

---

## INTERROGATION

29 mars 2017

[ durée : 1 heure ]

---

*Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.*

**Exercice 1** Dans un lot de 100 composants électroniques, il y a deux composants défectueux. On prélève au hasard sans remise  $n$  composants dans ce lot et on note  $X$  le nombre de composants défectueux parmi les  $n$  prélevés.

- On suppose que  $2 \leq n \leq 98$ . Donner la loi de  $X$ .
- Exprimer le plus simplement possible  $P(X = 2)$  lorsque  $2 \leq n \leq 98$ .
- Quelle est la loi de  $X$  si  $n = 100$  ?
- Je choisis un composant au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?
- En déduire la loi de  $X$  si  $n = 1$ .
- En déduire aussi la loi de  $X$  si  $n = 99$ .

### Exercice 2

On s'intéresse à la reproduction d'un insecte. On suppose que chacun de ses œufs donne naissance à un nouvel insecte avec une probabilité  $p \in ]0, 1[$ , indépendamment du nombre d'œufs pondus et de l'éclosion des autres œufs.

- Si l'insecte a pondu 5 œufs, quelle est la probabilité qu'exactly 3 insectes éclosent ?

On note maintenant  $N$  la variable aléatoire comptant le nombre d'œufs qu'un insecte donné pond. On suppose que  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . On note  $D$  le nombre d'insectes éclos.

- Quelle est la loi de  $D$  sachant que  $\{N = n\}$  avec  $n \geq 1$  ?
- En déduire que pour tout  $(n, d) \in \mathbb{N}^2$

$$P(D = d \text{ et } N = n) = \begin{cases} 0 & \text{si } d > n \\ \frac{(\lambda p)^d}{d!} e^{-\lambda} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-d}}{(n-d)!} & \text{si } d \leq n \end{cases} .$$

d) Démontrer que  $D$  suit une loi de Poisson de paramètre  $p\lambda$ .

e) On suppose dans cette question que le produit  $p\lambda$  est égal à 1. Soit  $E$  la variable

$$E = \begin{cases} \text{« peu »} & \text{si } D < 4 \\ \text{« beaucoup »} & \text{sinon} \end{cases} .$$

Déterminer la loi de  $E$ .