

Calcul stochastique appliqué à la finance

UE MF Math 31

Résumé de cours

Université de Lille
Sciences et Technologies

Année 2015-2016

Mylene.Maida@math.univ-lille1.fr

Préambule

Comme son titre l'indique, ce document ne constitue pas un polycopié de cours qui se suffit à lui-même mais un **résumé de cours**. Ainsi, il contient les définitions de tous les objets qui ont été introduits dans le cours mais pas tous les exemples qui ont été développés pendant les séances ; il contient un ensemble de théorèmes et propositions qui ont été vus (en cours ou en TD) mais pas leur démonstration. Il constitue pour vous un bilan de ce qu'il faut savoir à l'issue de ce cours.

Pour le partiel comme pour l'examen, vous aurez le droit de consulter librement votre exemplaire **non annoté** de ce document à l'exclusion de tout autre document. A l'exception des énoncés ou paragraphes précédés de la mention (*Admis*), je considère que vous devez savoir démontrer l'ensemble des résultats de ce document, ou refaire les calculs menant aux formules indiquées.

Chapitre 1. Court rappel sur les modèles financiers à temps continu

On veut modéliser, sur la durée $[0, T]$, les cours des actions, devises et autres actifs financiers par des processus de prix qui dépendent du hasard et du temps.

1.1. Hypothèses sur le marché financier

Sauf mention contraire, nous considérerons toujours que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- le marché est liquide, on peut vendre ou acheter à tout instant
- les actifs sont divisibles à l'infini, on peut acheter ou vendre à découvert
- le modèle n'inclut pas les coûts de transaction
- l'effet de nos interventions est négligeable à l'échelle du marché.

1.2. Modèle de marché financier

Le marché financier se modélise par un quintuplet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P}, S)$ où :

- Ω est un **ensemble** (en général infini non dénombrable), qui code "toutes les histoires du monde possibles" sur la durée $[0, T]$, muni d'une **tribu** \mathcal{F} ,
- pour tout $t \in [0, T]$, \mathcal{F}_t est une **tribu**, qui contient toutes les informations disponibles à l'instant t ; la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ est une **filtration**, c'est-à-dire que, pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$,
- \mathbb{P} est une **probabilité** sur (Ω, \mathcal{F}_T) , appelée **probabilité historique** (elle est en général inconnue), NB : on supposera toujours les filtrations complètes pour la probabilité historique
- S est un **processus stochastique mesurable adapté** sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$, appelé **processus de prix**, que l'on détaille ci-dessous.

1.3. Processus des prix

On distingue un actif particulier, appelé **actif sans risque** et noté S^0 , qui est déterministe. Dans ce cours, on supposera en général que le taux d'intérêt par unité de temps, noté r , est constant. On a alors $S_t^0 = e^{rt}, \forall t \in [0, T]$.

Pour i entier entre 1 et d , le prix (qui, sauf mention contraire, sera exprimé en euros) de l'actif i (ou **spot**) est un processus

$$\begin{aligned} S^i : \Omega \times [0, T] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, t) &\mapsto S^i(\omega, t) := S_t^i(\omega), \end{aligned}$$

que l'on suppose mesurable sur $(\Omega \times [0, T], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, T]))$ et adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$.

Le **prix actualisé** de l'actif i à l'instant t est donné par $\tilde{S}_t^i := \frac{S_t^i}{S_t^0}$, soit, quand le taux d'intérêt r est constant, $\tilde{S}_t^i := e^{-rt} S_t^i$.

Le marché comporte un nombre fini d d'actifs, on note $S_t := (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)'$ et $\tilde{S}_t := \left(1, \frac{S_t^1}{S_t^0}, \dots, \frac{S_t^d}{S_t^0}\right)'$ respectivement le vecteur des prix et le vecteur des prix actualisés à l'instant t , de sorte que S et \tilde{S} sont des processus mesurables adaptés à valeurs dans \mathbb{R}^{d+1} .

Le **rendement** de l'actif i sur la durée $[s, t] \subset [0, T]$ est donné par $\ln \left(\frac{S_t^i}{S_s^i} \right)$. La **volatilité historique** de l'actif i sur la durée $[s, t] \subset [0, T]$ est l'écart-type de son rendement, c'est-à-dire

$$\sigma_{[s, t]} = \sqrt{\mathbb{V} \left(\ln \left(\frac{S_t^i}{S_s^i} \right) \right)},$$

où V est la variance sous \mathbb{P} .

NB : nous verrons plus loin d'autres notions de volatilité.

1.4. Stratégie et portefeuille

Une **stratégie de gestion** est encore un processus adapté

$$\begin{aligned}\Phi : \Omega \times [0, T] &\rightarrow \mathbb{R}^{d+1} \\ (\omega, t) &\mapsto \Phi_t(\omega).\end{aligned}$$

Le caractère adapté de la stratégie de gestion exprime le fait que l'on interdit le délit d'initié.

A l'instant t , notre portefeuille est constitué d'une quantité Φ_t^0 d'actif sans risque, d'une quantité Φ_t^1 d'actif 1 etc.

Sa valeur à l'instant t (Mark to Market) est $V_t = \Phi_t \cdot S_t$ et sa valeur actualisée est $\tilde{V}_t = \Phi_t \cdot \tilde{S}_t$.

On parle de **stratégie autofinancée** s'il n'y a ni entrée ni sortie d'argent, c'est-à-dire si la valeur du portefeuille ne varie qu'à cause des variations de cours des actifs qui le composent.

On parle de **stratégie admissible** si la valeur du portefeuille est toujours positive (+ une condition technique que nous verrons plus tard).

On parle de **stratégie d'arbitrage** si V_0 est nulle et V_T a une probabilité non nulle d'être strictement positive.

S'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage sur le marché $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P}, S)$, on dit que ce marché est **viable**. On fera toujours par la suite cette hypothèse que l'on appelle **absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)**.

Un **actif conditionnel** est un couple (h, T) , où T est un temps, appelé **échéance** ou **maturity** et h est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable, appelée **payoff**.

Exemple : call européen, put européen, etc.

Un actif conditionnel (h, T) est dit **répliquable** (ou simulable, ou atteignable), s'il existe une stratégie admissible Φ telle que la valeur finale V_T du portefeuille soit égale à h . On dit alors que V ou Φ **simule** h , que Φ est une **stratégie de couverture** de h et que V est un **portefeuille de couverture** de h .

Si tous les actifs conditionnels sont répliquables, on dit que le marché est **complet**.

1.5. Conséquences de l'hypothèse d'AOA

Si l'hypothèse d'AOA est vérifiée, alors :

- il y a unicité de l'actif sans risque (le taux r est bien défini)
- il y a unicité des prix
- (Admis) il existe une probabilité \mathbb{P}^* , appelée **probabilité martingale** ou **probabilité risque neutre**, équivalente à la probabilité historique \mathbb{P} sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales
NB : de plus, si le marché est complet, alors \mathbb{P}^* est unique.
- la **relation de parité call-put** est vérifiée :

$$C_t + \frac{S_t^0}{S_T^0} K = P_t + S_t,$$

avec C_t, P_t et S_t les valeurs respectives à l'instant t du call, du put et du spot de l'actif sous-jacent.

Chapitre 2. Les propriétés du mouvement brownien

2.1. Mouvement brownien et mouvement brownien géométrique

2.1.1. Définition du mouvement brownien

Le processus $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ est un **mouvement brownien** sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si et seulement si

1. B est issu de 0, c'est-à-dire que $B_0 = 0$ \mathbb{P} -presque sûrement (p.s.)
2. B est à trajectoires continues
3. B est à accroissement indépendants, c'est-à-dire que pour tous $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, la famille de variables aléatoires $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_{t_0})$ est indépendante
4. pour tous $0 \leq s < t \leq T$, $B_t - B_s$ suit une loi gaussienne centrée de variance $t - s$.

Un **processus gaussien** (centré) est un processus tel que toutes les marginales fini-dimensionnelles soient des vecteurs gaussiens (centrés), autrement dit tel que toute combinaison linéaire finie de ses marginales fini-dimensionnelles soit gaussienne (centrée). La loi d'un processus gaussien centré est caractérisée par sa **fonction de covariance**.

Proposition 1 B est un mouvement brownien si et seulement si B est un processus gaussien centré à trajectoires continues de fonction de covariance $\text{cov}(B_s, B_t) = \min(s, t)$.

2.1.2. Le mouvement brownien géométrique

Un **mouvement brownien géométrique** de paramètres (μ, σ) est un processus $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$ tel que pour tout $t \in [0, T]$,

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t},$$

avec S_0 une variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable, B un mouvement brownien, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

2.2. Quelques propriétés du mouvement brownien

Proposition 2 (Propriétés d'invariance) Si B est un mouvement brownien alors

1. $-B$ est aussi un mouvement brownien
2. (Propriété de Markov simple) Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $(B_{t_0+t} - B_{t_0})_{t \in [0, T-t_0]}$ est un mouvement brownien indépendant de $\sigma(B_r, r \leq t_0)$.
3. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{1}{\alpha} B_{\alpha^2 t}\right)_{t \in [0, T/\alpha^2]}$ est un mouvement brownien.

Proposition 3 (Propriétés de martingale) Soit B un mouvement brownien et pour tout $t \in [0, T]$, \mathcal{F}_t est la tribu $\sigma(B_s, s \leq t)$ complétée.

1. B est une (\mathcal{F}_t) -martingale
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t})_{t \in [0, T]}$ est une (\mathcal{F}_t) -martingale
3. $(B_t^2 - t)_{t \in [0, T]}$ est une (\mathcal{F}_t) -martingale.

Proposition 4 (Variation quadratique) Soit $0 = t_0^n \leq t_1^n \leq \dots \leq t_{p_n}^n = T$ une suite de subdivisions de $[0, T]$ telles que $\sup_{1 \leq i \leq p_n} |t_i^n - t_{i-1}^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Alors, quand n tend vers l'infini, $\sum_{i=1}^{p_n} (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2$ converge dans \mathbb{L}^2 vers T .

Corollaire 5 (Irrégularité des trajectoires)

1. Presque sûrement, les trajectoires du mouvement brownien ne sont à variation finie sur aucun intervalle non trivial
2. Soit $\alpha > 1/2$. Presque sûrement, les trajectoires du mouvement brownien ne sont α -höldériennes sur aucun intervalle non trivial
3. Presque sûrement, les trajectoires du mouvement brownien ne sont nulle part dérivables.
4. Presque sûrement, $\limsup_{t \rightarrow \infty} B_t = +\infty$ et $\liminf_{t \rightarrow \infty} B_t = -\infty$.

2.3. Propriété de Markov forte et conséquences

Proposition 6 (Propriété de Markov forte) (Admis) Soit T un temps d'arrêt. Conditionnellement à $\{T < \infty\}$ le processus $(B_{T+t} - B_T)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien, indépendant de \mathcal{F}_T .

Théorème 7 Pour tout $t > 0$, on pose $M_t = \sup_{s \leq t} B_s$. Alors, si $a \geq 0$ et $b \leq a$, on a

$$\mathbb{P}(M_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b).$$

Corollaire 8 Pour tout $t \geq 0$, M_t a même loi que $|B_t|$.

Corollaire 9 Pour tout $a \geq 0$, si $T_a := \inf\{t \geq 0, B_t = a\}$, alors T_a a même loi que $\frac{a^2}{B_1^2}$.

Chapitre 3. Intégration stochastique

Dans tout le chapitre, $(B_t)_{t \geq 0}$ désignera un mouvement brownien standard et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration canonique (complétée).

3.1. Intégration des processus élémentaires

Définition. [Processus élémentaires]

On dit que H est un processus élémentaire si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_p$ et des variables aléatoires $H^{(1)}, \dots, H^{(p)}$ bornées telles que pour tout $i \leq p$, $H^{(i)}$ est \mathcal{F}_{t_i} -mesurable et $\forall \omega \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}^+$,

$$H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(\omega) \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(s).$$

On note \mathcal{E} l'ensemble de ces processus.

Définition. [Intégration des processus élémentaires]

Pour tout $H \in \mathcal{E}$, on définit le processus $H \cdot B$ tel que, $\forall \omega \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}^+$,

$$(H \cdot B)_t = \sum_{j=0}^{p-1} H^{(j)}(\omega) (B_{t_j \wedge t}(\omega) - B_{t_{j-1} \wedge t}(\omega)),$$

où $s \wedge t = \min(s, t)$.

On notera volontiers $(H \cdot B)_t = \int_0^t H_s dB_s$.

Proposition 10 1. L'application $H \mapsto H \cdot B$ est linéaire sur \mathcal{E} .

2. Le processus $H \cdot B$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -martingale à trajectoires continues.

3. $\forall t \in \mathbb{R}^+, E(((H \cdot B)_t)^2) = E\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$.

4. $\forall T \in \mathbb{R}^+, E(\sup_{t \leq T} ((H \cdot B)_t)^2) \leq 4E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right)$.

3.2. Intégration des processus continus adaptés de carré intégrable

3.2.1. Densité des processus élémentaires

Définition. On définit $\mathcal{L}^2(B)$ l'ensemble des processus H $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptés mesurables, à trajectoires continues tels que

$$\|H\|_2^2 := E\left(\int_0^\infty H_s^2 ds\right) < \infty.$$

On note $\mathbb{L}^2(B)$ le quotient de $\mathcal{L}^2(B)$ par la relation d'équivalence $H \equiv H'$ ssi $\|H - H'\|_2^2 = 0$. C'est un espace de Hilbert.

Proposition 11 (Densité des processus élémentaires)

\mathcal{E} est dense dans $\mathbb{L}^2(B)$.

La démonstration de ce résultat utilise le lemme suivant :

Lemme 12 Soit M une martingale issue de zéro. Si M est à variation finie, M est indistinguable de 0.

3.2.2. Extension de la définition de l'intégrale à $\mathbb{L}^2(B)$

Dans la suite, on note \mathcal{H}^2 l'espace des $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -martingales à trajectoires continues, bornées dans \mathbb{L}^2 .

Théorème 13 Il existe une unique application linéaire J de $\mathbb{L}^2(B)$ dans \mathcal{H}^2 telle que

1. Si $H \in \mathcal{E}$, alors $J(H) = H \cdot B$, p.s.
2. Pour tout $t \geq 0$, $E((J(H))_t^2) = E(\int_0^t H_s^2 ds)$.

Cette application est unique au sens où, si J et J' vérifient les points précédents, alors p.s., $\forall t \geq 0; J(H)_t = J'(H)_t$. De plus, si τ est un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt, on a, pour tout $t \geq 0$, $J(H)_{t \wedge \tau} = J(\mathbf{1}_{\{ \cdot \leq \tau \}} H)$.

Dans ce cas, on notera encore volontiers $J(H)_t = \int_0^t H_s dB_s$, pour tout $t \geq 0$.

3.2.3. Extension de la définition de l'intégrale aux processus localement bornés

Pour $T > 0$ fixé, on définit

$$\tilde{\mathcal{H}}_T := \left\{ (H_t)_{0 \leq t \leq T} \quad (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \text{ - adapté tel que p.s. } \int_0^T H_s^2 ds < \infty \right\}.$$

Proposition 14 (Admis) Il existe une unique application linéaire \tilde{J} définie sur $\tilde{\mathcal{H}}_T$ dans l'espace des processus continus telle que

1. si $H \in \mathcal{E}$, alors p.s. $\forall 0 \leq t \leq T$, $\tilde{J}(H)_t = (H \cdot B)_t$,
2. si $(H^n)_{n \geq 0}$ est une suite de processus de $\tilde{\mathcal{H}}_T$ telle que $\int_0^T (H_s^n)^2 ds$ tend vers 0 en probabilité, alors $\sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H^n)_t|$ tend vers 0 en probabilité.

On notera encore $\tilde{J}(H)_t = \int_0^t H_s dB_s$.

Attention : dans ce cas, $(\int_0^t H_s dB_s)_{t \geq 0}$ n'est pas nécessairement une martingale et la propriété d'isométrie n'est pas nécessairement respectée.

Chapitre 4. Processus d'Itô, formule d'Itô et applications

4.1. Processus d'Itô en dimension 1

4.1.1. Définition

Définition. [Processus d'Itô]

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration (complète) et B un $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ -mouvement brownien. On appelle processus d'Itô un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R} tel que

$$\mathbb{P} \text{ p.s.}, \forall t \leq T, X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

avec X_0 \mathcal{F}_0 -mesurable, K et H $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptés tels que \mathbb{P} p.s., $\forall t \geq 0$, $\int_0^t |K_s| ds < \infty$ et $\int_0^t H_s^2 ds < \infty$.

Remarque : on peut vérifier que $(\int_0^t K_s ds)_{t \geq 0}$ est à variation finie et que $(\int_0^t H_s dB_s)_{t \geq 0}$ est une martingale locale. Une extension (admise) du lemme 12 permet de montrer que la décomposition est unique.

4.1.2. Variation quadratique d'un processus d'Itô

Pour un procesus d'Itô tel que défini plus haut, on pose, pour tout $t \in [0, T]$, $\langle X, X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$.

Proposition 15 Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Itô.

1. $(\langle X, X \rangle_t)_{t \geq 0}$ est un processus croissant (donc à variation finie).
2. Soit $T > 0$ fixé. Soit $0 = t_0^n \leq t_1^n \leq \dots \leq t_{p_n}^n = T$ une suite de subdivisions de $[0, T]$ telles que $\sup_{1 \leq i \leq p_n} |t_i^n - t_{i-1}^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Alors, quand n tend vers l'infini, $\sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2$ converge en probabilité vers $\langle X, X \rangle_T$.

Exemple. si B est un mouvement brownien, alors, pour tout $t \geq 0$, $\langle B, B \rangle_t = t$.

4.2. Formule d'Itô en dimension 1

Théorème 16 (Formule d'Itô)

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Itô qui s'écrit, $\forall t \geq 0$, $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$ et f une fonction de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Alors

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) H_s dB_s + \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds.$$

Si f est maintenant une fonction de classe \mathcal{C}^2 de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{R} . Alors

$$f(X_t, t) = f(X_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) H_s dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) K_s ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds.$$

4.3. Quelques applications importantes de la formule d'Itô

4.3.1. Théorème de Girsanov

On considère un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Soit h une fonction mesurable, positive, d'intégrale 1. On définit la mesure de probabilité \mathbb{Q} sur (Ω, \mathcal{F}) de la manière suivante : pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{Q}(A) = \int_A h d\mathbb{P} = \int h \mathbf{1}_A d\mathbb{P}$. On dit alors que \mathbb{Q} a pour densité h par rapport à \mathbb{P} .

Théorème 17 (Girsanov)

Soit $(H_t)_{t \in [0, T]}$ un processus adapté tel que le processus L donné par

$$L_t = \exp \left(- \int_0^t H_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 ds \right), \text{ pour tout } t \in [0, T],$$

soit une martingale. On définit \mathbb{Q}_L la mesure de probabilité de densité L_T par rapport à \mathbb{P} .

Si $(B_t)_{t \in [0, T]}$ est un mouvement brownien sous \mathbb{P} , le processus W défini par $W_t = B_t + \int_0^t H_s ds$, pour tout $t \in [0, T]$, est un mouvement brownien sous \mathbb{Q}_L .

Remarque : si $(H_t)_{t \in [0, T]}$ un processus adapté tel que \mathbb{P} p.s. $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$, on peut vérifier que L est un processus d'Itô dont la partie à variation finie est nulle. On admet que sous des hypothèses un peu plus fortes sur H , L est une vraie martingale. Par exemple $E \left(\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T H_s^2 ds \right) \right) < \infty$ est une condition suffisante (condition de Novikov).

4.3.2. Théorème de représentation des martingales browniennes

Théorème 18 (Admis)

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration associée. Si $(M_t)_{t \geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -martingale de carré intégrable, alors il existe $H \in \mathbb{L}^2(B)$, tel que p.s. $\forall t \in [0, T]$, $M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s$.

Remarque : On sait que si $H \in \mathbb{L}^2(B)$ alors $(\int_0^t H_s dB_s)_{t \geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -martingale de carré intégrable. Le théorème de représentation des martingales browniennes dit qu'elles sont toutes de cette forme.

Corollaire 19 Si U est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable de carré intégrable alors il existe H adapté tel que $E(\int_0^T H_s^2 ds) < \infty$ et

$$U = E(U) + \int_0^T H_s dB_s.$$

4.4. Introduction aux équations différentielles stochastiques (EDS)

Définition. On considère un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

Soient $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables, soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -mouvement brownien et Z une variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable.

On dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifie l'EDS

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 &= Z, \end{cases}$$

si et seulement si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adapté à trajectoires continues tel que p.s. $\forall t \geq 0$, $\int_0^t b(s, X_s)ds < \infty$ et $\int_0^t \sigma^2(s, X_s)ds < \infty$ et

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Remarque : dans la littérature, $(X_t)_{t \geq 0}$ est souvent appelée solution forte de l'EDS. Nous ne nous intéresserons dans ce cours qu'à ce type de solutions.

Théorème 20 (Admis)

Si $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues telles qu'il existe $K > 0$ tel que, pour tous $t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}$,

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y| \text{ et } |b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$$

alors, pour tout $T > 0$, l'EDS ci-dessus admet une unique solution sur $[0, T]$.

Cette solution vérifie que $E(\sup_{0 \leq t \leq T} X_t^2) < \infty$.

4.5. Généralisation en dimension supérieure

4.5.1. Crochet de deux processus d'Itô

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration (complète) et B et B' deux $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ -mouvements browniens égaux ou indépendants. Soient $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ deux processus d'Itô à valeurs dans \mathbb{R} tels que

$$\mathbb{P} \text{ p.s., } \forall t \leq T, X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

$$\mathbb{P} \text{ p.s., } \forall t \leq T, Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dB'_s,$$

avec X_0, Y_0 \mathcal{F}_0 -mesurables, K, K', H et H' $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptés tels que \mathbb{P} p.s., $\forall t \geq 0$, $\int_0^t (|K_s| + |K'_s|)ds < \infty$ et $\int_0^t (H_s^2 + (H'_s)^2)ds < \infty$.

Définition. Avec les notations introduites ci-dessus, le crochet $(\langle X, Y \rangle_t)_{t \geq 0}$ des processus $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ est défini par : pour tout $t \geq 0$,

$$\langle X, Y \rangle_t = \begin{cases} \int_0^t H_s H'_s ds, & \text{si } B = B' \\ 0, & \text{si } B \text{ et } B' \text{ sont indépendants.} \end{cases}$$

Proposition 21 Si X et Y sont deux processus d'Itô comme définis ci-dessus, alors, pour tout $T > 0$,

1. $\langle X, Y \rangle_T = \frac{1}{4} (\langle X + Y, X + Y \rangle_T - \langle X - Y, X - Y \rangle_T)$,
2. pour toute subdivision $0 = t_0^n \leq t_1^n \leq \dots \leq t_{p_n}^n = T$ de l'intervalle $[0, T]$ de pas tendant vers 0, $\sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})(Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n})$ converge en probabilité vers $\langle X, Y \rangle_T$.

4.5.2. Formule d'Itô multidimensionnelle

Théorème 22 Soient $(X^1, \dots, X^{(n)})$ n processus d'Itô et f une fonction de classe \mathcal{C}^2 de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{R} . Alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(X_t^1, \dots, X_t^{(n)}, t) &= f(X_0^1, \dots, X_0^{(n)}, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(X_s^1, \dots, X_s^{(n)}, s) ds \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_k}(X_s^1, \dots, X_s^{(n)}, s) H_s^{(k)} dB_s^{(k)} + \sum_{k=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_k}(X_s^1, \dots, X_s^{(n)}, s) K_s^{(k)} ds \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell}(X_s^1, \dots, X_s^{(n)}, s) d\langle X^{(k)}, X^{(\ell)} \rangle_s, \end{aligned}$$

si pour tout $t \geq 0$, pour tout $1 \leq k \leq n$, $X_t^{(k)} = X_0^{(k)} + \int_0^t H_s^{(k)} dB_s^{(k)} + \int_0^t K_s^{(k)} ds$.

Remarque (admise) : si U est un ouvert de \mathbb{R}^n tel que f est de classe \mathcal{C}^2 de $U \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{R} et \mathbb{P} presque sûrement, pour tout $t \geq 0$, $(X_t^1, \dots, X_t^{(n)}) \in U$, alors la formule ci-dessus est encore vraie.

Chapitre 5. Evaluation et couverture des options dans le modèle de Black-Scholes

Dans tout le chapitre, on notera $T > 0$ l'horizon du modèle.

5.1. Présentation du modèle

Le modèle de Black-Scholes unidimensionnel contient :

- un actif sans risque, dont nous supposons le prix $S^0 = (S_t^0)_{0 \leq t \leq T}$ déterministe à taux d'intérêt $r \geq 0$ constant, soit pour tout $t \in [0, T]$, $S_t^0 = e^{rt}$,
- un actif dont le prix $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ est donné par un mouvement brownien géométrique ; pour tout $t \in [0, T]$, $S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right)$, avec $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, S_0 une variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable de carré intégrable et B un mouvement brownien standard.

Proposition 23 Avec les mêmes notations que ci-dessus, S est l'unique solution de l'EDS

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

associée à la condition initiale S_0 .

Proposition 24 On définit $c := \frac{r-\mu}{\sigma}$, \mathbb{P}^* la probabilité dont la densité par rapport à \mathbb{P} est donné par $\exp\left(cB_T - \frac{c^2}{2}T\right)$ et le processus de prix actualisé $(\tilde{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$ donné par, $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$, pour tout $t \in [0, T]$. Alors, sous la probabilité \mathbb{P}^* , le processus de prix actualisé $(\tilde{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale.

On notera E^* l'espérance sous la probabilité risque-neutre \mathbb{P}^* .

Une **stratégie autofinancée** est un couple de processus $(J_t)_{0 \leq t \leq T}, (H_t)_{0 \leq t \leq T}$ adaptés, tels que \mathbb{P} p.s. $\int_0^T |J_t| dt + H_t^2 dt < \infty$ et pour tout $t \in [0, T]$,

$$J_t S_t^0 + H_t S_t = J_0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t J_u r e^{ru} du + \int_0^t H_u dS_u,$$

avec $\int_0^t H_u dS_u = \int_0^t \mu H_u S_u du + \int_0^t \sigma H_u S_u dB_u$.

Dans toute la suite, on note aussi V_t la valeur du portefeuille au temps t , donné par $V_t = J_t S_t^0 + H_t S_t$ et $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t$ sa valeur actualisée.

Une stratégie est **admissible** si elle est autofinancée, si $E^*\left(\sup_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t^2\right) < \infty$ et si \mathbb{P} p.s., pour tout $t \in [0, T]$, $\tilde{V}_t \geq 0$.

5.2. Pricing et couverture des options européennes

5.2.1. Théorème fondamental du pricing

Théorème 25 Dans le modèle de Black-Scholes, toute option définie par une variable aléatoire h positive, \mathcal{F}_T -mesurable telle que $E^*(h^2) < \infty$ est simulable et le portefeuille de couverture est donné de la manière suivante : pour tout $t \in [0, T]$,

$$V_t = E^* \left(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t \right).$$

5.2.2. Formule de Black-Scholes pour le prix du call européen

Soit N la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$N(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

de sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Théorème 26 Pour tout $t \in [0, T]$, le prix C_t au temps t du call européen d'échéance T et de prix d'exercice K est donné par $C_t = F(t, S_t, r, \sigma, T, K)$, avec

$$F(t, x, r, \sigma, T, K) = xN(d(t, x, r, \sigma, T, K) + \sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-r(T-t)}N(d(t, x, r, \sigma, T, K)),$$

$$\text{où } d(t, x, r, \sigma, T, K) := \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right).$$

Le portefeuille de couverture est donné pour tout $t \in [0, T]$, par

$$H_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t, r, \sigma, T, K) \text{ et } J_t = e^{-rt}F(t, S_t, r, \sigma, T, K) - e^{-rt}H_t S_t,$$

où $\frac{\partial F}{\partial x}$ désigne la dérivée de F par rapport à la deuxième variable.

5.2.3. Calcul des grecques

Proposition 27

- On définit le Delta du call par la formule suivante $\Delta := \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, r, \sigma, T, K)$.
Il est donné par $\Delta_t = N(d(t, x, r, \sigma, T, K) + \sigma\sqrt{T-t})$.

On donne ci-dessous l'expression des autres grecques au temps $t = 0$:

- On définit le Gamma du call par $\Gamma_t := \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x, r, \sigma, T, K)$.
Au temps $t = 0$, il est donné par $\Gamma_0 = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}} N'(d(0, x, r, \sigma, T, K) + \sigma\sqrt{T})$.

- On définit le Theta du call par $\Theta_t := \frac{\partial F}{\partial t}(t, x, r, \sigma, T, K)$.
Au temps $t = 0$, il est donné par $\Theta_0 = \frac{-x\sigma}{2\sqrt{T}}N'(d(0, x, r, \sigma, T, K)) - Ke^{-rT}N(d(0, x, r, \sigma, T, K))$.
- On définit le Vega du call par $Vega_t := \frac{\partial F}{\partial \sigma}(t, x, r, \sigma, T, K)$.
Au temps $t = 0$, il est donné par $Vega_0 = x\sqrt{T}N'(d(0, x, r, \sigma, T, K)) + \sigma\sqrt{T}$.
- On définit le Rho du call par $\rho_t := \frac{\partial F}{\partial r}(t, x, r, \sigma, T, K)$.
Au temps $t = 0$, il est donné par $\rho_0 = TKe^{-rT}N(d(0, x, r, \sigma, T, K))$.

5.2.4. Volatilité

On a déjà vu dans le chapitre 1 la notion de volatilité historique.

Si le prix d'un actif vérifie une EDS de la forme

$$\frac{dX_t}{X_t} = b_t dt + \sigma_t^X dB_t^*,$$

avec $(B_t^*)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sous \mathbb{P}^* , on appelle alors $(\sigma_t^X)_{t \geq 0}$ la **volatilité locale** de l'actif.

Proposition 28 Dans le modèle de Black-Scholes, le Call européen a une volatilité locale plus grande que celle de l'actif sous-jacent.

On peut définir aussi la **volatilité implicite** le paramètre σ^i qui vérifie

$$F(t, x, r, \sigma^i, T, K) = C^{obs}(t, x, r, T, K),$$

où C^{obs} est le prix du call observé sur le marché.

Chapitre 6. Utilisation des équations aux dérivées partielles pour l'évaluation des options

Dans tout le chapitre, on fera les hypothèses suivantes : $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues telles qu'il existe $K > 0$ tel que, pour tous $t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}$,

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y| \text{ et } |b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|).$$

On suppose aussi que $E(Z^2) < \infty$. Rappelons (cf chap 4.) que cela assure l'existence et l'unicité de la solution de l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = Z, \end{cases}$$

solution qui vérifie de plus que $E(\sup_{0 \leq t \leq T} X_t^2) < \infty$.

6.1. Générateur infinitésimal d'une diffusion

6.1.1. Cas où b et σ ne dépendent pas du temps

Proposition 29 Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^2 à dérivées bornées. On définit la fonction Af telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$Af(x) := \frac{\sigma^2(x)}{2} f''(x) + b(x)f(x).$$

Alors,

1. si $(X_t)_{t \geq 0}$ est une solution de l'EDS $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$, le processus $(M_t)_{t \geq 0}$ donné, pour tout $t \geq 0$, par

$$M_t = f(X_t) - \int_0^t Af(X_s)ds$$

est une martingale.

2. Si on note $(X_t^x)_{t \geq 0}$ la solution de l'EDS $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$ avec condition initiale $X_0 = x$, on a

$$\frac{d}{dt} E(f(X_t^x))|_{t=0} = Af(x),$$

d'où le nom de générateur infinitésimal.

6.1.2. Généralisations

Proposition 30 Soient $(X_t)_{t \geq 0}$ est solution de l'EDS $dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$, et $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 en la première variable et de classe \mathcal{C}^2 à dérivées bornées en la deuxième variable. Alors le processus $(M_t)_{t \geq 0}$ donné, pour tout $t \geq 0$, par

$$M_t = u(t, X_t) - \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au \right) (s, X_s) ds$$

est une martingale, avec, pour tout $s \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$Au(s, x) = \frac{\sigma^2(s, x)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, x) + b(s, x) \frac{\partial u}{\partial x}(s, x).$$

6.2. Application au pricing d'une option européenne

On suppose dans toute la suite que l'horizon $T > 0$ et le taux d'intérêt $r \geq 0$ sont fixés. On se donne aussi une fonction f positive sur \mathbb{R} .

6.2.1. Méthode générale

Théorème 31 (*Admis*)

Soit $(X_s^{t,x})_{s \geq t}$ la solution de l'EDS $dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$ telle que $X_t^{t,x} = x$.

Si, pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$V_t = \mathbb{E} \left(e^{-r(T-t)} f(X_T^{0, X_0}) | \mathcal{F}_t \right),$$

alors $V_t = F(t, X_t)$, où $F(t, x) = \mathbb{E} \left(e^{-r(T-t)} f(X_T^{t,x}) \right)$.

Dans toute la suite, on notera $F(t, x) = \mathbb{E} \left(e^{-r(T-t)} f(X_T^{t,x}) \right)$.

Proposition 32 Soit $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 en la première variable et de classe \mathcal{C}^2 à dérivées bornées en la deuxième variable vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(T, x) = f(x)$$

et

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au - ru \right) (t, x) = 0.$$

Alors, $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, u(t, x) = F(t, x)$.

L'équation ainsi obtenue est appelée **EDP d'évaluation de l'option de payoff** $f(S_T)$.

Remarque : si l'opérateur A est elliptique, c'est-à-dire s'il existe $C > 0$ tel que $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \sigma^2(t, x) \geq C > 0$, il y a existence de solutions régulières de l'EDP parabolique qui apparaît dans la proposition ci-dessus.

On aborde maintenant le cas des EDP sur un ouvert borné.

Proposition 33 Soient $a < b$ deux réels. Soit $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 en la première variable et de classe \mathcal{C}^2 à dérivées bornées en la deuxième variable vérifiant

$$\forall x \in]a, b[, u(T, x) = f(x),$$

$$\forall t \in [0, T], u(t, a) = u(t, b) = 0$$

et

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times]a, b[, \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au - ru \right) (t, x) = 0.$$

Alors, $\forall (t, x) \in [0, T] \times]a, b[, u(t, x) = \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{\forall s \in [t, T], X_s^{t,x} \in]a, b[\}} e^{-r(T-t)} f(X_T^{t,x}) \right)$.

6.2.2. Résolution des EDP de type parabolique

Proposition 34 (Equation de la chaleur)

Si on définit, pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$g(t, x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

et si on pose, pour tout $0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}$

$$u(t, x) = \int f(x + y) g(T - t, y) dy,$$

alors u est solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

avec la condition terminale $u(T, x) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour résoudre les EDP paraboliques plus générales (au moins dans le cas elliptique), on essaie de se ramener par de bons changements de variables à l'équation de la chaleur.

6.2.3. Retour sur la formule de Black-Scholes

Dans le modèle de Black-Scholes, pour calculer le prix de l'option de payoff $f(S_T)$, il faut donc chercher une fonction v telle que, $\forall x \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rx \frac{\partial v}{\partial x} - rv(t, x) + \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = 0,$$

avec la condition terminale $v(t, x) = f(x)$.

Une difficulté vient du fait que dans ce cas l'opérateur associé n'est pas elliptique. Cependant, on vérifie que, $\forall x \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$, on a

$$v(t, x) = e^{rt} u \left(t, \frac{1}{\sigma} \left(\ln x - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) \right),$$

où u est solution de

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, y) + \frac{\partial u}{\partial t}(t, y) = 0$$

avec la condition terminale $u(T, y) = e^{-rT} f \left(e^{\sigma y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T} \right)$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Chapitre 7. Les options barrières dans le modèle de Black-Scholes

7.1. Principe de symétrie dans le modèle de Black-Scholes

Proposition 35 Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un processus de prix vérifiant l'EDS $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$ et la condition initiale $S_0 = x, x \in \mathbb{R}$. Soit $T > 0$ et f une fonction positive. On a, pour tout $t \leq T$,

$$E(f(S_t)) = E \left(\left(\frac{S_T}{x} \right)^{1 - \frac{2\mu}{\sigma^2}} f \left(\frac{x^2}{S_T} \right) \right).$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 36 (Principe de symétrie)

Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un processus de prix vérifiant l'EDS $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$. On pose $\gamma := 1 - \frac{2\mu}{\sigma^2}$. Pour toute fonction positive f , on note $OE(t, x, f, T)$, le prix au temps t de l'option d'échéance T et de payoff $f(S_T)$. On note aussi, pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_x(y) = \left(\frac{y}{x}\right)^\gamma f\left(\frac{x^2}{y}\right)$. On a alors

1. $OE(t, x, f, T) = OE(t, x, \hat{f}_x, T)$
2. (Principe de symétrie) Le prix $C(t, x, f, T)$ au temps t du call européen d'échéance T et de prix d'exercice K vérifie :

$$C(t, x, f, T) = OE(t, x, (\bullet - K)_+, T) = OE \left(t, x, \left(\frac{\bullet}{x}\right)^{\gamma-1} \left(x - \frac{K}{x} \bullet\right)_+, T \right).$$

Le terme de droite est souvent noté $Powerput(t, K, x, \gamma - 1, T)$.

7.2. Les options barrières

7.2.1. Un peu de vocabulaire

On appelle **option barrière** un actif conditionnel dont le payoff dépend du fait que le sous-jacent ait atteint ou non un niveau donné (la barrière) avant l'échéance.

Les options **out** expirent quand le sous-jacent touche une ou plusieurs barrières prédéterminées.

Par exemple, le **call down-and-out** de prix d'exercice K , barrière H , échéance T est l'option d'acheter le sous-jacent au prix K au temps T s'il ne descend jamais en-dessous de H .

Les options **in** s'activent quand le sous-jacent touche une ou plusieurs barrières prédéterminées.

Par exemple, le **down-and-in bond** rapporte 1 Euro à l'échéance si le sous-jacent est descendu en-dessous de H avant l'échéance.

Une option **régulière** est une option dont le payoff est nul à la barrière et au-delà. Sinon, on dit que l'option est **reverse**.

Par exemple, un **call down-and-in** de barrière B et de prix d'exercice $K \geq B$ est une option régulière.

7.2.2. Pricing d'une option up-and-in

On utilise d'abord la proposition suivante pour pricer une option up-and-in régulière.

Proposition 37 (Admis) Soit f^H le payoff d'une option up régulière de barrière H (on a donc $f(y) = 0$ si $z \geq H$). On note aussi $\hat{f}^{H,\gamma}$ la fonction donnée par $\hat{f}^{H,\gamma}(z) = \left(\frac{z}{H}\right)^\gamma f^H\left(\frac{H^2}{z}\right)$.

Si $T_H = \inf\{u \geq 0, S_u \geq H\}$,

$$E(f^H(S_T)\mathbf{1}_{\{T_H \leq T\}}) = E\left(\hat{f}^{H,\gamma}(S_T)\right).$$

Si on note $UI(t, x, f^H, T)$ le prix de l'option in associée. On a

$$UI(t, x, f^H, T) = OE(t, x, \hat{f}^{H,\gamma}, T).$$

Si l'option n'est pas régulière, on effectue d'abord la décomposition suivante : pour toute fonction f positive,

$$UI(t, x, f, T) = UI(t, x, f^H, T) + OE(t, x, f - f^H, T),$$

avec $f^H(x) = f(x)\mathbf{1}_{\{x < H\}}$, de sorte que le premier terme est le prix d'une option up-and-in régulière et le second terme celui d'une option européenne.

Chapitre 8. Pricing dans un modèle de Black-Scholes avec sauts

8.1. Définition et propriétés du processus de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}_+ suit une loi exponentielle de paramètre λ si la densité de sa loi est donnée par $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

On dit qu'une variable aléatoire Y à valeurs dans \mathbb{N} suit une loi de Poisson de paramètre λ si pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On dit que $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ (ou d'intensité λ) si cette famille de variables aléatoires vérifient :

1. $Y_0 = 0$,
2. pour tous $t, s \geq 0$, $Y_{t+s} - Y_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t := \sigma(Y_u, u \leq t)$,
3. $Y_{t+s} - Y_t$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t - s)$.

On peut construire un tel processus à partir d'une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre λ .

Proposition 38 Soit $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre λ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{S_n \leq t}$.

Alors $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ .

On dit que les variables aléatoires $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont les instants de sauts du processus $(N_t)_{t \geq 0}$.

8.2. Description du modèle et premières conséquences

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel on définit :

- un mouvement brownien standard $(B_t)_{t \geq 0}$
- un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ ,
- une suite $(U_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi ν , à valeurs dans $] -1, \infty[$, telles que $E(U_1^2) < \infty$,

les trois familles étant indépendantes.

On définit de la façon suivante une filtration compatible avec les trois processus : pour tout $t \geq 0$, on pose $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s, N_s, s \leq t; U_j \mathbf{1}_{j \leq N_t}, j \geq 1)$, de sorte que $(B_t)_{t \geq 0}$ est bien un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ mouvement brownien et pour tout $t, s \geq 0$, $N_{t+s} - N_t$ est indépendant de \mathcal{F}_t .

Le modèle contient un actif sans risque S^0 qui est toujours donné par $S_t^0 = e^{rt}$, pour tout $t \geq 0$ et un actif dont on décrit l'évolution du prix par un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ adapté, continu à droite. On supposera que $E(X_0^2) < \infty$.

Si les $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont les instants de sauts du processus $(N_t)_{t \geq 0}$, on supposera que sur les intervalles $[T_j, T_{j+1}[$, $(X_t)_{t \geq 0}$ est solution de l'EDS $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$;

enfin pour tout $j \geq 1$, $X_{T_j} = X_{T_j^-} U_j$, où $X_{T_j^-}(\omega) = \lim_{t \uparrow T_j(\omega)} X_t(\omega)$, pour tout $\omega \in \Omega$.

On peut écrire le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ de la façon suivante :

Proposition 39 Pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t} \prod_{j=1}^{N_t} (1 + U_j).$$

On a aussi la propriété très importante suivante :

Proposition 40 Si $\mu = r - \lambda E(U_1)$, alors le processus $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$, où, pour tout $t \geq 0$, $\tilde{X}_t = e^{-rt} X_t$, est une martingale de carré intégrable.

La démonstration de cette proposition utilise le lemme suivant :

Lemme 41 Pour tout $S \geq 0$, les tribus $\mathcal{G}_s := \sigma(U_{N_s+j}, j \geq 1)$ et \mathcal{F}_s sont indépendantes.

8.3. Evaluation et couverture des options

8.3.1. Stratégies admissibles

Une stratégie admissible est un couple de processus $(J_t, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ adaptés, continus à gauche, tels que \mathbb{P} -p.s. $\int_0^T |J_s| ds < \infty$ et $E\left(\int_0^T H_s^2 X_s^2 ds\right) < \infty$ et pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$V_t := J_t e^{rt} + H_t X_t = V_0 + \int_0^t J_s r e^{rs} ds + \int_0^t \mu H_s X_s ds + \int_0^t \sigma H_s X_s dB_s + \sum_{j=1}^{N_t} H_{T_j} U_j X_{T_j^-}.$$

Proposition 42 Soit $V_0 \in \mathbb{R}$ (déterministe) et $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus adapté, continu à gauche, tel que $E\left(\int_0^T H_s^2 X_s^2 ds\right) < \infty$.

Il existe un unique processus $(J_t)_{0 \leq t \leq T}$ tel que le couple $(J_t, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ forme une stratégie admissible de valeur initiale V_0 .

La valeur actualisée du portefeuille correspondant à l'instant $t \in [0, T]$ est donné par

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_s \tilde{X}_s \sigma dB_s + \sum_{j=1}^{N_t} H_{T_j} U_j \tilde{X}_{T_j^-} - \lambda E(U_1) \int_0^t \mu H_s \tilde{X}_s ds.$$

8.3.2. Pricing des options européennes

Soit h une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable. On cherche à minimiser le risque quadratique de défaut de couverture $R_0^T := E((e^{-rT}(h - V_T))^2)$. On peut vérifier que si $(\tilde{V}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale telle que R_0^T soit minimale, alors pour tout $t \in [0, T]$,

$$V_t = E(e^{-r(T-t)}h | \mathcal{F}_t).$$

Pour les options européennes, on a $h = f(X_T)$ avec f une fonction positive.

Proposition 43 Avec les notations précédentes,

$$E(e^{-r(T-t)}f(X_T) | \mathcal{F}_t) = G(t, X_t),$$

où

$$G(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} \lambda^n (T-t)^n}{n!} E \left(F(t, xe^{-\lambda(T-t)E(U_1)}) \prod_{j=1}^n (1 + U_j) \right),$$

avec F la fonction utilisée pour le pricing dans le modèle de Black-Scholes standard, soit,

$$F(t, x) = E \left(e^{-r(T-t)} f \left(xe^{\sigma B_{T-t} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \right) \right).$$

8.3.3. Couverture des options européennes

Proposition 44 (Montré seulement en partie) Avec les notations précédentes, si $(V_t)_{0 \leq t \leq T}$ correspond à une stratégie admissible de valeur initiale $V_0 = E(e^{-rT}f(X_T)) = G(0, X_0)$, déterminée par un processus $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$, alors le risque quadratique à l'échéance est donné par :

$$R_0^T = E \left(\int_0^T \left(\frac{\partial G}{\partial x}(s, X_s) - H_s \right)^2 \tilde{X}_s \sigma^2 ds + \int_0^T \lambda \int dv(z) e^{-2rs} (G(s, X_s(1+z)) - G(s, X_s) - H_s z X_s)^2 ds \right).$$

On peut donner au moins deux corollaires importants de cette proposition :

Corollaire 45 (Admis) Le risque minimal est donné par la stratégie pour laquelle, pour tout $t \in [0, T]$, $H_t = \Delta(t, X_{t-})$ avec

$$\Delta(t, x) = \frac{1}{\sigma^2 + \lambda \int z^2 dv(z)} \left(\sigma^2 \frac{\partial G}{\partial x}(t, x) + \lambda \int z dv(z) \frac{G(t, x(1+z)) - G(t, x)}{x} \right).$$

On peut alors vérifier que $E(\int_0^T H_s^2 \tilde{X}_s^2 ds) < \infty$.

Corollaire 46 (Admis) Si on suppose que $\sigma > 0, \lambda > 0$ et $\mathbb{P}(U_1 \neq 0) > 0$, alors il n'existe pas de couverture parfaite (ie pour toute stratégie, $R_0^T > 0$).