Un processus de Markov à spectre de singularités aléatoire

Stéphane Seuret, Université Paris-Est

Journées de Probabilités, Lille, 1-5 Septembre 2008

Préliminaire

- **Exposants de régularité d'une fonction (ou d'une trajectoire):**

Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement bornée. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$.
On dit que $X \in C^\alpha_{t_0}$ si et seulement si

$$|X(t) - X(t_0)| \leq C|t-t_0|^\alpha \text{ pour } t \text{ proche de } t_0.$$

Alors

$$h_X(t_0) = \sup\left\{\alpha \geq 0 : X \in C^\alpha_{t_0}\right\} \quad \left(= \liminf_{t \to t_0} \frac{\log|X(t)-X(t_0)|}{\log|t-t_0|}\right)$$

- **Spectre multifractal:**

$$d_X : h \mapsto \dim\left(E^X_h\right) \text{ où } E^X_h = \{t : h_X(t) = h\}.$$

où

- dim est la dimension de Hausdorff.
- Ce spectre décrit la répartition géométrique des singularités.

1. Introduction

Nous allons étudier les propriétés de régularité locale de deux processus:

1. Un processus de Lévy $(X_t)_{t\geq 0}$ de paramètre $\beta \in (0,1)$ (Jaffard 99)
2. Un exemple simple $(M_t)_{t\geq 0}$ de processus de Markov croissant.

Résultats:

1. Subordinateur de Lévy $(X_t)_{t\geq 0}$: spectre linéaire croissant, déterministe, de pente β.
2. Processus de Markov croissant $(M_t)_{t\geq 0}$: spectre aléatoire, obtenu comme supremum d'une infinité de spectres eux-mêmes aléatoires.

2. Régularité locale d'un subordinateur de Lévy

$X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements stationnaires et indépendants, de fonction caractéristique $\mathbb{E}\big(e^{i\langle\lambda|X_t\rangle}\big) = e^{-t\psi(\lambda)}$, avec

$$\psi(\lambda) = i\langle a|\lambda\rangle + Q(\lambda)/2 + \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - e^{i\langle\lambda|x\rangle} + i\langle\lambda|x\rangle \mathbf{1}_{|x|\leq 1}\right) \nu(dx)$$

où ν est la mesure de Lévy de X et satisfait

$$\int (1 \wedge |x|^2)\nu(dx) < \infty.$$

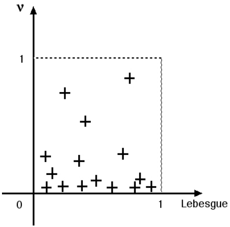
On peut alors définir l'indice de Blumenthal-Getoor de X par

$$\beta = \inf\left\{\gamma \geq 0 : \int_{|x|\leq 1} |x|^{\gamma}\nu(dx) < \infty\right\}.$$

On a toujours $\beta \in [0, 2]$.

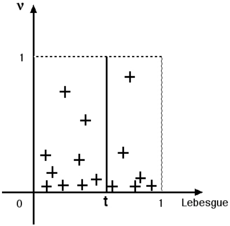
Nos simplifications (pour l'exposé):

- On se restreint à l'étude sur l'intervalle $[0, 1]$,
- $\beta < 1$,
- Pas de compensation $a = 0$, Pas de partie Brownienne $Q = 0$ (les prendre en compte est facile plus tard).
- Que des sauts positifs.
- Régularité locale $\Rightarrow$ on oublie le "compound" processus de Poisson de mesure de Lévy $\nu(dx)\,\mathbb{1}_{x\geq 1}$ (p.s. nombre fini de sauts sur tout intervalle borné).



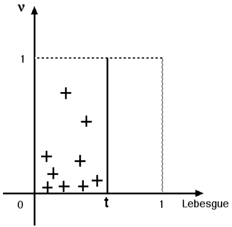
Nos simplifications (pour l'exposé):

- On se restreint à l'étude sur l'intervalle $[0, 1]$,
- $\beta < 1$,
- Pas de compensation $a = 0$, Pas de partie Brownienne $Q = 0$ (les prendre en compte est facile plus tard).
- Que des sauts positifs.
- Régularité locale $\Rightarrow$ on oublie le "compound" processus de Poisson de mesure de Lévy $\nu(dx)\, 1\!\!1_{x\geq 1}$ (p.s. nombre fini de sauts sur tout intervalle borné).



Nos simplifications (pour l'exposé):

- On se restreint à l'étude sur l'intervalle $[0, 1]$,
- $\beta < 1$,
- Pas de compensation $a = 0$, Pas de partie Brownienne $Q = 0$ (les prendre en compte est facile plus tard).
- Que des sauts positifs.
- Régularité locale $\Rightarrow$ on oublie le "compound" processus de Poisson de mesure de Lévy $\nu(dx)\, \mathbb{1}_{x \geq 1}$ (p.s. nombre fini de sauts sur tout intervalle borné).



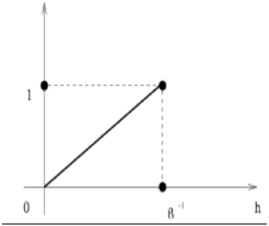
Résultat:

(Par convention, dim $E = -\infty$ signifie que E est vide.)

Théorème (Jaffard,1999)

Soit X un subordinateur croissant comme précédemment, avec $\beta \in (0,1)$. Presque sûrement, on a

$$\begin{aligned} d_X(h) &= \beta h \quad \text{si} \quad h \in [0, 1/\beta] \\ &= -\infty \quad \text{si} \quad h > 1/\beta. \end{aligned}$$



Recouvrement de l'intervalle $[0, 1]$:

$\mathcal{S} = \{(T_n, \lambda_n)\}_{n\geq 0}$ le processus de Poisson ponctuel d'intensité $\ell \otimes \nu$ sur $[0, 1]^2$.

Pour tout $j \geq 1$, considérons les points de sauts de taille $\sim 2^{-j}$:

$$G_j = \{T_n : (T_n, \lambda_n) \in \mathcal{S} \text{ pour un } \lambda_n \text{ tel que } \lambda_n \in (2^{-(j+1)}, 2^{-j}]\}.$$

On a $\beta = \limsup_{j\to+\infty} \dfrac{\log_2 \# G_j}{j}$: il y a $\sim 2^{\beta j}$ points de sauts de taille $\sim 2^{-j}$.

Recouvrement de l'intervalle $[0,1]$:

$\mathcal{S} = \{(T_n, \lambda_n)\}_{n\geq 0}$ le processus de Poisson ponctuel d'intensité $\ell \otimes \nu$ sur $[0,1]^2$.

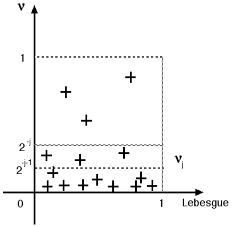
Pour tout $j \geq 1$, considérons les points de sauts de taille $\sim 2^{-j}$:

$$G_j = \{T_n : (T_n, \lambda_n) \in \mathcal{S} \text{ pour un } \lambda_n \text{ tel que } \lambda_n \in (2^{-(j+1)}, 2^{-j}]\}.$$

On a $\beta = \limsup_{j\to+\infty} \dfrac{\log_2 \#G_j}{j}$: il y a $\sim 2^{\beta j}$ points de sauts de taille $\sim 2^{-j}$.

Posons pour tout $j \geq 1$ et pour tout $\gamma > 0$,

$$A_\gamma^j = \bigcup_{T_n \in G_j} B(T_n, 2^{-(j+1)\gamma})$$



Recouvrement de l'intervalle $[0,1]$:

$\mathcal{S} = \{(T_n, \lambda_n)\}_{n\geq 0}$ le processus de Poisson ponctuel d'intensité $\ell \otimes \nu$ sur $[0,1]^2$.

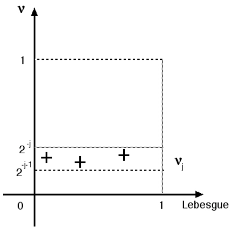
Pour tout $j \geq 1$, considérons les points de sauts de taille $\sim 2^{-j}$:

$$G_j = \{T_n : (T_n, \lambda_n) \in \mathcal{S} \text{ pour un } \lambda_n \text{ tel que } \lambda_n \in (2^{-(j+1)}, 2^{-j}]\}.$$

On a $\beta = \limsup_{j\to+\infty} \dfrac{\log_2 \# G_j}{j}$: il y a $\sim 2^{\beta j}$ points de sauts de taille $\sim 2^{-j}$.

Posons pour tout $j \geq 1$ et pour tout $\gamma > 0$,

$$A_\gamma^j = \bigcup_{T_n \in G_j} B(T_n, 2^{-(j+1)\gamma})$$



Recouvrement de l'intervalle $[0,1]$:

$\mathcal{S} = \{(T_n, \lambda_n)\}_{n\geq 0}$ le processus de Poisson ponctuel d'intensité $\ell \otimes \nu$ sur $[0,1]^2$.

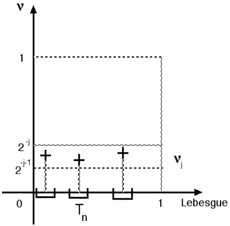
Pour tout $j \geq 1$, considérons les points de sauts de taille $\sim 2^{-j}$:

$$G_j = \{T_n : (T_n, \lambda_n) \in \mathcal{S} \text{ pour un } \lambda_n \text{ tel que } \lambda_n \in (2^{-(j+1)}, 2^{-j}]\}.$$

On a $\beta = \limsup_{j\to+\infty} \dfrac{\log_2 \#G_j}{j}$: il y a $\sim 2^{\beta j}$ points de sauts de taille $\sim 2^{-j}$.

Posons pour tout $j \geq 1$ et pour tout $\gamma > 0$,

$$A_\gamma^j = \bigcup_{T_n \in G_j} B(T_n, 2^{-(j+1)\gamma})$$



Recouvrement de l'intervalle $[0,1]$:

Pour toute suite $\widetilde{\gamma} = (\gamma_j)_{j\geq 1}$, on s'intéresse à

$$\mathbf{A}_{\widetilde{\gamma}} = \limsup_{\mathbf{j}\to+\infty} \mathbf{A}^{\mathbf{j}}_{\gamma_{\mathbf{j}}} = \bigcap_{\mathbf{J}\geq\mathbf{1}} \bigcup_{\mathbf{j}\geq\mathbf{J}} \mathbf{A}^{\mathbf{j}}_{\gamma_{\mathbf{j}}}.$$

Clairement $A^j_\gamma \subset \bigcup_{T_n\in G_j} B(T_n, |\lambda_n|^\gamma)$.

Remarque importante: Il y a intuitivement $\sim 2^{\beta j}$ points de sauts dans G_j (car $\beta = \limsup_{j\to+\infty} \dfrac{\log_2 \# G_j}{-j}$.)

Intuitivement, si on prend $\widetilde{\gamma} \sim \beta$, on recouvre tout l'intervalle $[0,1]$.

Lemme

Presque sûrement il existe une suite $\widetilde{\beta} = (\beta_j)_{j\geq 1}$ *croissante vers* β *telle que*

$$A_{\widetilde{\beta}} = \limsup_{j\to+\infty} A^j_{\beta_j} = [0,1].$$

Donc p.s. **tout point** $t \in [0,1]$ appartient à une infinité de boules $B(T_n, (\lambda_n)^{\widetilde{\beta}_n})$, où $\widetilde{\beta}_n = \beta - \varepsilon_n$, avec $(\varepsilon_n) \to 0^+$.

Lemme

Presque sûrement il existe une suite $\widetilde{\beta} = (\beta_j)_{j\geq 1}$ *croissante vers* β *telle que*

$$A_{\widetilde{\beta}} = \limsup_{j\to+\infty} A^j_{\beta_j} = [0,1].$$

Donc p.s. **tout point** $t \in [0,1]$ appartient à une infinité de boules $B(T_n, (\lambda_n)^{\widetilde{\beta}_n})$, où $\widetilde{\beta}_n = \beta - \varepsilon_n$, avec $(\varepsilon_n) \to 0^+$.

Théorème

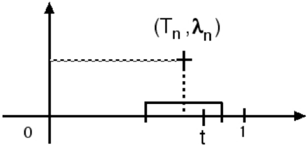
Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables i.i.d. unif. réparties sur* $[0,1]$*, et* $(l_n)_{n\geq 1}$ *une suite positive décroissante. Alors* $\bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} B(T_n, l_n) = [0,1]$ *p.s. si et seulement si*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \exp\left(l_1 + l_2 + ... + l_n\right) = +\infty.$$

Lien avec la régularité locale de X (1):

Si $t \in B(T_n, (\lambda_n)^{\widetilde{\beta}_n})$, alors

$$X_{t+(\lambda_n)^{\widetilde{\beta}_n}} - X_t \geq \lambda_n \quad \text{ou} \quad X_t - X_{t-(\lambda_n)^{\widetilde{\beta}_n}} \geq \lambda_n.$$



À t fixé, cela se produit pour une infinité de n, donc

$$\begin{aligned} h_X(t) &= \liminf_{t'\to t} \frac{\log|X_{t'} - X_t|}{\log|t'-t|} \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{\log|X_{t\pm(\lambda_n)^{\widetilde{\beta}_n}} - X_t|}{\log(\lambda_n)^{\widetilde{\beta}_n}} \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{\log \lambda_n}{\log(\lambda_n)^{\widetilde{\beta}_n}} = \liminf_{n\to+\infty} 1/\widetilde{\beta}_n = 1/\beta. \end{aligned}$$

Cela se produit presque sûrement pour tout $t \in [0,1]$, ainsi

$$\text{pour tout } t \in [0,1], \quad h_X(t) \leq \frac{1}{\beta}.$$

Lien avec la régularité locale de X (2):

Définition

Soit $t \in [0,1]$. Le taux d'approximation de t par le processus de Poisson $\mathcal{S}$ est

$$\delta_t = \sup\left\{\delta \geq 1 : \ t \in A_{\delta\widetilde{\beta}} = \bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N} B(T_n, (\lambda_n)^{\delta\widetilde{\beta}_n})\right\}.$$

Par construction, presque sûrement, pour tout t, $\delta_t \geq 1$.

Comme auparavant, si $T_n \in G_j$ et $t \in B(T_n, (\lambda_n)^{(\delta_t-\varepsilon)\widetilde{\beta}_n})$, alors

$$X_{t+(\lambda_n)^{(\delta_t-\varepsilon)\widetilde{\beta}_n}} - X_t \geq \lambda_n \quad \text{ou} \quad X_t - X_{t-(\lambda_n)^{(\delta_t-\varepsilon)\widetilde{\beta}_n}} \geq \lambda_n.$$

À t fixé, cela se produit pour une infinité de n, donc

$$\text{p.s. pour tout } t \in [0,1], \ \ h_X(t) = \liminf_{t'\to t} \frac{\log|X_{t'} - X_t|}{\log|t'-t|} \leq \frac{1}{\delta_t \cdot \beta}.$$

Lien avec la régularité locale de X (3):

Proposition

Presque sûrement, pour tout $t \in [0,1]$ qui n'est pas un point de saut du subordinateur X, on a

$$h_X(t) = \liminf_{t' \to t} \frac{\log |X_{t'} - X_t|}{\log |t' - t|} = \frac{1}{\delta_t \cdot \beta}.$$

Si t est un point de saut, $h_X(t) = 0$.

Propriété fondamentale:

La régularité locale de X au temps t est régie par le taux d'approximation de t par la famille d'intervalles aléatoires poissoniens.

Calcul du spectre: Théorie de l'Ubiquité d'ensembles limsup

Soit $h \in (0, 1/\beta]$. Alors

$$E_h^X = \{t : h_X(t) = h\} = \left\{t : \frac{1}{\delta_t \cdot \beta} = h\right\} = \left\{t : \delta_t = \frac{1}{h \cdot \beta}\right\}.$$

Donc

$$d_X(h) = \dim \left\{t : \delta_t = \frac{1}{h \cdot \beta}\right\}.$$

Calcul du spectre: Théorie de l'Ubiquité d'ensembles limsup

Soit $h \in (0, 1/\beta]$. Alors

$$E_h^X = \{t : h_X(t) = h\} = \left\{t : \frac{1}{\delta_t \cdot \beta} = h\right\} = \left\{t : \delta_t = \frac{1}{h \cdot \beta}\right\}.$$

Donc

$$d_X(h) = \dim \left\{t : \delta_t = \frac{1}{h \cdot \beta}\right\}.$$

Le lien avec les ensembles $A_{\delta \widetilde{\beta}}$ précédents est :

$$E_h^X = \bigcap_{\delta' < \frac{1}{h\beta}} A_{\delta' \widetilde{\beta}} \setminus \bigcup_{\delta' > \frac{1}{h\beta}} A_{\delta' \widetilde{\beta}}.$$

(si $t \in A_{\delta' \widetilde{\beta}}$, alors $\delta_t \geq \delta'$)

Donc on cherche à majorer $\dim A_{\delta' \widetilde{\beta}}$ et minorer $\dim A_{\delta \widetilde{\beta}} \setminus \bigcup_{\delta' > \delta} A_{\delta' \widetilde{\beta}}$.

Majoration de la dimension de $A_{\delta\widetilde{\beta}}$:

Ca se fait ... bien ..... (classique argument de recouvrement).

On trouve

$$\dim(A_{\delta\widetilde{\beta}}) \leq 1/\delta$$

d'où on déduit

$$\dim(E_h^X) \leq h\beta.$$

(on utilise $(h = \frac{1}{\delta\beta}) \Longleftrightarrow (1/\delta = h\beta)$)

Minoration de la dimension de $A_{\delta\widetilde{\beta}}$:

Théorème (Dodson, Melian, Pestana, Velani, Jaffard)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points dans $\mathbb{R}$ et $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive décroissante.
Posons, pour tout $\delta \geq 1$,

$$S_\delta = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} B(x_n, (l_n)^\delta).$$

Si $\ell(S_1) = 1$, alors pour tout $\delta > 1$ on a la propriété suivante:

Il existe une mesure m_δ à support dans S_δ telle que $m_\delta(E) = 0$ pour tout ensemble E de dimension de Hausdorff plus petite que $1/\delta$.

Comme $m_\delta(S_\delta) = 1$, $\dim(S_\delta) \geq 1/\delta$.

C'est un théorème déterministe. On l'applique à la famille des ensembles $A_{\delta\widetilde{\beta}}$, pour laquelle on sait que p.s. $A_{\widetilde{\beta}} = [0, 1]$.

3. Un exemple de processus de Markov croissant à spectre aléatoire

(J. Barral, N. Fournier, S. Jaffard, S.S.)

Motivation:

- Généralisation naturelle des Lévy,
- Utiliser la non-uniformité (non-homogénéité) en temps pour créer de l'aléa dans le spectre.

Idée(s):

- Faire dépendre l'indice de régularité (par l'intermédiaire du générateur infinitésimal du Markov M_t) du temps t,

  (pas vraiment suffisant)

3. Un exemple de processus de Markov croissant à spectre aléatoire

(J. Barral, N. Fournier, S. Jaffard, S.S.)

Motivation:

- Généralisation naturelle des Lévy,
- Utiliser la non-uniformité (non-homogénéité) en temps pour créer de l'aléa dans le spectre.

Idée(s):

- Faire dépendre l'indice de régularité (par l'intermédiaire du générateur infinitésimal du Markov M_t) du temps t,

  (pas vraiment suffisant)
- Faire dépendre aléatoirement l'indice du Markov M_t du temps t: le faire dépendre de la valeur de M_t.

Forme générale d'un Processus de Markov

$M = (M_t)_{t\in[0,1]}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que $M_0 = 0$ de générateur $\mathcal{L}$, défini par:
Pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ régulière et $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbb{E}_y(\phi(M_t)))_{|t=0} := \mathcal{L}\phi(y) \quad &= \quad \sigma^2(y)\phi''(y) + b(y)\phi'(y) \\ &\quad + \int_{|u|\leq 1} \left[\phi(y+u) - \phi(y) - u\phi'(y)\right] \nu(y,du) \\ &\quad + \int_{|u|>1} \left[\phi(y+u) - \phi(y)\right] \nu(y,du), \end{aligned}$$

où:

- $(\nu(y,du))_{y\in\mathbb{R}}$ est une famille de mesures sur $\mathbb{R}$,
- $\int_{\mathbb{R}}(u^2 \wedge 1)\nu(y,du) < \infty$ pour tout $y \in \mathbb{R}$,
- σ et b sont des fonctions réelles.

Pour toute mesure μ on pose

$$\beta_\mu := \inf\left\{\alpha \geq 0; \int_{-1}^{1} |y|^\alpha \mu(dy) < \infty\right\} \in [0,2].$$

Mêmes simplifications que pour le subordinateur de Lévy:

- $\sigma = b = 0$,
- Sauts positifs: $\nu(y, (-\infty, 0]) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$,
- On néglige les (quelques) sauts trop grands: $\nu(y, [1, +\infty]) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$,
- M est à variations finies: $\displaystyle\int_0^1 u \cdot \nu(y, du) < \infty$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.
  Cela implique que $0 < \beta_{\nu(y,.)} < 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$,

Pour faciliter les calculs:

Definition

Soit $\gamma : \mathbb{R}^+ \to (\varepsilon, 1-\varepsilon)$ une fonction Lipshitz **croissante**.
On considère la famille de mesures

$$\nu(y, du) := \gamma(y) u^{-1-\gamma(y)} \mathbb{1}_{[0,1]}(u) du,$$

de sorte que pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, $\beta_{\nu(y,.)} = \gamma(y)$.

Écriture poissonnienne du processus:

Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. $\sim$ Unif($[0,1]$).
Soit $(P_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. $\sim Exp(1)$, et $Z_n = P_1 + P_2 + ... + P_n$
Alors la mesure aléatoire

$$N(ds,dz) = \sum_{n\geq 1} \delta_{(T_n,Z_n)}(ds,dz)$$

est une mesure de Poisson sur $[0,1]\times\mathbb{R}^+$ d'intensité $ds\,dz$.
Notons $\mathcal{F}_t := \sigma(\{N(A), A\in\mathcal{B}([0,t]\times[0,\infty))\})$ la filtration asociée. Posons

$$G(\beta,z) := (1+z)^{-1/\beta}.$$

Proposition

Il existe un unique processus de Markov fort $M=(M_t)_{t\in[0,1]}$, issu de 0, càdlàg, associé à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ solution de l'équation

$$M_t = \int_0^t \int_0^{+\infty} G(\gamma(M_{s-}),z)N(ds,dz).$$

On constate alors que le générateur de M est bien:

$$\forall y,\ \forall\phi \text{ Lipschitz},\ \mathcal{L}\phi(y) = \int_0^1 [\phi(y+u)-\phi(y)]\gamma(y)u^{-1-\gamma(y)}1\!\!1_{[0,1]}(u)du.$$

Écriture poissonnienne du processus:

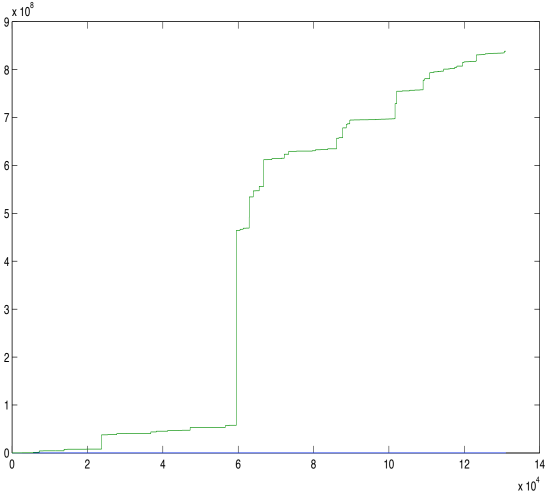
$M = (M_t)_{t\in[0,1]}$ vérifie

$$M_t = \int_0^t \int_0^{+\infty} G(\gamma(M_{s-}), z) N(ds, dz).$$

La mesure de Poisson est discrète, ainsi on a

$$\begin{aligned} M_t &= \sum_{(T_n, Z_n): T_n \leq t} G(\gamma(M_{T_n^-}), Z_n) \\ &= \sum_{(T_n, Z_n): T_n \leq t} (1 + Z_n)^{1/\gamma(M_{T_n^-})}. \end{aligned}$$

La taille du saut de M en T_n dépend de la trajectoire de M avant T_n.

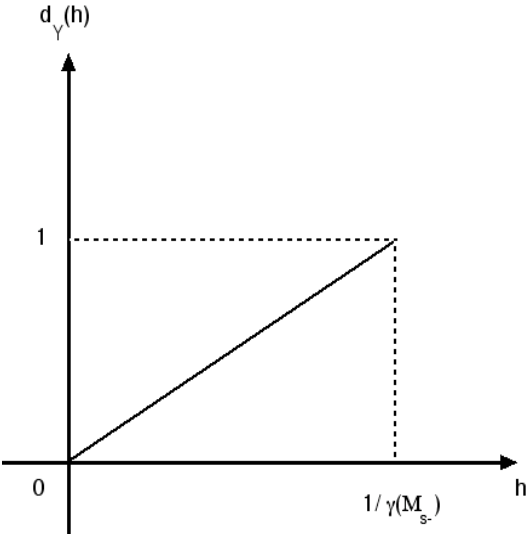

x 10^8
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
2
4
6
8
10
12
14
x 10^4

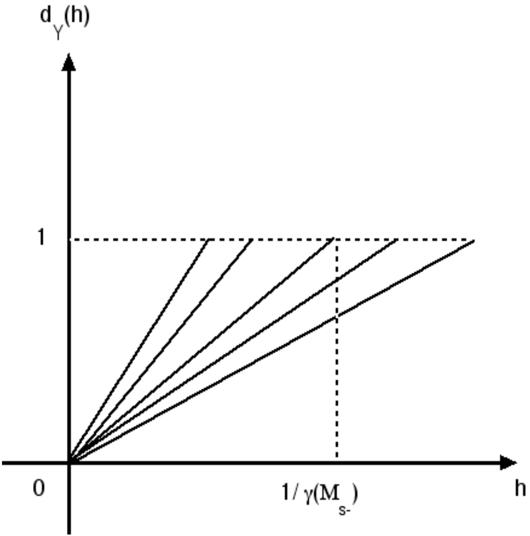
Théorème

Soit M le processus précédent, réécrit sous forme de processus à sauts. L'ensemble (aléatoire) des sauts est noté $\mathcal{S} = \{s \in [0,1] : \Delta M(s) \neq 0\}$.

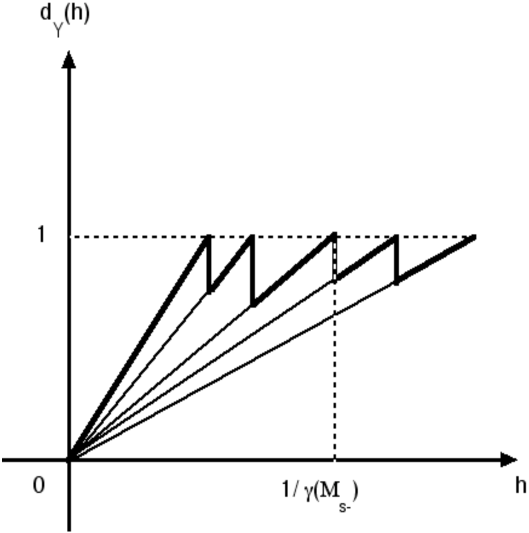
Presque sûrement:

1. *Pour tout $h \in \left[0, \dfrac{1}{\gamma(0)}\right)$,*
$$d_M(h) = h \cdot \sup \Big\{ \gamma(M_{s-}) : \ s \in \mathcal{S} \text{ tel que } \ h \cdot \gamma(M_{s-}) < 1 \Big\}.$$
2. *En particulier, si $h \in \left(\dfrac{1}{\gamma(M_s)}, \dfrac{1}{\gamma(M_{s-})} \right)$ pour un certain $s \in \mathcal{S}$, alors*
$$d_M(h) = h \cdot \gamma(M_{s-}).$$
3. $E^M_{\frac{1}{\gamma(0)}} \subset \{0\}$ *et* $E^M_h = \emptyset$ *si* $h > \dfrac{1}{\gamma(0)}$.
4. *pour Lebesgue-presque tout $t \in [0,1]$, $h_M(t) = \dfrac{1}{\gamma(M_t)}$.*


d_γ(h)
1
0
h
1/γ(M_s-)



$d_\gamma(h)$
1
0
$1/\gamma(M_{s-})$
h


d_γ(h)
1
0
1/γ(M_s-)
h

Proposition

Presque sûrement, pour tout $t \in [0,1]$ qui n'est pas un point de saut de M, on a:

$$h_M(t) = \frac{1}{\gamma(M_t) \cdot \delta_t}.$$

Important: le δ_t est celui associé au processus de Poisson $(T_n, 1/Z_n)$ qui est d'intensité $ds \times \frac{dz}{z^2}$ (comme pour un subordinateur d'indice 1), et est indépendant de la fonction γ.

Comme $\delta_t = 1$ pour presque tout $t \in [0,1]$, on trouve:

$$\text{presque sûrement, pour presque tout } t \in [0,1],\ h_M(t) = \frac{1}{\gamma(M_t)}.$$

Majoration du spectre:

Pareil qu'avant, un peu plus malin...

4. Un théorème d'ubiquité localisée pour minorer le spectre

(J. Barral, S.S.)

Minoration du spectre (1):

On a vu que

$$\text{presque sûrement, pour tout } t \in [0,1],\ h_M(t) = \frac{1}{\delta_t \cdot \gamma(M_t)}.$$

Pour calculer le spectre, on doit donc trouver la dimension de

$$E_M^h = \left\{ t \in [0,1] : h = \frac{1}{\delta_t \cdot \gamma(M_t)} \right\} = \left\{ t \in [0,1] : \delta_t = \frac{1}{h \cdot \gamma(M_t)} \right\}.$$

4. Un théorème d'ubiquité localisée pour minorer le spectre

(J. Barral, S.S.)

Minoration du spectre (1):

On a vu que

$$\text{presque sûrement, pour tout } t \in [0,1],\ h_M(t) = \frac{1}{\delta_t \cdot \gamma(M_t)}.$$

Pour calculer le spectre, on doit donc trouver la dimension de

$$E_M^h = \left\{ t \in [0,1] : h = \frac{1}{\delta_t \cdot \gamma(M_t)} \right\} = \left\{ t \in [0,1] : \delta_t = \frac{1}{h \cdot \gamma(M_t)} \right\}.$$

!!! $t \mapsto \delta_t$ est une fonction compliquée et $\gamma(M_t)$ n'est plus constant !!!

Comme $\varepsilon < \gamma(x) < 1 - \varepsilon$, on peut réécrire l'ensemble précédent sous la forme

$$E_f = \{ t \in [0,1] : \delta_t = f(t) \},$$

où $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}_+^*$ est une fonction strictement décroissante.

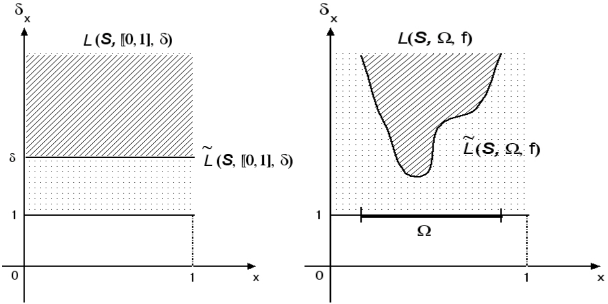
Théorème

Soit $\mathcal{S} = \{(T_n, l_n)\}_{n\geq 1}$ *un système de points dans* $[0,1]$*, et* f *une fonction strictement décroissante (ou continue) sur* $[0,1]$ *à valeurs dans* $[1,+\infty)$*. Soit* Ω *un compact connexe de* $[0,1]$*, tel que* $\overline{\mathring{\Omega}} = \Omega$*, et considérons les ensembles de* $[0,1]$

$$L(\Omega, f) = \{t \in \Omega : \ \delta_t \geq f(t)\} \quad \text{et} \quad \widetilde{L}(\Omega, f) = \{t \in \Omega : \ \delta_t = f(t)\} \tag{1}$$

Alors

$$\dim_{\mathcal{H}} L(\Omega, f) = \dim_{\mathcal{H}} \widetilde{L}(\Omega, f) = \frac{1}{\inf\{f(t) : t \in \Omega\}}. \tag{2}$$



Applications:

avec le système rationnel $\mathcal{R}$ ou le système de Poisson $\mathcal{P}$ (dans ce cas les résultats sont presque sûrs):

$$\begin{aligned} \forall\ \alpha \geq 1, \quad \dim_{\mathcal{H}}\ \Big\{t \in (0,1] : \delta_t = \alpha/t\Big\} &= 1/\alpha, \\ \dim_{\mathcal{H}}\ \Big\{t \in [1/4, 3/4] : \delta_t = 2 \cdot \sin(\pi t)\Big\} &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \text{et} \quad \dim_{\mathcal{H}}\ \Big\{t \in (0,1) : \delta_t = 2 \cdot \sin(\pi t)\Big\} &= 1. \end{aligned}$$

Dans ces égalités, la dimension de l'ensemble dépend de l'intervalle des t que l'on considère. Cela est sans surprise, les définitions faisant intervenir les différentes valeurs de la fonction f.

Conclusion:

- Premier processus "naturel" à spectre vraiment aléatoire.
- On peut améliorer le modèle de Markov.
- Lien fondamental entre les résultats et les problèmes de recouvrement de l'intervalle par des intervalles aléatoires.
- Chaque avancée est conditionnée par un nouveau théorème d'"ubiquité".