UFR de Mathématiques — Master 2 Mention Mathématiques
Université Lille 1 — Analyse 2016 - 2017

Analyse : Devoir Surveillé.
Novembre 2016, durée 3 heures
M.Mbekhta

Exercice 1 Soit $\alpha \in]0,1]$ et $f \in C([0,1])$. Montrer que

$$\forall n \geq 0, \quad \int_0^1 t^{n\alpha} f(t)dt = \frac{1}{n\alpha + 2} \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) = t, \ \forall t \in [0,1].$$

Exercice 2 Soit E un espace normé et $(x_n)_n$ une suite dans E.
Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons l'application linéaire

$$T_n : E^* \to \mathbb{C} \quad \text{par} \quad T_n(f) = f(x_n), \quad f \in E^*.$$

(a) Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, T_n est continue.
(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|T_n\| = \|x_n\|$.
(On pourra utiliser le Théorème de Hahn-Banach).
(c) En déduire que la suite $(x_n)_n$ est bornée dans E si et seulement si pour tout $f \in E^*$, la suite $(f(x_n))_n$ est bornée dans $\mathbb{C}$.
(On pourra utiliser le Théorème de Banach-Steinhaus).

Exercice 3 Soit F un sous-espace vectoriel tel que $F \subseteq C([0,1]) \subseteq L^2([0,1])$.
Le but de l'exercice est de montrer que si F est fermé dans $L^2([0,1])$ alors F est de dimension finie.
Supposons que F est fermé dans $L^2([0,1])$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.
(1) Montrer que F est fermé dans $C([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall f \in F$, $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \leq \alpha \cdot \|f\|_2$.
(2) Soit n un entier et soit $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une suite orthonormale de F.
a) Montrer que $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $\|\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n\|_2^2 = |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2$.
En utilisant (1), montrer que $\forall t \in [0,1]$,

$$|\lambda_1 f_1(t) + \cdots + \lambda_n f_n(t)| \leq \alpha \left(|\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2\right)^{1/2}.$$

b) En choisissant convenablement $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, en déduire que $\forall t \in [0,1]$,

$$|f_1(t)|^2 + \cdots + |f_n(t)|^2 \leq \alpha \left(|f_1(t)|^2 + \cdots + |f_n(t)|^2\right)^{1/2}.$$

c) En déduire que $n \leq \alpha^2$ et conclure que la dimension de F est finie.

Problème.

Soit $H = L^2[0,1]$ et T l'application linéaire définie par

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy, \quad x \in [0,1], \quad f \in H.$$

avec

$$k(x,y) = \begin{cases} \exp(-y)sh(x) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ \exp(-x)sh(y) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Où $sh(x) = \frac{1}{2}[\exp(x) - \exp(-x)]$.

(1) Montrer que si f est une fonction propre associée à la valeur propre $\lambda \neq 0$, alors f est de classe C^2 et vérifie l'équation

$$\begin{cases} \lambda f'' + (1-\lambda)f = 0 \\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = -f'(1). \end{cases}$$

(2) a) Calculer les valeurs propres et les fonctions propres de T.

b) En déduire le spectre de T.

c) Calculer la norme de T.

(3) Soit $w_n,\ n > 0$, les solutions de l'équation $\tan(\theta) = -\theta,\ \ \theta > 0$.

(a) Montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+w_n^2} = \frac{1}{4}[1 + \exp(-2)].$$

(b) Calculer

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(1+w_n^2)^2}.$$

Correction Exercice 1.

Si $\forall t \in [0,1]\ \ f(t) = t$, alors $\int_0^1 t^{n\alpha} f(t)dt = \int_0^1 t^{n\alpha+1}dt = \frac{1}{n\alpha+2}$, $\forall n \geq 0$.

Supposons que $\forall n \geq 0, \quad \int_0^1 t^{n\alpha} f(t)dt = \frac{1}{n\alpha+2}$, alors

$\forall n \geq 0, \quad \int_0^1 t^{n\alpha} f(t)dt = \int_0^1 t^{n\alpha+1}dt$.Donc

$$\forall n \geq 0, \quad \int_0^1 t^{n\alpha}(f(t) - t)dt = 0.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\int_0^1 P(t^\alpha)(f(t) - t)dt = 0, \quad \forall P \in \mathbb{C}[X].$$

Par le Théorème de Stone-Weierstrass, la sous-algèbre A engendrée par $\{P(t^\alpha);\ \ P \in \mathbb{C}[X]\}$ est dense dans $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$. Par suite $\int_0^1 g(t)(f(t)-t)dt = 0, \quad \forall g \in A$. et donc $f(t) = t, \ \ \forall t \in [0,1]$.

Correction Exercice 2. $T_n : E^* \to \mathbb{C} \quad$ par $\quad T_n(f) = f(x_n), \ \ f \in E^*$.

(a) Puisque $f \in E^*$, continue, $|T_n(f)| = |f(x_n)| \leq \|x_n\|\|f\|$. Donc $|T_n(f)| \leq \|x_n\|\|f\|, \ \ \forall f \in E^*$. D'où T_n est continue et $\|T_n\| \leq \|x_n\|$.

(b) Par le Théorème de Hahn-Banach, pour tout $n \in \mathbb{N}, \ \ \exists f_0 \in E^*$ tel que $\|f_0\| = 1$ et $f_0(x_n) = \|x_n\|$. Donc $\|x_n\| = f_0(x_n) = T_n(f_0) \leq \|T_n\|$. Par conséquent $\|T_n\| \geq \|x_n\|$ et donc $\|T_n\| = \|x_n\|$.

(c) Si la suite $(x_n)_n$ est bornée dans E alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, \ \ \|x_n\| \leq M$. Soit $f \in E^*$. Par la continuité de f, on a $|f(x_n)| \leq \|x_n\|\|f\| \leq M\|f\|$. Ce qui implique la suite $(f(x_n))_n$ est bornée dans $\mathbb{C}$.

Supposons que pour tout $f \in E^*$, la suite $(f(x_n))_n$ est bornée dans $\mathbb{C}$. Alors $\forall f \in E^*, \ \exists M_f > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, \ \ \|f(x_n)\| \leq M_f$. D'où, $\forall f \in E^*, \ \exists M_f > 0$ tel que $\|T_n(f)\| \leq M_f, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Par Théorème de Banach-Steinhaus, E^* étant complet, $\exists M > 0, \ \ \|T_n\| \leq M, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Puisque par (b), $\|T_n\| = \|x_n\|$, il résulte que la suite $(x_n)_n$ est bornée dans E.

Correction Exercice 3.

Soit F un sous-espace vectoriel tel que $F \subseteq C([0,1]) \subseteq L^2([0,1])$. Supposons que F est fermé dans $L^2([0,1])$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.

(1) Montrons que F est fermé dans $C([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $(f_n)_n \subset F$ une suite convergente vers f la norme $\|\cdot\|_\infty$. Puisque $\|f_n - f\|_2 \leq \|f_n - f\|_\infty$, la suite $(f_n)_n$ converge vers f la norme $\|\cdot\|_2$ et comme par hypothèse F est fermé, pour la norme $\|\cdot\|_2$, $f \in F$. Donc F est fermé, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Par conséquent, F muni des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ est complet en plus $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ pour tout $f \in F$. Par le Théorème des Isomorphismes de Banach, les deux normes sont équivalentes. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall f \in F, \quad \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \leq \alpha \cdot \|f\|_2.$$

(2) Soit n un entier et soit $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une suite orthonormale de F.

a) Soit $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, par le Théorème de Pythagore, on obtient

$$\|\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n\|_2^2 = |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2.$$

D'où en utilisant (1), on obtient $\forall t \in [0,1]$,

$$|\lambda_1 f_1(t) + \cdots + \lambda_n f_n(t)| \leq \|\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n\|_\infty \leq \alpha \left(|\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2\right)^{1/2}.$$

b) Pour $\lambda_1 = \overline{f_1(t)}, \ldots, \lambda_n = \overline{f_n(t)}$, on en déduire que $\forall t \in [0,1]$,

$$|f_1(t)|^2 + \cdots + |f_n(t)|^2 \leq \alpha \left(|f_1(t)|^2 + \cdots + |f_n(t)|^2\right)^{1/2}.$$

c) D'après b), on a

$$\left(|f_1(t)|^2 + \cdots + |f_n(t)|^2\right)^2 \leq \alpha^2 \left(|f_1(t)|^2 + \cdots + |f_n(t)|^2\right),$$

d'où,

$$|f_1(t)|^2 + \cdots + |f_n(t)|^2 \leq \alpha^2.$$

En intégrant cette dernière inégalité, on en déduire que $n \leq \alpha^2$.

Par conséquent, la dimension de F est finie.

Correction du Problème. (1) On a $\forall f \in H$, $\forall x \in [0,1]$,

$$Tf(x) = \exp(-x) \int_0^x sh(y) f(y) dy \ + \ sh(x) \int_x^1 \exp(-y) f(y) dy.$$

Les fonctions $x \mapsto \int_0^x sh(y)f(y)dy$ et $x \mapsto \int_x^1 \exp(-y)f(y)dy$ sont continues, donc Tf est une fonction continue. Si $Tf = \lambda f$, $\lambda \neq 0$, alors $f = \frac{1}{\lambda} Tf$ est continue. De plus si $f \in C^k$, comme $x \mapsto \exp(-x)$ et $sh(x)$ sont C^∞, les fonctions $x \mapsto \int_0^x sh(y)f(y)dy$ et $x \mapsto \int_x^1 \exp(-y)f(y)dy$ sont C^{k+1}. On obtient alors $f = \frac{1}{\lambda} Tf \in C^{k+1}$. Donc, une fonction propre de T est C^∞, en particulier C^2. On a pour tout $x \in [0,1]$,
$\lambda f(x) = Tf(x) = \exp(-x) \int_0^x sh(y)f(y)dy \ + \ sh(x) \int_x^1 \exp(-y)f(y)dy$.
D'où $f(0) = 0$ (car $\lambda \neq 0$ et $sh(0) = 0$). Et, on a aussi,
$(\lambda f)'(x) = (Tf)'(x) = -\exp(-x) \int_0^x sh(y)f(y)dy + ch(x) \int_x^1 \exp(-y)f(y)dy$.
Il facile de vérifier que $f(1) = -f'(1)$.
D'autre part,
$(\lambda f)''(x) = (Tf)''(x) = (Tf)(x) - f(x) = \lambda f(x) - f(x) = (\lambda - 1)f(x)$. D'où, f vérifie l'équation

$$\begin{cases} \lambda f'' + (1-\lambda) f = 0 \\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = -f'(1). \end{cases}$$

(2) Puisque $\overline{K(y,x)} = K(x,y)$, l'opérateur intégral T est auto-adjoint, donc le spectre de T est réel, ainsi $\lambda \in \mathbb{R}$. D'autre part, les valeurs propres

$(\lambda \neq 0)$ et les fonctions propres de T sont les solutions, non nulles en f du système suivant : $f'' - \frac{\lambda-1}{\lambda} f = 0$ et $f(0) = 0$; $\quad f(1) = -f'(1)$.

Si $\lambda = 1$ alors $f'' = 0$. Donc $f(x) = ax + b$. D'où, $f(0) = 0$ implique que $b = 0$ et $f(1) + f'(1) = 0$ implique que $a = 0$ et par suite $f = 0$. Donc $\lambda = 1$ n'est une valeur de T.propre.

L'equation caractéristique $r^2 = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Puisque $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ r^2 \in \mathbb{R}$. D'où, $r \in \mathbb{R}$ ou $r = i\theta$, $\ \theta \in \mathbb{R}$.

Si w et $-w$ sont les solutions de $r^2 = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, alors la fonction propre est donnée par
$f(x) = A\exp(wx) + B\exp(-wx)$ et $f'(x) = Aw\exp(wx) - Bw\exp(-wx)$

Les conditions $f(0) = 0$ et $f(1) = -f'(1)$ impliquent que
$A = -B$ et $A\exp(w)(1 + w) + B\exp(-w)(1 - w) = 0$.

$f \neq 0$ implique $A \neq 0$ et $\lambda \neq 1$ implique $w \neq 0$. Donc

$$\exp(w)(1 + w) = \exp(-w)(1 - w) \iff \frac{\exp(-w) + \exp(w)}{\exp(w) - \exp(-w)} = -\frac{1}{w}.$$

Si $w \in \mathbb{R}$, $\ w < 0$ alors $\exp(w) - \exp(-w) < 0$ et $-\frac{1}{w} > 0$, contradiction.

Si $w \in \mathbb{R}$, $\ w > 0$ alors $\exp(w) - \exp(-w) > 0$ et $-\frac{1}{w} < 0$, contradiction.

Donc $w = i\theta$, $\ \theta \in \mathbb{R}$ et

$$\frac{\exp(-i\theta) + \exp(i\theta)}{\exp(i\theta) - \exp(-i\theta)} = -\frac{1}{i\theta} \quad \iff \quad \tan(\theta) = -\theta.$$

Avec $-\theta^2 = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Soit w_n les solutions de l'equation $\tan(\theta) = -\theta$, $\ \theta > 0$. Alors $\forall n \geq 1$, $\ w_n \in]\frac{n\pi}{2}, \frac{(n+2)\pi}{2}[$ et $(iw_n)^2 = \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n} \quad \iff \quad \lambda_n = \frac{1}{1+w_n^2}$.

On obtient

$$\sigma(T) = \{0, \ \frac{1}{1 + w_n^2}, \ n \geq 1\}.$$

Les fonctions propres sont de la forme $f_n(x) = A\sin(w_n x)$ associée à la valeur propre $\lambda_n = \frac{1}{1+w_n^2}$.

La norme de T est donnée par le rayon spectral de T (puisque T est auto-adjoint), donc $\|T\| = \sup\{|\lambda|; \ \lambda \in \sigma(T)\} = \frac{1}{1+w_1^2}$

(3) Puisque $T = T^*$, $\ \sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$ et la fonction $k(.,.)$ est continue, on peut appliquer la formule de trace

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1 + w_n^2} = \int_0^1 k(x, x)dx = \frac{1}{4}[1 + \exp(-2)].$$

Et,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(1 + w_n^2)^2} = \|k(.,.)\|_2^2 = \int_0^1 \int_0^1 |k(x, y)|^2 dxdy = \cdots$$