Cours d'Analyse Fonctionnelle

Mostafa MBEKHTA

2016-2017

Chapitre 1

Espaces Métriques

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1.1 *Soit E un ensemble. Une* **distance** *(ou métrique) sur E est une application*

$$d : E \times E \to \mathbb{R},$$

possédant les propriétés suivantes :
(I) $d(x, y) \geq 0$ pour tout $x, y \in E$;
(II) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
(III) $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x, y \in E$;
(IV) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tout $x, y, z \in E$ (inégalité triangulaire).

Dans ce cas, (E, d) est appelé **espace métrique**.

Remarque 1.1.2 *(1) Les conditions $(II), (III), (IV)$ impliquent (I).*
En effet, il suffit de prendre $z = x$ dans (IV), puis utiliser (II) et (III).
(2) Soit $(x_n)_n$ une suite dans E. Alors, en utilisant (IV), on obtient pour $n \geq 3$,

$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

(3) Si (E, d) est un espace métrique alors pour tout $x, y, z \in E$, on a

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

Exemple 1.1.3 *(1) Les espaces normés, seront étudiés dans le prochain paragraphe. Si $(E, \|.\|)$ est un espace normé alors (E, d) est un espace métrique avec $d(x, y) = \|x - y\|$.*
(2) $(\mathbb{R}, d)$ avec $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique.

(3) $([0,1],d)$ *avec* $d(x,y)=|x-y|$ *est un espace métrique.*
(4) $E=]0,+\infty[$ *et* $d(x,y)=|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|,\ x,y\in E$. *Alors* (E,d) *est un espace métrique.*
(5) E *un ensemble non vide, posons* $d(x,y)=1$ *si* $x\neq y$ *et* $d(x,y)=0$ *si* $x=y$. *Alors* (E,d) *est un espace métrique dit,* **espace métrique discret**.
(6) Soit $E=L^p([0,1]),\ \ 0<p<1$ *et* $d(f,g)=\int_0^1|f-g|^p,\ f,g\in E$. *Alors* (E,d) *est un espace métrique.*
Notons que la quantité $\Delta(f)=(\int_0^1|f|^p)^{\frac{1}{p}},\ f\in L^p([0,1]),\ 0<p<1$, *n'est pas une norme.*

Exercice 1.1 *Soit* (Ω,τ,μ) *un espace mesuré et* $0<p<1$.
(1) Montrer par un exemple que $\|f\|_p=(\int_\Omega|f(x)|^pd\mu)^{\frac{1}{p}}$ *n'est pas une norme sur* $L^p(\Omega,\mu)$.
(On pourra considérer $\Omega=[0,1],\ \mu=\lambda$ *la mesure de Lebesgue et* $f=\chi_{[0,\frac{1}{2}[}$ *et* $g=\chi_{[\frac{1}{2},1[}$*).*
(2) Montrer que pour tout $a,b\in\mathbb{R}^+,\ (a+b)^p\leq a^p+b^p$.
(On pourra étudier les variations de la fonction $h_p(t)=(1+t)^p-1-t^p,\ \ t\in\mathbb{R}^+$ *et* $0<p<1$*).*
En déduire que $L^p(\Omega,\mu)$ *est un espace vectoriel.*
(3) Pour $f,g\in L^p(\Omega,\mu)$, *on pose* $d(f,g)=\int_\Omega|f(x)-g(x)|^pd\mu$.
Montrer que $d(.,.)$ *est une distance sur* $L^p(\Omega,\mu)$.
(4) Montrer que $L^p(\Omega,\mu)$ *muni de* $d(.,.)$ *est complet.*

Notations : Soit (E,d) un espace métrique et $x_0\in E$ et $r>0$, on notera dans la suite :
$B(x_0,r)=\{x\in E;\ d(x,x_0)<r\}$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.
$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in E;\ d(x,x_0)\leq r\}$ la boule fermée de centre x_0 et de rayon r.

• Un sous-ensemble $\Omega\subseteq E$ est dit **ouvert** dans E si pour tout $x\in\Omega$, il existe $r>0$ tel que $B(x,r)\subseteq\Omega$.

• Un sous-ensemble $A\subseteq E$ est dit **fermé** si son complémentaire, $A^c=E\setminus A$, est un ouvert de E.

Remarque 1.1.4 *(1) Par exemple toute boule ouvert* $B(x_0,r)$ *est un ouvert de* E. *En effet si* $x\in B(x_0,r)$, *alors* $d(x_0,x)=s<r$. *Donc,* $r-s>0$ *et* $B(x,r-s)\subseteq B(x_0,r)$.
(2) L'union de toute famille d'ensembles ouverts est un ouvert et donc l'intersection de toute famille d'ensembles fermés est un fermé de E.
Aussi, l'intersection (resp. l'union) finie d'ensembles ouverts (resp. fermés) est un ouvert (resp. fermé) de E.
(3) L'espace entier E *et l'ensemble vide* $\emptyset$, *sont ouverts et fermés.*

• Soit (E, d) un espace métrique et $x_0 \in E$. Un sous-ensemble V de E est dit **voisinage** de x_0 si $\exists r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subseteq V$.

Remarque 1.1.5 *(1) Tout voisinage de x_0 contient x_0.*

(2) Tout sous-ensemble contenant un voisinage de x_0 est un voisinage de x_0.

(3) L'intersection de voisinages de x_0 est un voisinage de x_0.

La famille des voisinages d'un point est en général "inutilement" vaste. D'où la notion de "systèmes fondamentaux" de voisinages.

Définition 1.1.6 *On appelle* **système fondamental de voisinage** *de x_0 toute famille V_{x_0} de voisinage de x_0 vérifiant $\forall W$ voisinage de x_0, $\exists V \in V_{x_0}$ tel que $V \subseteq W$.*

Exemple 1.1.7 $\{B(x_0, r);\ r > 0\}$; $\{\overline{B}(x_0, r);\ r > 0\}$; $\{B(x_0, \frac{1}{n});\ n \in \mathbb{N}^*\}$, *sont des systèmes fondamentaux de voisinages de x_0.*

Noter que le dernier exemple montre que dans un espace métrique tout point admet un système fondamental dénombrable de voisinages. D'où l'importance du rôle des suites dans la topologie des espaces métriques.

• Si $A \subseteq E$, l'union de tout les ouverts $\Omega \subset A$, (c'est le plus grand ouvert contenu dans A), est appelé **l'intérieur** de A et sera noté $\mathring{A}$.

$$\mathring{A} = \{x \in A;\ \exists r > 0, B(x, r) \subseteq A\}.$$

• L'intersection de tout les fermés $F \supset A$, (c'est le plus petit fermé contenant A), est appelé **l'adhérence** (ou la **fermeture**) de A et sera noté $\overline{A}$.

$$\overline{A} = \{x \in E;\ \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

• L'ensemble $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ est appelé la **frontière** de A.

• A est dit **dense** dans E si $\overline{A} = E$.

• $x_0 \in A$ est dit **point isolé** dans A si $\exists r > 0,\ B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$. Dans ce cas on notera, $x_0 \in iso(A)$.

• $x_0 \in E$ est dit **point d'accumulation** de A si

$$\forall r > 0,\ [B(x_0, r) \setminus \{x_0\}] \cap A \neq \emptyset.$$

Dans ce cas on notera, $x_0 \in acc(A)$.

Définition 1.1.8 *A est dit* **nulle part dense (ou ensemble rare)** *dans E si $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$ (i.e l'intérieur de l'adhérence de A est vide).*

Remarque 1.1.9 *Si A est nulle part dense alors,*

$$E = (\emptyset)^c = (\mathring{\overline{A}})^c = \overline{(\overline{A})^c} = \overline{\overset{\circ}{\widehat{A^c}}}.$$

Autrement dit, on a l'équivalence :
A est nulle part dense si et seulement si son complémentaire A^c a un intérieur dense.

Remarque 1.1.10 *(1) A est un ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.*
(2) A est un fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.
(3) $\overline{A} = acc(A) \cup iso(A)$.

Exemple 1 : Soit $A =]0,1] \cup \{2\} \subset E = \mathbb{R}$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$. Alors $\mathring{A} =]0,1[$; $\overline{A} = [0,1] \cup \{2\}$; $acc(A) = [0,1]$; $iso(A) = \{2\}$; $\partial A = \{0,1,2\}$.

Exemple 2 : $A = \mathbb{Q} \subset E = \mathbb{R}$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$. Alors $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ et $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Exercice 1.2 *Soit (E,d) un espace métrique et A un ensemble de E. Montrer que*

$$\mathring{A} = (\overline{A^c})^c$$

Solution On a :

$$\mathring{A} \subseteq A \Rightarrow A^c \subseteq (\mathring{A})^c \Rightarrow \overline{A^c} \subseteq \overline{(\mathring{A})^c} = (\mathring{A})^c \Rightarrow \mathring{A} \subseteq (\overline{A^c})^c.$$

Aussi $A^c \subseteq \overline{A^c} \Rightarrow (\overline{A^c})^c \subseteq A$. Mais $(\overline{A^c})^c$ est un ouvert. Donc $(\overline{A^c})^c \subseteq \mathring{A}$. Ainsi $\mathring{A} = (\overline{A^c})^c$.

Exercice 1.3 *Soit (E,d) un espace métrique et A, $B \subseteq E$ deux ensembles. Montrer que :*
(i) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
(ii) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.
(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(iv) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
(v) Si B est ouvert, alors $\overline{A} \cap B \subseteq \overline{A \cap B}$.

Exercice 1.4 *Soit (E, d) un espace métrique et A un ensemble de E.*
(1) Supposons que A est ouvert ou fermé. Montrer que la frontière, ∂A, de A est nulle part dense dans E.
(2) Sans l'hypothèse "A ouvert ou fermé", est-ce que la conclusion de (1) reste vraie ?

Solution (1) Puisque, $\partial A = \partial A^c = \overline{A} \cap \overline{A^c}$, on peut supposer que A est fermé. D'où,

$$\overset{\circ}{\widehat{\partial A}} = \overset{\circ}{\widehat{\overline{A} \cap \overline{A^c}}} = \overset{\circ}{\widehat{A \cap \overline{A^c}}} = \mathring{A} \cap \overset{\circ}{\overline{A^c}} \subseteq \mathring{A} \cap \overline{A^c} = \mathring{A} \cap (\mathring{A})^c = \emptyset.$$

$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ est fermé comme intersection de deux fermés, d'où

$$\overset{\circ}{\widehat{\overline{\partial A}}} = \overset{\circ}{\widehat{\partial A}} = \emptyset.$$

Ceci montrer que ∂A est nulle part dense dans E.
(2)Sans l'hypothèse "A ouvert ou fermé" la conclusion n'est pas vraie en général. Par exemple $E = \mathbb{R}$, $|.|$ et $A = \mathbb{Q}$. Alors $\partial A = \mathbb{R} = E$.

• Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$ un sous-ensemble. Alors (A, d) est un espace métrique (**Topologie induite ou relative**). $\Omega_A \subset A$ est un ouvert relativement à A si $\forall x \in \Omega_A$, $\exists r > 0$ tel que si $y \in A$ vérifiant $d(x, y) < r$, alors $y \in A$.

Remarque 1.1.11 *(1) Un ensemble $\Omega_A \subset A$ peut être un ouvert relativement à A sans être un ouvert de E.*
Exemple $E = \mathbb{R}^2, A = \mathbb{R} \times \{0\}$ *et* $\Omega_A =]0, 1[\times\{0\}$.
(2) un sous-ensemble $\Omega_A \subset A$ est un ouvert relativement à A si et seulement si il existe un ouvert Ω de E tel que $\Omega_A = A \cap \Omega$.

• Une suite $(x_n)_n$ dans E, **converge** vers $x \in E$ (on note $x_n \to x$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = x$) si $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$

• Une suite $(x_n)_n$ dans E est dite de **Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n, p \geq N, d(x_n, x_p) \leq \varepsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy. La réciproque n'est pas vraie en général. D'où la définition suivante :

• Un espace métrique E est dit **complet** si toute suite de Cauchy dans E converge dans E.

• Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite de E. Une suite $(y_n)_n$ est dite **suite extraite (ou sous-suite)** de $(x_n)_n$ si il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une

application strictement croissante telle que $y_n = x_{\varphi(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

• Soit (E, d) un espace métrique un élément $a \in E$ est dit **valeur d'adhérence** de la suite $(x_n)_n$ si il existe une suite $(x_{\varphi(n)})_n$ extraite de $(x_n)_n$ tel que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers a.

Remarque 1.1.12 *(1) $a = \lim_{n\to+\infty} x_n$ si et seulement si $a = \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$ pour toute suite extraite de $(x_n)_n$.*
(2) Si a est une valeur d'adhérence d'une suite extraite de $(x_n)_n$ alors elle est aussi valeur d'adhérence de $(x_n)_n$.
(3) Si $a = \lim_{n\to+\infty} x_n$ alors a est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_n$. La réciproque n'est pas vraie en général.
Exemple *Soit $E = \mathbb{R}$ muni de la métrique usuelle. Soit la suite $(x_n)_n$ définie par $x_{2n} = \frac{1}{n}$ et $x_{2n+1} = n$, $n \geq 1$. Alors 0 est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ mais elle ne converge pas vers 0.*

Proposition 1.1.13 *Soit (E, d) est un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite de E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*
(1) $a \in E$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$;
(2) $\forall \epsilon > 0, \ \forall p \in \mathbb{N}, \ \exists n \geq p$ tel que $d(x_n, a) \leq \epsilon$;
(3) $\forall p \in \mathbb{N}, \ a \in \overline{A_p}$ où $A_p = \{x_n; \ n \geq p\}$;
(4) a est un point d'accumulation de $\{x_n; \ n \geq 1\}$ ou bien l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}; \ x_n = a\}$ est infini.

Remarque 1.1.14 *L'ensemble des valeurs d'adhérances d'une suite est fermé. En effet d'après la Proposition précédente il est égal à $\cap_{p\geq 1}\overline{A_p}$.*

• Soit $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ la plus grande valeur d'edhérence (éventuellement $+\infty$) de $(x_n)_n$ sera appelée $\limsup \mathbf{x_n}$ et la plus petite valeur d'edhérence de (éventuellement $-\infty$) $(x_n)_n$ sera appelée $\liminf \mathbf{x_n}$.
Alors on a :

$$\limsup x_n = \inf_n \sup_{k\geq n} x_k \quad \text{et} \quad \liminf x_n = \sup_n \inf_{k\geq n} x_k.$$

• La suite $(x_n)_n$ est convergente si et seulement $\limsup x_n = \liminf x_n$.
• Si $x_n \leq y_n$ pour $n \geq N$ alors

$$\limsup x_n \leq \limsup y_n \quad \text{et} \quad \liminf x_n \leq \liminf y_n.$$

Exemple,(1) Si $(x_n)_n$ contient tous les nombres rationnels alors

$$\limsup x_n = +\infty \quad \text{et} \quad \liminf x_n = -\infty.$$

(2) Si $x_n = (-1)^n[1 + \frac{1}{n}]$ alors

$$\limsup x_n = 1 \quad \text{et} \quad \liminf x_n = -1.$$

Exercice 1.5 *Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ deux suites de E.*
(1) Montrer que si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont de Cauchy alors $d(x_n, y_n)$ converge dans $\mathbb{R}$.
(2)Montrer que si $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ convergent vers x et y respectivement, alors

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

(3) Montrer qu'une suite de Cauchy converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

Proposition 1.1.15 *Si (E, d) est un espace métrique, $A \subset E$ et $x \in A$, alors*

$$(i)\, x \in \overline{A} \iff (ii)\, B(x,r) \cap A \neq \emptyset,\ \forall r > 0 \iff (iii)\, x = \lim_{n\to\infty} x_n,\ \text{avec}\ (x_n)_n \subset A.$$

Preuve *Si $B(x, r) \cap A = \emptyset$ alors $E \setminus B(x, r)$ est un fermé contenant A mais pas x, donc $x \notin \overline{A}$. Réciproquement, si $x \notin \overline{A}$, puisque $E \setminus \overline{A}$ est ouvert, $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E \setminus \overline{A} \subset E \setminus A$. D'où $(i) \iff (ii)$.*

Supposons que (ii) est vraie, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Clairement, $x_n \to x$. D'autre part, si $B(x, r) \cap A = \emptyset$, alors $d(x, y) \geq r$ pour tout $y \in A$. Donc il n'existe pas de suite de A qui converge vers x.

1.2 Fonctions continues

Soit (E, d) et (F, d') des espaces métriques.

• Une fonction $f : E \to F$ est dite **continue en** $x_0 \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \text{tel que} \quad \forall x \in E, d(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon.$$

• f est dite continue sur A, une partie de E, si elle est continue en tout points de A i.e.

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \text{tel que} \quad \forall y \in A, d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

• f est dite **uniformément continue** sur A si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \text{tel que} \quad \forall x, y \in A, d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.2.1 *Le point le plus important dans la définition de la convergence uniforme, c'est que "δ" ne dépend pas de x.*

Théorème 1.2.2 (Continuité locale)
Soit (E,d) et (F,d') deux espaces métriques et $f : E \to F$ une fonction. Alors les conditionns suivantes sont équivalentes.
(1) f est continue en $x \in E$;
(2) pour tout voisinage $W \subset F$ de $f(x)$, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x dans E ;
(3) pour toute suite $(x_n)_n \subset E$ telle que $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, la suite $(f(x_n))_n$ converge dans F et on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(x).$$

Théorème 1.2.3 (Continuité globale)
Soit (E,d) et (F,d') deux espaces métriques et $f : E \to F$ une fonction. Alors les conditionns suivantes sont équivalentes.
(1) f est continue dans E ;
(2) pour tout ouvert $W \subset F$, $f^{-1}(W)$ est un ouvert de E ;
(3) pour tout fermé $W \subset F$, $f^{-1}(W)$ est un fermé de E ;
(4) pour toute suite convergente $(x_n)_n \subset E$ la suite $(f(x_n))_n$ est convergente dans F et on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n).$$

Exercice 1.6 *Soit (E,d) et (F,d') deux espaces métriques et $f : E \to F$ une fonction. Montrer que f est continue dans E si et seulement si pour tout ensemble $W \subset F$, $f^{-1}(\mathring{W}) \subseteq \mathring{f^{-1}(W)}$, si et seulement si pour tout ouvert $W \subset F$, $f^{-1}(W) = \mathring{f^{-1}(W)}$.*

Exercice 1.7 *Soit (E,d) et (F,d') deux espaces métriques et $f : E \to F$ une fonction. Montrer que f est continue dans E si et seulement si pour tout ensemble $W \subset F$, $f^{-1}(\overline{W}) \subseteq \overline{f^{-1}(W)}$, si et seulement si pour tout fermé $W \subset F$, $f^{-1}(W) = \overline{f^{-1}(W)}$.*

Deux résultats sur le prolongement des fonctions :
• Soit $f : A \subset E \to F$ une fonction définie sur A ensemble de E. On dira que f admet un **prolongement** si il existe $\widetilde{f} : E \to F$ une fonction définie sur E tel que $\widetilde{f}_{|A} = f$.

Théorème 1.2.4 *Soit (E,d), (F,d') deux espaces métriques. Soit A un ensemble de E dense dans E. Soit $f : A \to F$. Alors f admet un prolongement continu sur E si et seulement si $\forall x \in E$, $\lim_{y\to x, y\in A} f(y)$ existe.*

Théorème 1.2.5 *Soit (E, d), (F, d') deux espaces métriques. Soit A un ensemble de E dense dans E. Soit $f : A \to F$. Supposons que F est complet et f uniformément continue. Alors f admet un prolongement continu sur E. De plus ce prolongement est unique.*

Définition 1.2.6 *Soit (E, d) un espace métrique. Un* **complété** *de E est un espace métrique complet $(\hat{E}, \hat{d})$ tel que il existe une isométrie $\varphi : E \to \hat{E}$ à image dense dans $\hat{E}$ (i.e. $\hat{E} = \overline{\varphi(E)}$).*

Remarque 1.2.7 *(1) On rappelle qu'une isométrie est une application $\varphi : E \to \hat{E}$ entre espaces métriques qui préserve la distance, i.e ;*

$$\hat{d}(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in E.$$

(2) Souvent on identifie E à son image. Dans ce cas, E est une partie dense de $\hat{E}$, telle que la métrique induite sur E par celle de $\hat{E}$ soit la métrique d.

Théorème 1.2.8 *(1) Toute espace métrique admet un complété.*
(2) Soit (E, d) un espace métrique. Si $(\hat{E}_1, \hat{d}_1)$ et $(\hat{E}_2, \hat{d}_2)$ sont deux complétés de E et φ_1, φ_2 les isométries de E dans $\hat{E}_1$ et $\hat{E}_2$, il existe une unique isométrie surjective $\phi : \hat{E}_1 \to \hat{E}_2$ telle que $\varphi_2 = \phi \circ \varphi_1$.

Remarque 1.2.9 *Le (2) du Théorème précédent dit que le complété d'un espace métrique est unique à une isométrie surjective près.*

1.3 Ensembles compacts

Définition 1.3.1 *Soit (E, d) un espace métrique.*
• *un sous-ensemble $K \subseteq E$ est dit* **compact** *si pour tout recouvrement par des ouverts $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in I}$(i.e $K \subset \cup_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$ et Ω_α ouvert dans E) de K il existe un sous-recouvrement fini de K (i.e il existe $J \subseteq I$ fini tel que $K \subset \cup_{j \in J} \Omega_j$).*
(Propriété de **Borel-Lebesgue***).*
Si l'ensemble entier E est compact, alors (E, d) est dit **espace métrique compact***.*
• *un sous-ensemble $K \subseteq E$ est dit* **relativement compact** *si son adhérence $\overline{K}$ est compacte dans E.*
• *un sous-ensemble $K \subseteq E$ est dit* **précompact** *(ou* **totalement borné***) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de K, formé de boules ouvertes de rayon ε (i.e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subseteq K$ tel que $K \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$).*

Le Théorème suivant montre les liens entre ces différentes définitions.

Théorème 1.3.2 *Soit (E, d) un espace métrique et $K \subseteq E$ un sous-ensemble, alors*
(1) **Bolzano-Weierstrass :** *K est compact si et seulement si de toute suite de K on peut extraire une sous-suite convergente dans K.*
(2) K est précompact si et seulement si de toute suite de K on peut extraire une sous-suite de Cauchy dans K.
(3) K est relativement compact si et seulement si toute suite de points de K possède une valeur d'adhérence dans E.

Remarque 1.3.3 *Comme conséquence du Théorème précédent, on a :*
(1) Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) K est compact ;
(ii) K est précompact et complet ;
(iii) K est relativement compact et fermé
(2) Si (E, d) est complet alors, un sous-ensemble K de E est précompact si et seulement si il est relativement compact.

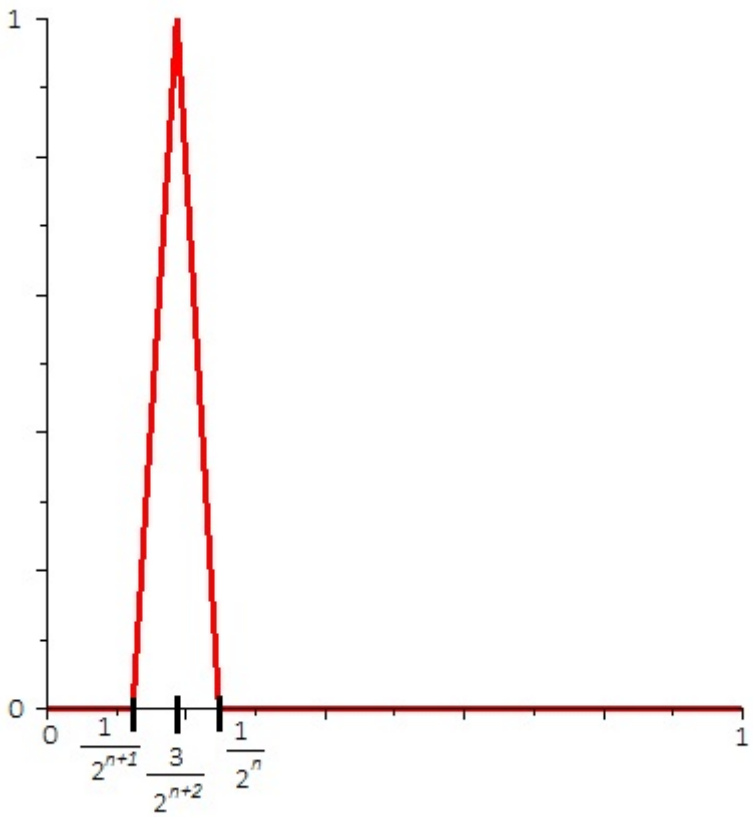
Théorème 1.3.4 *Soit (E, d) un espace métrique et $K \subset A \subset E$. Alors K est compact relativement à E si et seulement si K est compact relativement à A.*

Remarque 1.3.5 *Le Théorème précédent montre que, contrairement à la notion d'ouvert ou de fermé (voir Remarque 1.1.11), la compacité d'un sous-ensemble est une notion intrinsèque, ne dépend pas de l'espace dans lequel il est considéré. Ceci explique, entre autre, pour quoi on parle d'espace compact et pas d'espace ouvert ou espace fermé.*

Théorème 1.3.6 *Soit E un espace vectoriel métrique. Si la dimension de E est finie (en particulier $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$), alors :*
(1) Une partie de E est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.
(2) Une partie de E est relativement compacte si et seulement si elle est précompacte si est seulement si elle est bornée.

Remarque 1.3.7 *Si la dimension de E est infinie, alors tout compact est fermé borné. Mais la réciproque n'est pas vraie.*
Exemple (d'ensemble fermé borné non compact).
Soit $E = C([0, 1])$, $\|.\|_\infty$ et

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \\ 2^{n+2}(x - \frac{1}{2^{n+1}}) & si\ \ \frac{1}{2^{n+1}} \leq x \leq 3\frac{1}{2^{n+2}}, \\ -2^{n+2}(x - \frac{1}{2^n}) & si\ \ 3\frac{1}{2^{n+2}} \leq x \leq \frac{1}{2^n}, \\ 0 & \frac{1}{2^n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Alors $H = \{f_n;\ \ n \in \mathbb{N}\} \subset E$ est un ensemble fermé borné. Mais H n'est pas compact. En effet, on a :

$$\forall p, q \in \mathbb{N},\ p \neq q \quad \|f_p - f_q\|_\infty = 1.$$

Théorème 1.3.8 (Théorème de Tychonoff)
Soit $(K_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ une famille d'espaces compacts alors le produit

$$E = \Pi_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha$$

est compact.

Théorème 1.3.9 *Soit (K, d) un espace métrique compact non vide et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $f(K)$ est borné et il existe $m, M \in K$ tel que $\inf_{x\in K} f(x) = f(m)$ et $\sup_{x\in K} f(x) = f(M)$.*
Dans ce cas on dit que f atteint ses bornes.

L'exercice suivant donne la réciproque du Théorème précédent.

Exercice 1.8 *Soit (E, d) un espace métrique.*
Montrer que E est compacte si et seulement si toute fonction continue à valeur réelle atteint ses bornes.

Théorème 1.3.10 *Soit (K, d) un espace métrique compact et (F, d') un espace métrique. Si $f : K \to F$ une fonction continue, alors elle est uniformément continue.*

L'exercice suivant donne la la réciproque du Théorème précédent.

Exercice 1.9 *Supposons que (E, d) un espace métrique tel que toute fonction continue de E dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue.*
(a) Montrer que E est complet ;
(b) Montrer que si E admet un nombre fini de points isolés alors E est compact.
(c) Donner un exemple d'espace métrique non compact qui admet cette propriété.

Exercice 1.10 (Un Théorème du Graphe fermé)
Soit (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et $f : E \to F$ une fonction. On appelle le graphe de f le sous ensemble de $E \times F$, noté $G(f)$, défini par

$$G(f) = \{(x, y) \in E \times F;\ y = f(x)\}.$$

Le produit $E \times F$ sera muni de la distance

$$\delta\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = d(x_1, x_2) + d'(y,y_2), \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F.$$

(1) Montrer que si (F, d') est compact, alors f est continue si et seulement si $G(f)$ est fermé dans $E \times F$.
(2) Est-ce que ce résultat reste vrai si on supprime l'hypothèse "(F, d') est compact".

Solution : Notons que $(x_n, y_n) \in E \times F$ converge vers (x, y) si et seulement si $x_n \to x$ et $y_n \to y$.
Si f est continue, alors $x_n \to x$ implique que $f(x_n) \to f(x)$. D'autre part, $f(x_n) = y_n \to y$. Par l'unicité de la limite, $y = f(x)$ et donc $(x, y) \in G(f)$. D'où le graphe de f est fermé.
Réciproquement, supposons que (F, d') est compact et $G(f)$ est fermé. Si f n'est pas continue alors il existe $(x_n)_n \subset E$ et $\alpha > 0$ tel que $x_n \to x \in E$ et $d'(f(x_n), f(x)) \geq \alpha$. Puisque F est compact, on peut extraie une sous-suite $f(x_{\varphi(n)} \to y \in F$. Alors pour tout n, $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}) \in G(f)$ et

$(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}) \to (x, y) \in E \times F$. Comme $G(f)$ est fermé, $(x, y) \in G(f)$ et donc $y = f(x)$. Il résulte alors

$$d'(f(x_n), f(x)) \to (f(x), f(x)) = 0,$$

contraduction avec $d'(f(x_n), f(x)) \geq \alpha$. D'où f est continue.
(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors $G(f)$ est fermé mais f n'est pas continue.

1.4 Espaces normés

Dans ce tout paragraphe E désignera un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). D'abord, on donne la définition d'une semi-norme.

Définition 1.4.1 *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'application $p : E \to \mathbb{R}^+$ est dite* **semi-norme** *si elle satisfait les propriétés suivantes :*
(I) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E$;
(II) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Remarque 1.4.2 *(1) Par définition $p(x) \geq 0$, $\forall x \in E$. Cette propriété, on peut la déduire de (I) et (II).*
(2) la condition (II) implique que si $x = 0$ alors $p(x) = 0$. La réciproque n'est pas vraie en général.
(3) L'ensemble $Ker(p) = \{x \in E;\ p(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel.
(4) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$, $\forall x, y \in E$.

Une semi-norme p est appelée norme si $Ker(p) = \{0\}$. Plus précisement :

Définition 1.4.3 *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ est appelée* **norme** *si elle satisfait les proprétés suivantes :*
(I) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
(II) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.
(III) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in E$;

- *Un espace E muni d'une norme est appelé* **espace normé**.

Si $(E, \|.\|)$ est un espace normé alors $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in E$ définit une distance sur E, dite associée à cette norme. (E, d) est un espace métrique.

On notera que cette distance est invariante par translation et par multiplication par un scalaire, c'est à dire

$$d(x+z, y+z) = d(x, y),\ \forall x, y, z \in E \ \text{ et } \ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y),\ \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Réciproquement si une distance d dans un espace métrique, est invariante par translation et par multiplication par un scalaire, alors elle est associée à une norme (on pose $\|x\| = d(x, 0)$).
• Un espace $(E, \|.\|)$ normé complet est dit **espace de Banach**.

Remarque 1.4.4 *Un espace normé est complet si et seulement si toute série absolument (ou normalement) convergente est convergente.*

Exemple 1.4.5 *(1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $K \subset \Omega$ un compact.*
Si $f \in C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C},$ continue$\}$, posons

$$P_K(f) = \sup\{|f(x)|; x \in K\}.$$

Alors P_K est une semi-norme sur $C(\Omega)$, mais pas une norme.
(2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E = \mathbb{K}^n$, $n \geq 1$. Pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$, posons

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

et

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Alors $\|;\|_p$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur E.
(3) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in E = L^p(\Omega)$. Alors

$$\|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

et pour $p = +\infty$,

$$\|f\|_\infty = \sup ess\{|f(x)|; x \in \Omega\}$$

sont des nomres sur E.
(4) Soit A un ensemble et $E = \mathfrak{F}_b = \{f : A \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C},$ bornée$\}$. Pour $f \in E$, posons

$$\|f\| = \sup_{t \in A} |f(t)|.$$

Alors $\|.\|$ est une norme sur E.
(5) **Un exemple très important.** *soit K un espace métrique compact et*

$E = C(K)$ l'espace des fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $f \in E$, posons

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in K} |f(t)|.$$

Alors $\|.\|_\infty$ est une norme sur E.
(6) Soit $E = C^{(n)}([0,1])$ l'espace des fonctions n fois continuements dérivables sur $[0,1]$. Pour $f \in E$, posons

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} \left\{ \sum_{k=0}^{n} |f^{(k)}(t)| \right\}.$$

Alors $\|.\|$ est une norme sur E.
(7) soit $E = C[\mathbb{K}]$ l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $P \in E$ posons

$$\|P\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|P^{(n)}\|_\infty; \quad \textit{avec} \quad \|P^{(n)}\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P^{(n)}(t)|.$$

Alors $\|.\|$ est une norme sur E.

Remarque 1.4.6 *Les exemples $(2),(3),(4),(5),(6)$ sont des espaces de banach.*
L'exemple (7) n'est pas un Banach.

Exercice 1.11 *Soit $(E, \|.\|)$ est un espace normé et $x \in E$, $x \neq 0$.*
(1) Montrer que

$$\|x\| = \inf\{t > 0;\ x \in tB(0,1)\}.$$

(2) Notons $B = B(0,1)$. Montrer que B possède les propiétés suivantes :
(i) Si $x, y \in B$ et $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ alors $\lambda x + \mu y \in B$;
(ii) si $x \in B$ alors $\exists \epsilon > 0$ tel que $x + \epsilon B \subset B$;
(iii) pour $x \in E$, $x \neq 0$ λ, $\mu \neq 0$ tel que $\lambda x \in B$ et $\mu x \notin B$.

Exercice 1.12 *Soit $(E, \|.\|)$ est un espace normé et $x, y \in E$.*
Montrer que

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \quad \Longleftrightarrow \quad \|\alpha x + \beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\|, \ \forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}^+.$$

Exercice 1.13 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Supposons qu'il existe $p : E \to \mathbb{R}^+$ tel que :*
(i) $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, pour tout λ et x.
Montrer que

$$p \ \textit{est une norme} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{B}_{E,p}(0,1) = \{x \in E;\ p(x) \leq 1\} \ \textit{est convexe.}$$

Exercice 1.14 *Soit* $(E, \|.\|)$ *est un espace normé.*
(1) Montrer que E *et* $B(0,1)$ *sont homéomorphe (i.e. il existe une bijection bi-continue entre* E *et* $B(0,1)$*).*

Exercice 1.15 *Soit* $(E, \|.\|)$ *est un espace normé.*
(1) Montrer que $\forall x, y \in E$,

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

(2) Supposons que $x, y \neq 0$, *montrer que*

$$\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\| \leq 2\frac{\|x-y\|}{\|x\|}.$$

(3) Montrer que E *est complet si et seulement si* $\overline{B}(0,1)$ *est complet pour la métrique induite.*

Définition 1.4.7 *Soit* E *un espace vectoriel et* $\|.\|, \quad \|.\|'$ *deux normes sur* E. *On dira que ces deux normes sont équivalentes si il existe* α, $\beta > 0$ *tel que*

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Théorème 1.4.8 *Soit* E *un espace vectoriel et* $\|.\|, \quad \|.\|'$ *deux normes sur* E. *Alors ces deux normes sont équivalents si et seulement si elles définissent la même topologie.*

Théorème 1.4.9 *Soit* E *un espace vectoriel. Si la dimension de* E *est finie alors touts les normes sur* E *sont équivalentes.*

Remarque 1.4.10 *La réciproque de ce Théorème est vraie, comme le montre l'exercice suivant.*

Exercice 1.16 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace normé sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.
(1) Montrer que si toute les normes sont équivalentes sur E, *alors toute les formes linéaire sur* E *sont continues.*
(2) Montrer que si E *est de dimension infinie alors il existe* φ *forme linéaire non continue sur* E.
(3) En déduire que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) E *est de dimension finie ;*
(ii) toute les normes sont équivalentes sur E.
(iii) toute les formes linéaires sur E *sont continues ;*

Solution : (1) Soit $\varphi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire. Posons $\|x\|' = \|x\| + |\varphi(x)|, \quad x \in E$. Il est facile de vérifier que $\|.\|'$ est une norme sur E. Par hypothèse elle est équivalente à la $\|.\|$. Donc il existe $C > 0$ tel que

$$\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\| \quad \forall x \in E.$$

D'où pour tout $x \in E$, $|\varphi(x) \leq (C-1)\|x\|$. Donc φ est continue.
(2) Supposons que la dimension de E est infinie et soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs de libres de E. Soit $M = vect\{e_n;\ n \geq 1\}$. Par le Lemme de Zorn (voir Chapitre 2), il existe W sous-espace vectoriel de E tel que $E = M \oplus W$. Définition la forme linéaire $\varphi(e_n) = n\|e_n\|$ et $\varphi(x) = 0$ si $x \in W$. Alors φ est une forme linéaire sur E, non continue.
(3) $(i) \Rightarrow (ii)$ voir Théorème 1.4.9.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ d'après (1).
$(iii) \Rightarrow (i)$ se déduit de (2).

Exercice 1.17 *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit M un sous-espace fermé de E.*
(1) Montrer que si F est un sous-espace de E de dimension finie, alors $M+F$ est fermé.
(2) En déduire que tout sous-espace de E de dimension finie est fermé.

Solution : (1) En utilisant la récurrence, il suffit de démontrer le résultat pour F de dimension 1. Supposons que $F = vect\{x_0\}$. Si $x_0 \in M$ alors $M + F = M$ fermé. Donc il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $x_0 \notin M$ et soit $x_n = y_n + \alpha_n \in M + F$ avec $y_n \in M$ et $\alpha_n \in \mathbb{K}$. Supposons que x_n converge vers $x \in E$ et montrons que $x \in M + F$.
Si la suite $(\alpha_n)_n$ n'est pas bornée dans $\mathbb{K}$, alors il existe une sous-suite $(\alpha_{\varphi(n)})_n$ tel que $|\alpha_{\varphi(n)}| \to +\infty$. D'autre part, $\frac{1}{\alpha_{\varphi(n)}} x_{\varphi(n)} = \frac{1}{\alpha_{\varphi(n)}} y_{\varphi(n)} + x_0$. Puisque $x_{\varphi(n)}$ est convergente, donc bornée, $\frac{1}{\alpha_{\varphi(n)}} x_{\varphi(n)} \to 0$. D'où, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha_{\varphi(n)}} y_{\varphi(n)} = -x_0$. Mais, $\frac{1}{\alpha_{\varphi(n)}} y_{\varphi(n)} \in M$ fermé, d'où $x_0 \in M$ contradiction. Donc la suite $(\alpha_n)_n$ est bornée dans $\mathbb{K}$, alors il existe une sous-suite $(\alpha_{\varphi(n)})_n$ convergente. Supposons que $\alpha_{\varphi(n)} \to \alpha$. Alors

$$y_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - \alpha_{\varphi(n)} x_0 \to x - \alpha x_0.$$

Comme, M est fermé et $y_{\varphi(n)} \in M$, $w = x - \alpha x_0 \in M$. D'où $x = w + \alpha x_0 \in M + F$. Par conséquent $M + F$ est fermé.
(2) Appliquer (1) pour $M = \{0\}$.

• Espace quotient

Soit E un espace vectoriel et M un sous-espace de E. On définit la relation suivante :

$$x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \quad \text{si} \quad x - y \in M.$$

Alors :

(i) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. L'espace quotient de la relation $\mathcal{R}$ sera noté $\widetilde{E} = E/M$.

(ii) E/M muni des opérations : $\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{x+y}$ et $\lambda\widetilde{x} = \widetilde{\lambda x}$, est un espace vectoriel.

Exercice 1.18 *Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace de E. Notons par $\widetilde{E} = E/M$ l'espace quotient et pour $\widetilde{x} \in E/M$, on définit*

$$N(\widetilde{x}) = d(x, M) := \inf\{\|x - y\|;\ y \in M\}.$$

(1) (a) Montrer que $N(\widetilde{x}) = \inf\{\|z\|;\ z \in \widetilde{x}\}$.

(b) Montrer que $N(.)$ est une semi-norme sur E/M et calculer son noyau.

(c) Montrer que $N(.)$ est une norme sur E/M si et seulement si M est fermé.

(2) On suppose que M est fermé.

Montrer que si E est complet alors E/M est complet.

(3) Montrer que si M et E/M sont complets alors E est complet.

Donner un exemple qui montre que sans l'hypothèse "M et E/M sont complets", E peut ne pas être complet.

• Théorème de F. Riesz

Théorème 1.4.11 (Théorème de Riesz)

Soit E un espace normé, alors

$$\overline{B_E}(0,1) \quad \textit{est compacte} \quad \Longleftrightarrow \quad \dim E < \infty.$$

Pour le démonstration de ce Théorème, on a besoin du lemme suivant

Lemma 1.4.12 (Lemme de F. Riesz)

Soit E un espace normé et $M \subsetneq E$ sous-espace fermé de E. Alors

$$\exists x_0 \in E,\ x_0 \notin M \quad \textit{tel que} \quad \|x_0\| \leq 1 \quad \textit{et} \ \ d(x_0, M) \geq \frac{1}{2}.$$