Convergence des schémas de récompenses aléatoires.

C. Dombry

Laboratoire de Mathématiques et Applications
Université de Poitiers

Journées de Probabilités Lille 2008
1-5 Septembre 2008

Références

- S.Cohen, G.Samorodnitsky.
  Random rewards, fractional Brownian local times and stable self-similar processes.
  Annals of Applied Probability ('06).
- N.Guillotin-Plantard, C.D.
  Discrete approximation of a stable self-similar stationary increments process.
  Bernoulli Journal (to apppear).
- S.Cohen, C.D.
  Convergence of dependent walks in a random scenery to fBm-local time fractional stable motions.
  Preprint HAL-00280818.

Introduction

- Objectif naïf :
  - déterminer les processus stables autosimilaires à accroissements stationnaires,
  - déterminer des schémas discrets pour ces processus (convergence en loi, point de vue microscopique).
- Motivations :
  - propriétés de symétrie fortes (invariance temporelle, aspect fractal)
  - modélisation (Hurst 1951 hydrologie et débit du nil)
  - dépendance forte, longue mémoire

Notion de loi stable

- X suit une loi $S\alpha S(\sigma)$ avec $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma > 0$ si

$$\mathbb{E}(e^{i\theta X}) = \exp(-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha).$$

- propriété de convolution, de changement d'échelle.
  $\alpha = 2$: cas gaussien, queue légère, moments de tous ordres.
  $0 < \alpha < 2$: queue lourde, moments d'ordre $p < \alpha$.
- existence de bassin d'attraction :
  $\alpha = 2$: TCL
  $0 < \alpha < 2$: si Y_i v.a.i.i.d. symétrique à queue lourde
  $(\mathbb{P}(Y > y) \sim Cy^{-\alpha})$,

$$n^{-1/\alpha} \sum_{i=1}^{n} Y_i \Rightarrow S\alpha S(\sigma_C)$$

Processus $S\alpha S$ $H - SSSI$

- Définitions : soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus aléatoire.
  - $(X_t)_{t\geq 0}$ est symétrique stable d'indice α ($S\alpha S$) si : pour tout $t_1, \cdots, t_k \geq 0$ et $\theta_1, \cdots, \theta_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^k \theta_i X_{t_i}$ suit une loi stable d'indice α symétrique.
  - $(X_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements stationnaires (SI) si : pour tout $a \geq 0$

$$(X(t) - X(0))_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X(t+a) - X(a))_{t\geq 0}.$$

  - $(X_t)_{t\geq 0}$ est autosimilaire d'indice H (H-SS) si pour tout $c > 0$

$$(X(ct))_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (c^H X(t))_{t\geq 0}.$$

- Premiers exemples : mouvement Brownien ($\alpha = 2, H = 1/2$), processus de Lévy $S\alpha S$ ($H = 1/\alpha$).
- Restriction sur les indices : $H \leq \max(1, 1/\alpha)$.

Cas gaussien

- Travaux de Kolmogorov ('60), Mandelbrot & Van Ness ('68) : existence et unicité de processus gaussien $H-SSSI$.
  Pour tout $H \in (0,1)$, définition du mouvement Brownien fractionnaire $(B_H(t))_{t\geq 0}$ satisfaisant :

$$
\begin{array}{rcl}
B_H(0) & = & 0 \ \text{p.s.}, \\
\mathbb{E}(B_H(t)) & = & 0, \\
\mathbb{C}\mathrm{ov}(\mathrm{B_H(t_1), B_H(t_2)}) & = & \dfrac{1}{2}\left[|t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}\right] \mathbb{V}\mathrm{ar}(B_H(1))
\end{array}
$$

- propriétés de régularité, de dépendance $\cdots$
- cas $H = 1$ dégénéré : droite de pente aléatoire.

Représentations intégrales du mBf

- Représentation par moyenne mobile du mBf :

$$B_H(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} c_1(H) \int_{\mathbb{R}} \left(((t-x)^+)^{H-1/2} - ((-x)^+)^{H-1/2} \right) M(dx),$$

  avec M bruit blanc gaussien sur $\mathbb{R}$ de mesure de contrôle dx.

- Représentation harmonisable du mBf :

$$B_H(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} c_2(H) \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{e^{ixt}-1}{ix} \right) |x|^{-(H-1/2)} M(dx),$$

  avec M bruit blanc gaussien complexe sur $\mathbb{R}$ de mesure de contrôle dx.

Généralisations au cas stable

- Mouvement stable fractionnaire linéaire (Taqqu Wolpert, Maejima '83)

$$\mathcal{L}_{\alpha,H}(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} c_1(\alpha,H)\int_{\mathbb{R}} \left(((t-x)^+)^{H-1/2} - ((-x)^+)^{H-1/2}\right) M(dx),$$

  avec $0<\alpha<2$ et $H \in]0,1[\setminus\{1/\alpha\}$
  M bruit blanc $S\alpha S$ sur $\mathbb{R}$ de mesure de contrôle dx.
- Mouvement stable fractionnaire harmonisable (Maejima Cambanis '89)

$$\mathcal{H}_{\alpha,H}(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} c_2(\alpha,H)\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{e^{ixt}-1}{ix}\right)|x|^{-(H-1/2)} M(dx),$$

  avec M bruit blanc $S\alpha S$ complexe isotrope de mesure de contrôle dx.
- classe riche (mouvement log-fractionnaire $S\alpha S$, processus Telecom, processus subordonnés $\cdots$)
  revue dans Maejima Kono '91.

Une nouvelle classe de processus $S\beta S$ $\delta - SSSI$

- fBm-local time fractionnal stable motion (Cohen, Samorodnitsky '06)

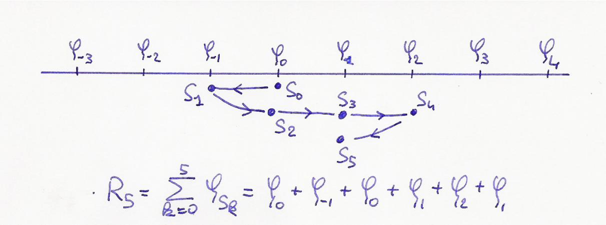
$$\Gamma(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_{\Omega' \times \mathbb{R}} L_t(x)(\omega') M(d\omega' dx).$$

avec $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ un espace probabilisé supportant un mBf d'indice H de temps local $L_t(x)$, M mesure $S\beta S$ stable sur $\Omega' \times \mathbb{R}$ de mesure de contrôle $\mathbb{P}' \times dx$.

- autosimilarité d'indice $\delta = 1 - H + H/\beta$, stationnarité des accroissements.
- régularité Hölder des trajectoires, queue de distribution du maximum, $\cdots$

Modèle de marche aléatoire en scène aléatoire

- On se donne :
  - $(\xi_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ scène aléatoire indexée par $\mathbb{Z}$ à valeurs réelle,
  - $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$,
  - indépendance de la marche et de la scène.



- La marche aléatoire en scène aléatoire $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} \xi_{S_k}.$$

- Historique : Kesten et Spitzer (79), Bolthausen(89), Lewis (93) ...

Théorème de Kesten et Spitzer

- (Kesten Spitzer '79) On suppose :
  - scène centrée i.i.d. dans le domaine d'attraction d'une loi β stable
  - accroissements de la marche centrés i.i.d. et dans le domaine d'attraction d'une loi α- stable, $\alpha \in (1,2]$.
  - indépendance de la marche et de la scène.
  La marche aléatoire en scène aléatoire converge dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$:
  $$\left(\Delta_n(t) = n^{-\delta} Z_{nt}\right)_{t\geq 0} \longrightarrow \left(\Delta_t = \int_{\mathbb{R}} L_t(x) \mathrm{d}Z(x)\right)_{t\geq 0}$$
  avec
  - $\delta = 1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta}$.
  - $(L_t(x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}}$ temps local du Lévy $\alpha -$ *stable* associé à la marche.
  - $(Z(x))_{x\in\mathbb{R}}$ Lévy β-stable associé à la scène.
- Le processus limite Δ est $\delta -$ *SSSI*, non stable.

Sommes indépendantes de copies de Δ

- Soit $\Delta^{(i)}, i \geq 1$ des copies indépendantes de Δ.
- (C.D. N.Guillotin-Planyard) On a la convergence suivante dans $\mathcal{C}$:

$$\left(n^{-\frac{1}{\beta}} \sum_{i=1}^{n} \Delta^{(i)}(t)\right)_{t\geq 0} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}} \left(\tilde{\Gamma}(t)\right)_{t\geq 0},$$

Le processus $\tilde{\Gamma}$ est $S\beta S$, $\delta - SSSI$ admettant la représentation intégrale

$$\tilde{\Gamma}(t) \overset{\mathcal{L}}{=} \sigma \int_{\Omega' \times \mathbb{R}} L_t(x)(\omega') M(d\omega' dx),$$

avec $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ un espace probabilisé supportant un Lévy $S\alpha S$ de temps local $L_t(x)$, M mesure $S\beta S$ stable sur $\Omega' \times \mathbb{R}$ de mesure de contrôle $\mathbb{P}' \times dx$.

Schéma de récompenses aléatoires

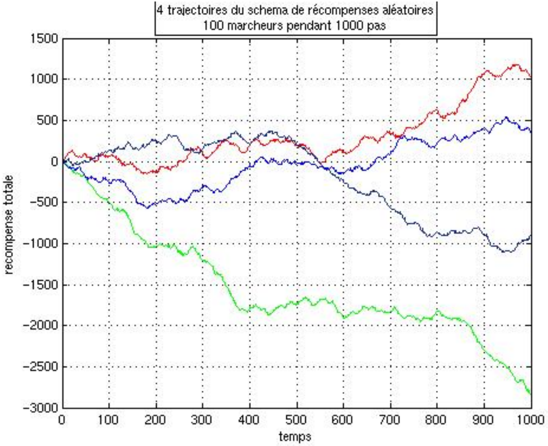
- copies indépendantes de marches aléatoires en scènes aléatoires indexées par $i \geq 1$:
  - $(S_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ la i-ème marche,
  - $(\xi_x^i)_{x\in\mathbb{Z}}$ la i-ème scène,
  - $(Z_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ la i-ème marche aléatoire en scène aléatoire.
- Pour chaque n, on se donne $c_n \in \mathbb{N}^\star$.
- On définit le processus $(\tilde{\Gamma}_n(t))_{t\geq 0}$ par

$$\tilde{\Gamma}_n(t) = c_n^{-\frac{1}{\beta}} n^{-\delta} \sum_{i=1}^{c_n} Z_{nt}^i$$

- (C.D.-N.Guillotin-Plantard) sous les hypothèses de K-S et pour $c_n \to \infty$, Γ_n converge dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ vers $\tilde{\Gamma}$.

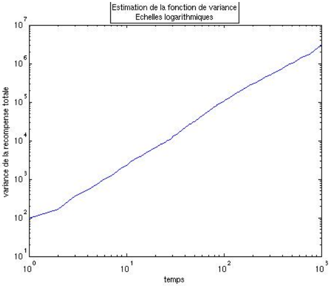
Simulations (1)

- 4 trajectoires pour l'évolution de la récompense totale ($c = 100$ marcheurs, récompense ± 1, temps $n = 1000$)



Simulations (2)

- Estimation empirique de la variance (sur 100 trajectoires) : $Var(Z_n) \approx 99.5n^{1.49}$



- Convergence fonctionnelle

$$\left(c_n^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{4}} Z_{nt}\right)_{t\geq 0} \Rightarrow \left(B_{3/4}(t)\right)_{t\geq O}$$

Propriétés trajectorielles

- régularité :
  Cas $0 < \beta < 1$:
  $$\sup_{0\leq s<t\leq 1/2} \frac{|\tilde{\Gamma}(t)-\tilde{\Gamma}(s)|}{|t-s|^{1-1/\alpha}|\ln(t-s)|^{1/\alpha}} < \infty.$$
  Cas $1 \leq \beta < 2$ et scène symétrique :
  $$\sup_{0\leq s<t\leq 1/2} \frac{|\tilde{\Gamma}(t)-\tilde{\Gamma}(s)|}{|t-s|^{1-1/\alpha}|\ln(t-s)|^{1/\alpha+1/2}} < \infty.$$
- maxima :
  Soit $T > 0$ et $\tilde{\Gamma}^{\star}(T) = \sup\{|\tilde{\Gamma}(t)|; 0 \leq t \leq T\}$.
  $$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{\beta}\mathbb{P}(\tilde{\Gamma}^{\star}(T) > \lambda) = C_{\beta}\mathbb{E}' \int_{\mathbb{R}} L_T(x)^{\beta} dx$$
  avec C_β constante de la loi stable.

Cas des marches fortement corrélés

- marche gaussienne fortement corrélée :
  accroissements $(X_i = S_{i+1} - S_i)_{i \geq 0}$ formant une suite stationnaire gaussienne telle que

  $$\sum_{0 \leq i,j \leq n} \mathbb{E}(X_i X_j) \sim n^{2H}$$

  si bien que

  $$(n^{-H} S_{[nt]})_{t \geq 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_H(t))_{t \geq 0}$$

- analogue du théorème de K-S par Wang pour une scène L^2 :

  $$n^{-\delta} \sum_{k=0}^{[nt]} \xi_{[S_k]} \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \int_{\mathbb{R}} L_t(x) dB(x)$$

  avec L_t temps local d'un mBf d'indice H, B brownien indépendant, $\delta = 1 - H/2$.

Schéma de récompenses aléatoires (2)

- on se donne des copies indépendantes :
  - $(S_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ la i-ème marche gaussienne fortement corrélées,
  - $(\xi_x^i)_{x\in\mathbb{Z}}$ la i-ème scène dans le bassin d'attraction d'une $S\beta S$,
- Soit $c_n \to \infty$.
- (S.Cohen C.D.) on a la convergence

$$\left(\Gamma_n(t) = c_n^{-1/\beta} \sum_{i=1}^{c_n} n^{-\delta} \sum_{k=0}^{[nt]} \xi_{S_k^i}^i \right)_{t\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} (\Gamma)_{t\geq 0}$$

avec $\delta = 1 - H + H/\beta$