que (A, ϕ) est euclidien. Soit $x \in A\backslash A^\times \cup \{0\}$ tel que $\phi(x)$ est minimal. Montrer que
a. la restriction à $A^\times \cup \{0\}$ de la surjection canonique $s : A \to A/(x)$ est surjective.
b. $A/(x)$ est isomorphe à F_2 ou à F_3.
c. Il existe un élément β de $A/(x)$ vérifiant l'équation $\beta^2 - \beta + 5 = 0$ et conclure.

Exercice 13 Soit A un anneau. Trouver les anneaux quotients

$$A[x]/(x), \quad A[x,y]/(x), \quad A[x,y]/(x,y), \quad A[x_1, x_2, \ldots, x_n]/(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Sous quelle condition sur l'anneau A les idéaux (x), (x, y) et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont-ils premiers (maximaux) ?

Exercice 14 1. Trouver les idéaux de $\mathbb{Q}[x]/(f)$ où (f) est l'idéal principal engendré par un polynôme f.
2. Trouver les idéaux maximaux de $\mathbb{Q}[x]/(f)$.
3. Trouver les idéaux maximaux de $\mathbb{Q}[x]/((X^3 - 1)^2)$.

Exercice 15 1. Déterminer la caractéristique des anneaux :
$\mathbb{Z}[i], \ \mathbb{Z}[i]/(2), \ \mathbb{Z}[i]/(1 + i)$.
2. Soit A un anneau intègre de caractéristique $p > 1$ et $f : A \to A$ définie par $f(a) = a^p$. Montrer que f est un morphisme d'anneaux injectif, f est appelé le mophisme de Frobenius.

Exercice 16 Soient A, B des anneaux et $A \times B$ l'anneau produit.
1. Montrer que les idéaux de $A \times B$ sont de la forme $I \times J$ où I et J sont des idéaux de A et B respectivement.
2. Montrer que les idéaux premiers de $A \times B$ sont de la forme $\mathcal{P} \times B$ ou $A \times \mathcal{Q}$, où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des idéaux premiers de A et B respectivement.
3. Quels sont les idéaux maximaux de $A \times B$?
4. Déterminer les idéaux premiers et les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Exercice 17 Soient $m_1, ..., m_n$ des entiers de $\mathbb{Z}$ premiers entre eux deux à deux. Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}/m_1...m_n\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}) \times ... \times (\mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z})$ sont isomorphes.
En déduire que les groupes $(\mathbb{Z}/m_1...m_n\mathbb{Z})^\times$ et $(\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z})^\times \times ... \times (\mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z})^\times$ sont isomorphes.
Soit ϕ la fonction d'Euler : $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ définie par : Pour $n \geqslant 1$, $\phi(n)$ est le nombre d'entiers $a \in [1, n]$ tels que $\text{pgcd}(a, n) = 1$. Montrer que si m et n sont des entiers $\geqslant 1$ premiers entre eux, alors $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.

Exercice 18 Soient A un anneau et $\mathcal{N}il(A)$ l'ensemble des éléments nilpotents de A.
1. Montrer que $\mathcal{N}il(A)$ est contenu dans tout idéal premier de A.
2. Soit x un élément non nilpotent de A et posons $S = \{x^n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $S \subset A \backslash \{0\}$.
Soit f le morphisme naturel de A vers $A[S^{-1}]$. Soit P un idéal premier de $A[S^{-1}]$. Montrer que $f^{-1}(P)$ est un idéal premier de A qui ne contient pas x.
3. Déduire de 1. et 2. que $\mathcal{N}il(A)$ est l'intersection des idéaux premiers de A.

Fiche n° 6: Anneaux, idéaux, morphismes

Indication 1 Considérer l'inverse pour la multiplication d'un élément du noyau du morphisme.

Indication 2 Soit $x \in A$ non nul. Considérer la chaîne d'idéaux : $(x) \supset (x^2) \supset \ldots$

Indication 3 Pour un élément $x \in A/I$, considérer l'application $f : y \mapsto y \cdot x$.

Indication 4 Si I est premier, $J \cdot K \subset I$, considérer le produit d'un élément de $J \setminus I$ avec celui d'un élément de $K \setminus I$.

Indication 6 2. Considérer l'injection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$.

Indication 8 2. Considérer le morphisme $a + I \mapsto a + (I + J)$ de l'anneau A/I vers l'anneau $A/(I + J)$.

Indication 9 2. Considérer le composé de l'inclusion $B \to B + I$ avec la projection canonique $B + I \to (B + I)/I$.

Indication 10 1. Dériver (formellement) le polynôme.
2. Développer $(X - a)^p$.

Indication 14 La projection canonique est surjective, utiliser l'exercice 6.2.

Indication 16 3. Remarquer que $A \times J$ est un idéal propre de $A \times B$.

Fiche n° 6: Anneaux, idéaux, morphismes

Correction 1 Par l'absurde : soit $x \neq 0$ un élément de $\ker f$. L'élément x étant non nul dans un corps, il est inversible et on a

$$1 = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) = 0f(x^{-1}) = 0.$$

Ce qui est absurde puisque l'anneau d'arrivée est non nul.

Correction 2 Soit $x \in A$ non nul. Par hypothèse, il existe un entier m et un élément a de A tel que

$$x^{m-1} = ax^m,$$

c'est-à-dire

$$x^{m-1}(1 - ax) = 0.$$

L'anneau A étant intègre et x non nul, on montre par récurrence que x^{m-1} est non nul et on en déduit que $ax = 1$.

Correction 3 Soit un élément non nul $x \in A/I$, l'anneau A/I étant intègre, l'application $f : y \mapsto y \cdot x$ est injective : en effet, si $yx = zx$ alors $x(z - y) = 0$, d'où $z - y = 0$. L'anneau A/I étant fini, cette application est bijective donc il existe x' tel que $xx' = 1$. L'anneau A/I est donc un corps et I est maximal.

Correction 4 Supposons I est premier, $J \cdot K \subset I$ avec J non inclus dans I. Soit $x \in J \setminus I$. On a $xK \in I$ donc, par primalité de I, tout élément de K appartient à I.
Pour la réciproque, il suffit de considérer les idéaux principaux pour obtenir que

$$xy \in I \implies x \in I \text{ ou } y \in I.$$

Correction 6 4. L'idéal I étant maximal et f étant surjective, on en déduit que

$$f(I) \text{ non maximal } \implies f^{-1}(f(I)) \neq I.$$

Cela implique que $f^{-1}(f(I)) = A$ et par surjectivité de f, que $f(I) = B$.
5. $r_2((x^2 + 1)) = r_2((x + 1)^2)$ et $r_6((x)) = r_6((3x + 2)(2x + 3))$ puisque 13 est premier (avec 6).

Correction 7 1. On note f le morphisme quotient de A vers A/I. Soit J un idéal de A/I. L'idéal $K = f^{-1}(I)$ est principal, on a donc $K = (x)$ pour un élément x de A bien choisi. On a alors $J = (f(x))$.
2. La question 1. fournit la réponse à la première partie. On remarquera ensuite que $(m) \subset (k)$ si et seulement si $k|m$.

Correction 10 1. Une racine est multiple si et seulement elle est aussi racine du polynôme dérivé.
2. Les entiers de la forme C_p^k sont divisibles par p pour $k \notin \{1, p\}$. On a donc $X^p - a^p = (X - a)^p$.

Correction 16 2. Si I et J ne sont pas premiers, il existe a, a' dans $A \setminus I$ et b, b' dans $B \setminus J$ tels que $aa' \in I$ et $bb' \in J$. On en déduit que $I \times J$ n'est pas premier en considérant le produit $(a, b)(a', b')$. La contraposée de la réciproque est immédiate sur le même principe.

Correction 18 1. Soient I un idéal premier, x un élément nilpotent non nul et n un entier tel que $x^n \neq 0$ et $x^{n+1} = 0$. Alors $x \in I$ ou $x^n \in I$. On montre ainsi par récurrence sur l'exposant n que

$$x^n \in I \implies x \in I.$$

2. Le seul point non immédiat est $x \notin f^{-1}(P)$. Comme $f(x)$ est inversible, on a $f(x) \notin P$ donc $x \notin f^{-1}(P)$.