UFR de Mathématiques
Université Lille 1

Master 2 Mention Mathématiques
Analyse Fonctionnelle 2016-20167

Analyse Fonctionnelle : Feuille No. 1

Exercice 1 (1) Montrer qu'un espace normé est complet si et seulement si toute série absolument (ou normalement) convergente est convergente.
(2) Soit $E = C([-1,1])$, l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$, muni de la norme $\|.\|_1$ (i.e $\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|dt,\ f \in E$). Soit

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [-1,0] \\ nt & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

(i) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans E. Est-elle convergente dans E?
(ii) On considère la série de terme général $g_n = f_{n+1} - f_n$.
Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n\|_1 < \infty$, mais que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ ne converge pas dans E.

Exercice 2 Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé.
(1) Montrer que si $x \in E$, alors

$$\|x\| = \inf\{t > 0;\ x \in tB(0,1)\}.$$

(2) Notons $B = B(0,1)$ la boule unité ouverte. Montrer que B possède les propiétés suivantes:
(i) Si $x, y \in B$ et $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ alors $\lambda x + \mu y \in B$;
(ii) si $x \in B$ alors $\exists \epsilon > 0$ tel que $x + \epsilon B \subset B$;
(iii) pour $x \in E,\ \ x \neq 0 \quad \exists \lambda,\ \mu \neq 0$ tel que $\lambda x \in B$ et $\mu x \notin B$.

Exercice 3 Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé.
(1) Montrer que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in E$.
(2) Montrer que pour tout $x, y \in E,\ \ x, y \neq 0$,

$$\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\| \leq 2\frac{\|x-y\|}{\|x\|}.$$

(3) Montrer que E est complet si et seulement si $\overline{B(0,1)}$ la boule unité fermée un espace métrique complet pour la métrique $d(x,y) = \|x - y\|$.

Exercice 4 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe $\alpha_n > 0$ tel que pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout polynôme P de degré plus petit ou égal à n, on a

$$|P(t)| \leq \alpha_n \int_0^1 |P(x)|dx.$$

Exercice 5 Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace de E. Notons par E/M l'espace quotient et pour $\overline{x} \in E/M$, on définit $N(\overline{x}) = d(x, M) := \inf\{\|x - y\|;\ y \in M\}$.
(1) (a) Montrer que $N(\overline{x}) = \inf\{\|z\|;\ z \in \overline{x}\}$.
(b) Montrer que $N(.)$ est une semi-norme sur E/M et calculer son noyau.
(c) Montrer que $N(.)$ est une norme sur E/M si et seulement si M est fermé.
(2) On suppose que M est fermé. Montrer que si E est complet alors E/M est complet.
(3) Montrer que si M et E/M sont complets alors E est complet.

Exercice 6 Soit $\alpha = (\alpha_n)_n$ une suite de nombres strictement positifs et $1 \leq p < \infty$. On note

$$\ell^p_\alpha = \Big\{x = (x_n)_n;\ x_n \in \mathbb{C} \ \text{ et telle que } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |x_n|^p < \infty\Big\},$$

$$\ell^\infty_\alpha = \Big\{x = (x_n)_n;\ x_n \in \mathbb{C} \ \text{ et telle que } \sup_{n\geq 1}(\alpha_n |x_n|) < \infty\Big\}.$$

ℓ^p_α et ℓ^∞_α sont munis des normes respectives, $\|x\|_{p,\alpha} = (\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ et $\|x\|_{\infty,\alpha} = \sup_{n\geq 1}(\alpha_n |x_n|)$.
(1) Montrer que ℓ^p_α et ℓ^∞_α sont des espaces de Banach.
(2) On choisit $\alpha_n = 1, \forall n \geq 1$. Montrer que si $1 \leq p < q \leq \infty$ alors $\ell^p_1 \subset \ell^q_1$, avec inclusion stricte et $\|x\|_{q,1} \leq \|x\|_{p,1},\ \ \forall x \in \ell^p_1$.
(3) Soit $c_{0,\alpha} = \{x = (x_n)_n;\ x_n \in \mathbb{C} \ \text{ et telle que } \lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = 0\}$. Montrer que $c_{0,\alpha}$ muni de la norme $\|x\|_{\infty,\alpha}$ est un espace de Banach.

Exercice 7 (Fonctions Höldériennes)
Pour $\alpha > 0$, notons par E_α l'ensemble des fonctions Höldériennes.

$$E_\alpha = \Big\{f : [0,1] \to \mathbb{C};\ \text{telles que il existe} \quad C \geq 0;\ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in [0,1]\Big\}.$$

la constante C dépend de f.
(1) Pour $f \in E_\alpha$ notons par $C_\alpha(f)$ la borne inférieur de l'ensemble des nombres C.
(a) Montrer que

$$\forall x, y \in [0,1] \quad |f(x) - f(y)| \leq C_\alpha(f)|x - y|^\alpha.$$

(b) Montrer que l'application $f \mapsto C_\alpha(f)$ est une semi-norme sur E_α. Calculer son noyau.
(c) Montrer que E_α est un sous-espace vectoriel de $C[0,1]$.
(2) Décrire E_α pour $\alpha > 1$.
Dans la suite on suppose que $\alpha \in]0,1]$.
(3) Soit $0 < \beta < \alpha \leq 1$. Montrer que $C^1([0,1]) \subset E_\alpha \subset E_\beta \subset C([0,1])$.
Montrer que ce sont des inclusions strictes.
(4) Pour $f \in E_\alpha$, posons $N_\alpha(f) = |f(0)| + C_\alpha(f)$.
Montrer que $N_\alpha(.)$ est une norme sur E_α, vérifiant $\|f\|_\infty \leq N_\alpha(f)$ pour tout $f \in E_\alpha$.
Montrer que E_α est complet pour cette norme.
(5) Montrer que la boule unité de E_α est relativement compacte dans $C[0,1]$.
(On pourra utiliser le Théorème d'Ascoli).

Exercice 8 Soit $f \in C([0,+\infty[)$. Posons

$$f_n(x) = f(x^n), \quad n \geq 1, \quad x \in [0,+\infty[.$$

Montrer que l'ensemble $H = \{f_1, f_2 ...\}$ est équicontinu en $x = 1$ si et seulement si f est constante.

Exercice 9 Soit f une fonction continue sur un intervale I non borné de $\mathbb{R}$.
Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes sur I si et seulement si f est un polynôme.

Exercice 10 (1) Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone.
Montrer que l'ensemble $\mathcal{A} = \{P(\varphi);\ P \text{ polynôme}\}$ est dense dans $C([0,1])$.
(on pourra utiliser le Théorème de Stone-Weierstrass).
(2) En déduire que l'ensemble $\mathcal{B} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R};\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sin^k(x),\ a_k \in \mathbb{R}\}$ est dense dans $C([0,1])$.
(3) Soit $\mathcal{C}$ la sous-algèbre engendrée par $\{f_0, f_2\}$ où $f_0(x) = 1$ et $f_2(x) = x^2$.
(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est dense dans $C([0,1])$.
(b) Montrer que $\mathcal{C}$ n'est pas dense dans $C([-1,1])$.

Exercice 11 Soit $f, g \in C([0,1])$.
(1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 x^n f(x)dx = \int_0^1 x^n g(x)dx \iff f = g.$$

(2) Soit $f : [0,+\infty[$ une fonction continue bornée.
(a) Montrer qu'il existe une fonction $g \in C([0,1])$ telle que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\exp(-nx)dx = \int_0^1 t^{n-2} g(t)dt, \quad \forall n \geq 2.$$

(b) En déduire que si $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} f(x)\exp(-nx)dx = 0$ alors $f = 0$.