

Simulation d'une classe de processus stables

Matthieu Marouby
Université Paul Sabatier

Journées de probabilités
Jeudi 4 Septembre 2008

Overview

- 1 A propos de cette classe de processus
 - Définition
 - Objectif & Outils
- 2 Résultats
 - Représentation sous forme de séries
 - Résultats
- 3 A propos des séries de Shot-Noise
 - A propos du reste
 - Erreur d'approximation
- 4 En approchant le temps local
 - Erreur "théorique"
 - Erreur d'intégration
 - Conclusion
- 5 Simulations

Overview

- 1 A propos de cette classe de processus
 - Définition
 - Objectif & Outils
- 2 Résultats
 - Représentation sous forme de séries
 - Résultats
- 3 A propos des séries de Shot-Noise
 - A propos du reste
 - Erreur d'approximation
- 4 En approchant le temps local
 - Erreur "théorique"
 - Erreur d'intégration
 - Conclusion
- 5 Simulations

Définition

Introduite par Cohen & Samodnitsky dans [CS06].

$$Y(t) = \int_{\Omega'} \int_{\mathbb{R}} l(x, t)(\omega') M(d\omega', dx),$$

où :

- $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ est un espace probabilisé qui contient un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst H , noté B_t^H .
- $l(x, t)$ est le temps local de ce mouvement brownien fractionnaire.

Définition

Introduite par Cohen & Samodnitsky dans [CS06].

$$Y(t) = \int_{\Omega'} \int_{\mathbb{R}} l(x, t)(\omega') M(d\omega', dx),$$

où :

- M est une mesure symétrique α -stable de mesure de contrôle $P' \times Leb$ où Leb est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . L'aléa de cette mesure est défini sur un espace probablisé (Ω, \mathcal{F}, P) . Une mesure α -stable est un processus tel que $(M(A_1), \dots, M(A_d))$ est un vecteur aléatoire et si les A_i sont disjoints, les $M(A_i)$ sont indépendants et $M(\cup A_i) = \sum M(A_i)$

Définition

Introduite par Cohen & Samodnitsky dans [CS06].

$$Y(t) = \int_{\Omega'} \int_{\mathbb{R}} l(x, t)(\omega') M(d\omega', dx),$$

où :

- M est une mesure symétrique α -stable de mesure de contrôle $P' \times Leb$ où Leb est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . $\int f dM$ est un processus indexé par f tel que $\int f dM$ a pour fonction caractéristique $\psi(\theta) = \exp(-(\int f dP' \times Leb)^\alpha |\theta|^\alpha)$

Objectif & Outils

On peut représenter ce processus comme la limite d'un schéma discret (cf l'exposé de Clément Dombry).

Problème : Vitesse de convergence vers le processus recherché.

Outil principal : La représentation d'une intégrale par rapport à une mesure stable sous forme de série.

Objectif & Outils

On peut représenter ce processus comme la limite d'un schéma discret (cf l'exposé de Clément Dombry).

Problème : Vitesse de convergence vers le processus recherché.

Outil principal : La représentation d'une intégrale par rapport à une mesure stable sous forme de série.

Overview

- 1 A propos de cette classe de processus
 - Définition
 - Objectif & Outils
- 2 Résultats
 - Représentation sous forme de séries
 - Résultats
- 3 A propos des séries de Shot-Noise
 - A propos du reste
 - Erreur d'approximation
- 4 En approchant le temps local
 - Erreur "théorique"
 - Erreur d'intégration
 - Conclusion
- 5 Simulations

Représentation d'intégrales stables sous forme de séries

Dans le cas qui nous intéresse, nous avons en loi :

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n^{-1/\alpha} G_n e^{2|X_n|/\alpha} I_n(X_n, t), \quad (1)$$

où on a

- $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ les temps d'arrivée d'un processus de Poisson de taux 1 sur $[0, \infty)$,
- $(G_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une distribution normale standard,

Représentation d'intégrales stables sous forme de séries

Dans le cas qui nous intéresse, nous avons en loi :

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n^{-1/\alpha} G_n e^{2|X_n|/\alpha} I_n(X_n, t),$$

où on a

- $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoire i.i.d. suivant une distribution de Laplace de paramètre $(0, 1/2)$ (càd de densité $e^{-|x|/2}$),
- $(I_n)_{n \geq 1}$ des copies indépendantes du temps local d'un mouvement Brownien fractionnaire,

Détails supplémentaires sur cette théorie dans [ST94].

Ce qui sera calculé

$$Z_{P,Q}(t) = \sum_{n=1}^P \Gamma_n^{-1/\alpha} G_n e^{2|X_n|/\alpha} f_{n,Q}(X_n, t), \quad (2)$$

où on a

- $(G_n)_{n \geq 1}$, $(X_n)_{n \geq 1}$, $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ définis comme précédemment.
- $(f_n)_{n \geq 1}$ des approximations du temps local d'un mouvement Brownien fractionnaire.
- L'indice Q dénote la qualité de nos approximations

La définition de la série implique qu'il n'y pas besoin d'autant de rigueur dans l'approximation du temps local pour les derniers termes.

Le théorème final

Théorème

Sous réserve de bonnes hypothèses, on a pour $p > 1$ et pour tout $\eta > 1$:

$$P(\|Y - Z_{P_\varepsilon, Q_\varepsilon}\|_{K,p} > \varepsilon) \leq C\varepsilon^{\alpha(\eta-1)},$$

où $P_\varepsilon \sim C\varepsilon^{-\eta \frac{2\alpha}{2-\alpha}}$ dénote le nombre de termes que l'on doit inclure, et $Q_\varepsilon \sim C\varepsilon^{-\eta/\delta}$ où $\delta < 1/2H - 1/2$.

$\|\cdot\|_{K,p}$ est la norme L^p sur un compact K .

Commentaires

L'erreur vient de deux problèmes différents :

- La troncature, soit le choix de P_ϵ qui sera l'objet de la section suivante.
- La qualité de notre approximation, limitée par la puissance de calcul de la machine, traitée dans la section d'après.

Overview

- 1 A propos de cette classe de processus
 - Définition
 - Objectif & Outils
- 2 Résultats
 - Représentation sous forme de séries
 - Résultats
- 3 A propos des séries de Shot-Noise
 - A propos du reste
 - Erreur d'approximation
- 4 En approchant le temps local
 - Erreur "théorique"
 - Erreur d'intégration
 - Conclusion
- 5 Simulations

Stratégie

Division de notre problème en deux :

$$P(\|Y - Z_{P_\varepsilon, Q_\varepsilon}\|_{K,p} > 2\varepsilon) \leq P(\|Y - Y_{P_\varepsilon}\|_{K,p} > \varepsilon) \\ + P(\|Y_{P_\varepsilon} - Z_{P_\varepsilon, Q_\varepsilon}\|_{K,p} > \varepsilon),$$

où

$$Y_{P_\varepsilon}(t) = \sum_{n=1}^{P_\varepsilon} G_n \Gamma_n^{-1/\alpha} e^{2|X_n|/\alpha} I_n(X_n, t).$$

On va tout d'abord évaluer le reste de la série, puis l'erreur commise dans l'approximation

Évaluer le reste de la série

Proposition

Sous de bonnes hypothèses, on a pour $V_n(t)$ sont i.i.d. dans E_K , si $\mathbb{E}[\|V_n\|_K^q] \leq M_q$ alors :

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{n=P+1}^{\infty} \Gamma_n^{-1/\alpha} V_n(t) \right|^q \right] \leq \frac{CM_q}{Pq(\frac{2-\alpha}{2\alpha})}.$$

Idée de la preuve

Généralisation de la preuve de [Lac04]. Il s'agit de majorer :

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{n=P+1}^L \Gamma_n^{-1/\alpha} V_n(t) \right|^q \right]$$

Par symétrie, on peut appliquer une inégalité de Khintchine puis de Minkowski pour obtenir une majoration de la forme,

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{n=P+1}^L \Gamma_n^{-1/\alpha} V_n(t) \right|^q \right] \leq B_q^q \left(\sum_{n=P+1}^L \mathbb{E} \left[\left| \Gamma_n^{-1/\alpha} V_n(t) \right|^q \right]^{2/q} \right)^{q/2}.$$

Il ne reste plus qu'à évaluer

$$\mathbb{E} \left[\left| \Gamma_n^{-1/\alpha} V_n(t) \right|^q \right].$$

Généralisation et application

Sur un compact, avec une inégalité de Hölder, on a facilement pour $p \geq \alpha$:

$$\mathbb{E} \left[\left\| \left\| \sum_{n=P+1}^{\infty} \Gamma_n^{-1/\alpha} V_n(t) \right\|_{K,p}^q \right\| \right] \leq \frac{CM_q}{P^{q(\frac{2-\alpha}{2\alpha})}},$$

Dans le cas de notre temps local, il suffit de voir

$$\mathbb{E} \left[G_n e^{2q|X_n|/\alpha} \|I_n(X_n, t)\|_K^q \right] \leq M_q.$$

Application

Ceci est vrai car le temps local a son support inclus dans

$$S_n = \left[\inf_{s \leq t} B_s^{H,n}, \sup_{s \leq t} B_s^{H,n} \right], \text{ donc}$$

$$\mathbb{E} \left[e^{2q|X_n|/\alpha} \|I_n(X_n, t)\|_K^q \right] = \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{X_n \in S_n} e^{2q|X_n|/\alpha} \|I_n(X_n, t)\|_K^q \right]$$

L'inégalité de Hölder permet de conclure car $\sup_{s \leq t} B_s^{H,n}$ a une queue gaussienne. L'inégalité de Markov permet ensuite de conclure

$$P(\|Y - Y_{P_\varepsilon}\|_{K,p} > \varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon^q P^q (1/\alpha - 1/2)}. \quad (3)$$

Evaluons l'influence de l'erreur d'approximation

Notons $W_{Q,n}$ le terme réellement simulé. De la même manière que l'on a eu la proposition précédente, on a

Proposition

Si $\mathbb{E} [\|V_n - W_{Q,n}\|_K^q] \leq M_{q,Q} n^{q\beta}$ avec $\beta < 1/\alpha - 1/2$ alors :

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{n=1}^P \Gamma_n^{-1/\alpha} (V_n(t) - W_{Q,n}(t)) \right|^q \right] \leq CM_{q,Q}.$$

Généralisation

Le même type de résultat que précédemment existe aussi sur un compact K

$$\mathbb{E} \left[\left\| \sum_{n=1}^P \Gamma_n^{-1/\alpha} (V_n(t) - W_{Q,n}(t)) \right\|_{K,p}^q \right] \leq CM_{q,Q}.$$

Il nous reste maintenant à voir comment appliquer ce résultat à notre approximation de temps local.

Overview

- 1 A propos de cette classe de processus
 - Définition
 - Objectif & Outils
- 2 Résultats
 - Représentation sous forme de séries
 - Résultats
- 3 A propos des séries de Shot-Noise
 - A propos du reste
 - Erreur d'approximation
- 4 En approchant le temps local
 - Erreur "théorique"
 - Erreur d'intégration
 - Conclusion
- 5 Simulations

Idée d'approximation

Formule de densité d'occupation :

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) l(y, t) dy = \int_0^t f(B_s^H) ds$$

$$l(x, t) = \lim_{Q \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_Q(y - x) l_n(y, t) dy,$$

où $(\varphi_Q)_{Q \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'identité. Deux types d'erreur :

- Remplacer $l(x, t)$ par $\int_{\mathbb{R}} \varphi_Q(y - x) l_n(y, t) dy$.
- Erreur commise en intégrant.

Erreur théorique

On prend $\varphi_1(x) = -|x| + 1$ sur $[-1, 1]$, $\varphi = 0$ ailleurs. On note $\varphi_Q(x) = Q\varphi(Qx)$.

$$\int_0^t \varphi_Q(B_s^{H,n} - x) ds = \int_{\mathbb{R}} \varphi_Q(y - x) I_n(y, t) dy$$

D'après Pitt pour tout $\delta < 1/2H - 1/2$:

$$|I_n(x, t) - I_n(y, t)| < C(\omega) |x - y|^\delta.$$

Donc :

$$\left| I_n(x, t) - \int_0^t \varphi_Q(B_s^{H,n} - x) ds \right| \leq \frac{C(\omega)}{Q^\delta}$$

Erreur d'intégration

On ne calcule pas vraiment $\int_0^t \varphi_Q(B_s^{H,n} - x) ds$, mais

$$\frac{1}{m_{n,Q}} \sum_{i=0}^{[m_{n,Q}t/T]} \varphi_Q(B_{\frac{i*T}{m_{n,Q}}}^{H,n} - x),$$

où $m_{n,Q}$ est le nombre de points utilisés dans la discrétisation de l'intégrale. φ_Q est Q^2 -Lipschitz et le mouvement Brownien fractionnaire est δ' -Hölderien pour $\delta' < H$. On a donc

$$\left| \int_0^t \varphi_Q(B_s^{H,n} - x) ds - \frac{1}{m_{n,Q}} \sum_{i=0}^{[m_{n,Q}t/T]} \varphi_Q(B_{\frac{i*T}{m_{n,Q}}}^{H,n} - x) \right| < \frac{Q^2 C(\omega)}{m_{n,Q}^{\delta'}}.$$

Erreur totale

En combinant les deux types d'erreurs, on a :

$$\left| I_n(x, t) - \frac{1}{m_{n,Q}} \sum_{i=0}^{\lfloor m_{n,Q}t/T \rfloor} \varphi_Q(B_{\frac{i^*T}{m_{n,Q}}}^{H,n} - x) \right| \leq \frac{C(\omega)}{Q^\delta} + \frac{Q^2 C(\omega)}{m_{n,Q}^{\delta'}}.$$

On peut donc fixer le nombre de points de la discrétisation à $m_{n,Q} = \lfloor Q^{\frac{\delta+2}{\delta'}} n^{-\frac{\beta}{\delta'}} \rfloor$. On en déduit donc

$$\mathbb{E} [\|V_n - W_{Q,n}\|_K^q] \leq M_{q,Q} n^{q\beta}$$

où $M_{q,Q} = \frac{C}{Q^{q\delta}}$.

Conclusion

On peut donc appliquer notre proposition et on a pour $p \geq \alpha$:

$$P(\|Y_P - Z_{P,Q}\|_{K,p} > \varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon^q Q^{q\delta}}.$$

En combinant ce résultat avec :

$$P(\|Y - Y_P\|_{K,p} > \varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon^q P^{q(1/\alpha - 1/2)}}$$

Nous donne le théorème final :

Le théorème final

Théorème

Sous réserve de bonnes hypothèses, on a pour $p > 1$ et pour tout $\eta > 1$:

$$P(\|Y - Z_{P_\varepsilon, Q_\varepsilon}\|_{K,p} > \varepsilon) \leq C\varepsilon^{\alpha(\eta-1)},$$

où $P_\varepsilon \sim C\varepsilon^{-\eta\frac{2\alpha}{2-\alpha}}$ dénote le nombre de termes que l'on doit inclure, et $Q_\varepsilon \sim C\varepsilon^{-\eta/\delta}$ où $\delta < 1/2H - 1/2$.

$\|\cdot\|_{K,p}$ est la norme L^p sur un compact K .

Overview

- 1 A propos de cette classe de processus
 - Définition
 - Objectif & Outils
- 2 Résultats
 - Représentation sous forme de séries
 - Résultats
- 3 A propos des séries de Shot-Noise
 - A propos du reste
 - Erreur d'approximation
- 4 En approchant le temps local
 - Erreur "théorique"
 - Erreur d'intégration
 - Conclusion
- 5 Simulations

Domaine de validité

On rappelle que l'on a

- $P_\varepsilon \sim C\varepsilon^{-\eta} 2^{\frac{2\alpha}{\delta}}$
- $Q_\varepsilon \sim C\varepsilon^{-\eta/\delta}$, avec $\delta < 1/2H - 1/2$
- $m_{n,Q} = [Q^{\frac{\delta+2}{\delta'}} n^{-\frac{\beta}{\delta'}}]$ avec $\delta' < 1/H$ et $\beta < 1/\alpha - 1/2$

Concrètement, c'est raisonnable si $H < 0.7$ et $\alpha < 1.2$.

D'après [CS06], l'exposant de Hölder d de notre processus est tel que :

$$d < 1 - H.$$

Quelques trajectoires

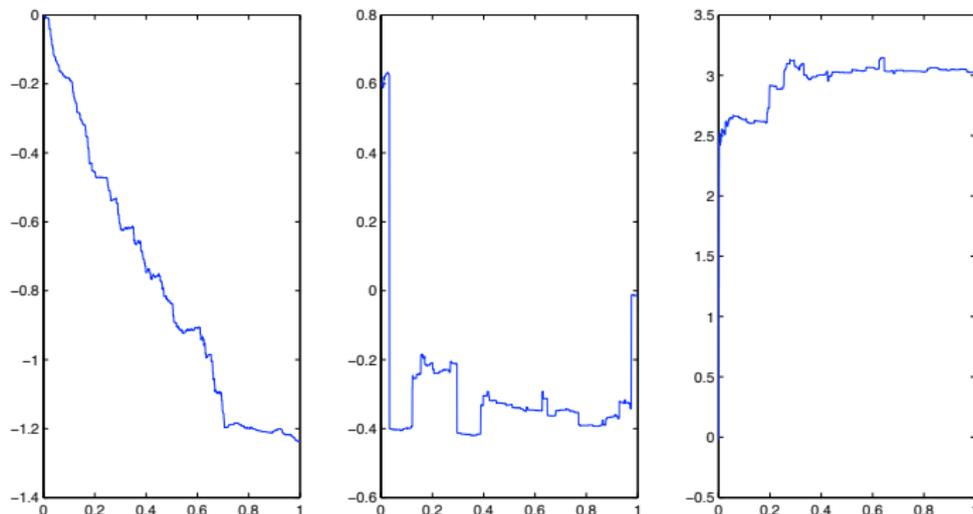


FIG.: $Y(t)$ pour $H = 0.2$, $H = 0.4$ et $H = 0.6$ avec $\alpha = 0.7$

Comparaison des deux méthodes I

On peut voir lorsque $H = 1/2$ et $\alpha = 1$:

$$\mathbb{E} \left[e^{iuY(t)} \right] = \exp (C |u| t).$$

Donc on peut voir si on obtient des droites par du Monte Carlo.

Comparaison des deux méthodes II

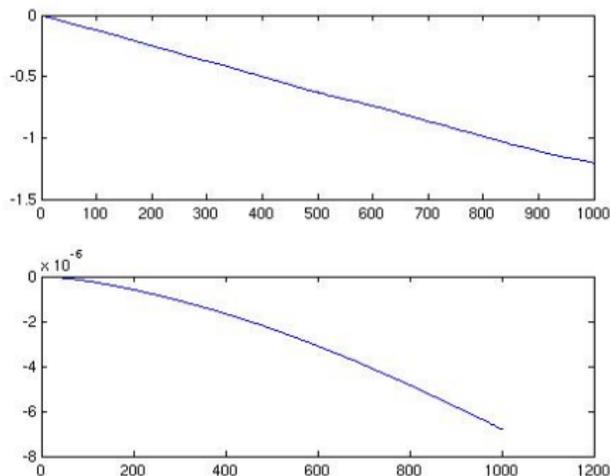


FIG.: $\log(\mathbb{E}[e^{iuY(t)}])$ par rapport à t . Notre méthode en haut ($R^2 = 0.9997$), celle avec des marches aléatoires en bas ($R^2 = 0.9763$).

Références I



S. Cohen and G. Samorodnitsky.

Random rewards, fractional brownian local times and stable self-similar processes.

Ann. Appl. Probab., 16 :1432–1461, 2006.



C. Lacaux.

Series representation and simulation of multifractional Levy motions.

Adv. Appl. Prob., 36(1) :171–197, 2004.



G. Samorodnitsky and M. Taqqu.

Stable Non-Gaussian Random Processes.

Chapman & Hall, 1994.