Mosaïques de Delaunay-Voronoï Gibbsiennes

David Dereudre,
LAMAV, Valenciennes

Journées de Probabilités
Lille, 3 septembre 2008

1 Introduction

Introduction

- Mosaïques de Delaunay et Voronoï
- Structures géométriques en interaction
- Existence des modèles Gibbsiens : hypothèses sur l'interaction.
- Principe variationnel
- Propriétés des modèles : moments, transition de phase, percolation
- Estimation paramétrique par Pseudo-likelihood : consistence, normalité

2 Définitions - Notations

Notations

-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ denote l'ensemble des bornées de $\mathbb{R}^2$.

Notations

-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ denote l'ensemble des bornées de $\mathbb{R}^2$.
-$\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des mesures ponctuelles γ de $\mathbb{R}^2$.

$$\gamma = \sum_{i \in \mathcal{I}} \delta_{x_i}, \qquad (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}^*}.$$

Notations

-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ denote l'ensemble des bornées de $\mathbb{R}^2$.
-$\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des mesures ponctuelles γ de $\mathbb{R}^2$.

$$\gamma = \sum_{i \in \mathcal{I}} \delta_{x_i}, \qquad (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}^*}.$$

- Soit Λ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, γ_Λ est la projection de γ sur Λ : $\gamma_\Lambda = \sum_{x \in \gamma \cap \Lambda} \delta_x$.

Notations

-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ denote l'ensemble des bornées de $\mathbb{R}^2$.
-$\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des mesures ponctuelles γ de $\mathbb{R}^2$.

$$\gamma = \sum_{i \in \mathcal{I}} \delta_{x_i}, \qquad (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}^*}.$$

- Soit Λ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, γ_Λ est la projection de γ sur Λ : $\gamma_\Lambda = \sum_{x \in \gamma \cap \Lambda} \delta_x$.
- Vor(γ) : cellules de la mosaïque de Voronoï s'appuyant sur γ
- Del(γ) : triangles de la mosaïque de Delaunay s'appuyant sur γ

Notations

-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ denote l'ensemble des bornées de $\mathbb{R}^2$.
-$\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des mesures ponctuelles γ de $\mathbb{R}^2$.

$$\gamma = \sum_{i \in \mathcal{I}} \delta_{x_i}, \qquad (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}^*}.$$

- Soit Λ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, γ_Λ est la projection de γ sur Λ : $\gamma_\Lambda = \sum_{x \in \gamma \cap \Lambda} \delta_x$.
- Vor(γ) : cellules de la mosaïque de Voronoï s'appuyant sur γ
- Del(γ) : triangles de la mosaïque de Delaunay s'appuyant sur γ

-λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. π est le processus de Poisson sur $\mathbb{R}^2$. π_Λ est le processus de Poisson sur Λ.

Mesures de Gibbs

Soit $(H_\Lambda)_{\Lambda\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)}$ une famille d'energies

$$H_\Lambda : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\Lambda)\times\mathcal{M}(\Lambda^c) & \longrightarrow & \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \\ (\gamma_\Lambda,\gamma_{\Lambda^c}) & \longmapsto & H_\Lambda(\gamma_\Lambda|\gamma_{\Lambda^c}) \end{array}$$

On la suppose compatible. On note $H_\Lambda(\gamma) = H_\Lambda(\gamma_\Lambda|\gamma_{\Lambda^c})$.

Mesures de Gibbs

Soit $(H_\Lambda)_{\Lambda\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)}$ une famille d'energies

$$\begin{array}{rccc} H_\Lambda : & \mathcal{M}(\Lambda)\times\mathcal{M}(\Lambda^c) & \longrightarrow & \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \\ & (\gamma_\Lambda,\gamma_{\Lambda^c}) & \longmapsto & H_\Lambda(\gamma_\Lambda|\gamma_{\Lambda^c}) \end{array}$$

On la suppose compatible. On note $H_\Lambda(\gamma)=H_\Lambda(\gamma_\Lambda|\gamma_{\Lambda^c})$.

Definition

Une probabilité μ sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ est une mesure de Gibbs si pour tout $\Lambda\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et μ presque tout γ

$$\mu(.|\gamma_{\Lambda^c})=\frac{1}{Z_\Lambda(\gamma_{\Lambda^c})}e^{-H_\Lambda(.|\gamma_{\Lambda^c})}\pi_\Lambda,$$

où $Z_\Lambda(\gamma_{\Lambda^c})=\int e^{-H_\Lambda(\gamma'_\Lambda|\gamma_{\Lambda^c})}\pi_\Lambda(d\gamma'_\Lambda)$.

Exemples d'énergie

Interaction sur la mosaïque de Delaunay

$$H_\Lambda(\gamma) = \sum_{\substack{T \in \mathrm{Del}(\gamma) \\ T \cap \Lambda \neq \emptyset}} V(T),$$

Exemples d'énergie

Interaction sur la mosaïque de Delaunay

$$H_\Lambda(\gamma) = \sum_{\substack{T \in \mathrm{Del}(\gamma) \\ T \cap \Lambda \neq \emptyset}} V(T),$$

avec pour tout triangle T

$$V(T) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \mathrm{diam}(T) \geq \alpha \\ F(per(T), vol(T)) & \text{sinon} \end{cases}$$

ou

$$V(T) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \mathrm{angle}(T) \leq \alpha \\ F(per(T), vol(T)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemples d'énergie

Interaction sur la mosaïque de Voronoï

$$H_\Lambda(\gamma) = \sum_{\substack{C \in \text{ Vor}(\gamma) \\ C \cap \Lambda \neq \emptyset}} V(C),$$

Exemples d'énergie

Interaction sur la mosaïque de Voronoï

$$H_\Lambda(\gamma) = \sum_{\substack{C \in \text{ Vor}(\gamma) \\ C \cap \Lambda \neq \emptyset}} V(C),$$

Interaction entre les cellules voisines

$$H_\Lambda(\gamma) = \sum_{\substack{C, C' \in \text{ Vor}(\gamma) \\ C \text{ et } C' \text{ voisines} \\ (C \cup C') \cap \Lambda \neq \emptyset}} \beta \max\left(\frac{V(C)}{V(C')}, \frac{V(C')}{V(C)}\right),$$

3 Résultats d'éxistence

Stable : $\exists A > 0$

$$E_\Lambda(\gamma_\Lambda) \geq -A\mathrm{Card}(\gamma_\Lambda).$$

Superstable : $\exists A > 0, \exists B > 0$

$$E_\Lambda(\gamma_\Lambda) \geq -A\mathrm{Card}(\gamma_\Lambda) + B\mathrm{Card}(\gamma_\Lambda)^2.$$

Localement stable : $\exists A > 0$

$$E_\Lambda(\gamma + \delta_x) - E_\Lambda(\gamma) \geq -A.$$

Resultats d'existence :

1) Bertin, Billiot, Drouilhet (1999) : localement stable, bornée et à portée finie.

2) Dereudre (2007) : localement stable, à portée infinie et pouvant contenir une partie hardcore.

3) Dereudre, Drouilhet, Georgii (2008) : stable et non bornée.

Theoreme

Il existe une mesure de Gibbs si

$$H_\Lambda(\gamma) = \sum_{\substack{T \in \, Del(\gamma) \\ T \cap \Lambda \neq \emptyset}} V(T),$$

tel que

i) $\exists A > 0, \qquad V(T) \geq -A.$

ii) $\exists \alpha < \frac{\pi}{3}, \qquad V(T) = \begin{cases} +\infty & si \ angle(T) \leq \alpha \\ F(T) & sinon \end{cases}$

iii) $\exists B > 0, \exists C > 0, \exists \beta > 0 \qquad F(T) \leq B + C\, Vol^\beta(T).$

iv) $C \leq \frac{1}{2\beta}\left(\frac{4\pi}{75\sqrt{3}}\right)^\beta e^{-2\beta B - 1}.$

4 Estimation Pseudo-likelihood

Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
- $\theta \in \Theta$: paramètre "smooth" de l'energie.
- α in $\mathbb{R}^+$: paramètre hardcore de l'energie.
- $(H_\Lambda^{\alpha,\theta})_{\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)}$: famille d'energies paramétriques.

Objectif : estimer θ and α

Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
- $\theta \in \Theta$: paramètre "smooth" de l'energie.
- α in $\mathbb{R}^+$: paramètre hardcore de l'energie.
- $(H_\Lambda^{\alpha,\theta})_{\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)}$: famille d'energies paramétriques.

Objectif : estimer θ and α

Besag (1975), Jensen and Moller (1991), Jensen and Kunsch (1994), Mase (1995), Billiot, Coeurjolly and Drouilhet (2008)

Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
- $\theta \in \Theta$: paramètre "smooth" de l'energie.
- α in $\mathbb{R}^+$: paramètre hardcore de l'energie.
- $(H_\Lambda^{\alpha,\theta})_{\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)}$: famille d'energies paramétriques.

Objectif : estimer θ and α

Besag (1975), Jensen and Moller (1991), Jensen and Kunsch (1994), Mase (1995), Billiot, Coeurjolly and Drouilhet (2008)

Exemple

$$H_\Lambda^{\alpha,\theta}(\gamma) = \sum_{\substack{T \in \ Del(\gamma) \\ T \cap \Lambda \neq \emptyset}} V^{\alpha,\theta}(T),$$

avec

$$V^{\alpha,\theta}(T) = \begin{cases} +\infty & diam(T) > \alpha \\ \theta per(T) & sinon \end{cases}$$

Fonction de contraste pseudo Likelihood

Soit $\Lambda_n = [-n, n]^2$ la fenêtre d'observation. On définit la fonction de contraste

$$PLL_{\Lambda_n}(\gamma, \alpha, \theta) = \frac{1}{|\Lambda_n|}\left[\int_{\Lambda_n} exp\left(-h^{\alpha,\theta}(x,\gamma)\right) dx + \sum_{\substack{x\in\gamma\cap\Lambda_n \\ H^{\alpha,\theta}_{\Lambda_n}(\gamma-\delta_x)<\infty}} h^{\alpha,\theta}(x, \gamma-\delta_x)\right],$$

avec

$$h^{\alpha,\theta}(x,\gamma) = H^{\alpha,\theta}_{\Lambda_n}(\gamma+\delta_x) - H^{\alpha,\theta}_{\Lambda_n}(\gamma).$$

Estimation quand α est connu

Soit μ une mesure de Gibbs stationnaire pour les paramètres α^*, θ^*. On suppose α^* connu. θ^* doit être estimé.

Estimation quand α est connu

Soit μ une mesure de Gibbs stationnaire pour les paramètres α^*, θ^*. On suppose α^* connu. θ^* doit être estimé.

Definition

On définit pour μ presque tout γ

$$\hat{\theta}_n(\gamma) = argmin_{\theta \in \Theta} PLL_{\Lambda_n}(\gamma, \alpha^*, \theta).$$

Estimation quand α est connu

Soit μ une mesure de Gibbs stationnaire pour les paramètres α^*, θ^*. On suppose α^* connu. θ^* doit être estimé.

Definition

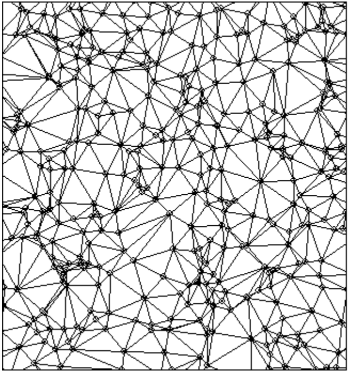
On définit pour μ presque tout γ

$$\hat{\theta}_n(\gamma) = argmin_{\theta \in \Theta} PLL_{\Lambda_n}(\gamma, \alpha^*, \theta).$$

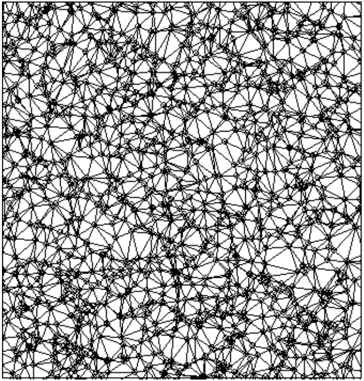
Theoreme (Dereudre-Lavancier (2007))

Pour μ presque tout γ

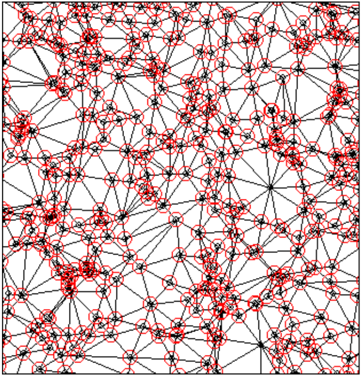
$$\lim_{n \to \infty} \hat{\theta}_n(\gamma) = \theta^*$$



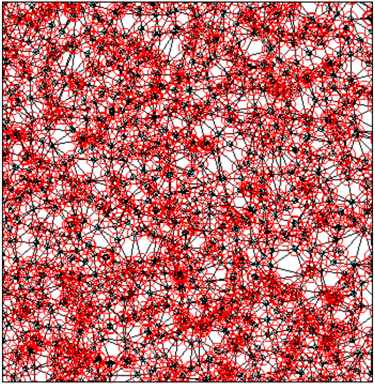
$\theta = 5, \alpha = 1$



$\theta = -5, \alpha = 1$



$\theta = 5, \alpha = 1$
$\hat{\theta} = 4.3$



$\theta = -5, \alpha = 1$
$\hat{\theta} = -5.4$

Estimation quand α est inconnu

Soit μ une mesure de Gibbs stationnaire pour les paramètres α^*, θ^*. On suppose α^* inconnu. α^* et θ^* doivent être estimés.

Estimation quand α est inconnu

Soit μ une mesure de Gibbs stationnaire pour les paramètres α^*, θ^*. On suppose α^* inconnu. α^* et θ^* doivent être estimés.

Definition

On définit pour μ presque tout γ

$$\hat{\alpha}_n(\gamma) = \inf \left\{ \alpha > 0,\ H^{\alpha,\theta}_{\Lambda_n}(\gamma) < \infty \right\}.$$

$$\hat{\theta}_n(\gamma) = argmin_{\theta \in \Theta} PLL_{\Lambda_n}(\gamma, \hat{\alpha}_n(\gamma), \theta).$$

Estimation quand α est inconnu

Soit μ une mesure de Gibbs stationnaire pour les paramètres α^*, θ^*. On suppose α^* inconnu. α^* et θ^* doivent être estimés.

Definition

On définit pour μ presque tout γ

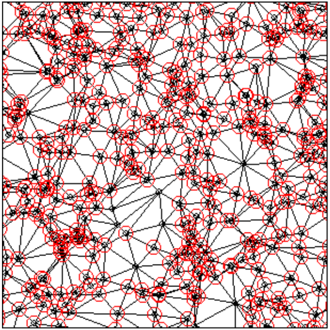
$$\hat{\alpha}_n(\gamma) = \inf \left\{ \alpha > 0,\ H^{\alpha,\theta}_{\Lambda_n}(\gamma) < \infty \right\}.$$

$$\hat{\theta}_n(\gamma) = argmin_{\theta \in \Theta} PLL_{\Lambda_n}(\gamma, \hat{\alpha}_n(\gamma), \theta).$$

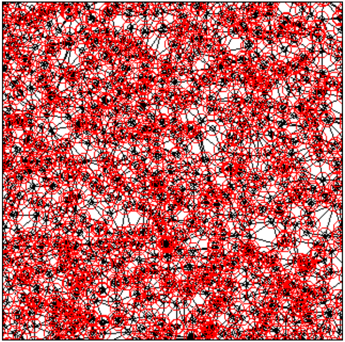
Theoreme (Dereudre-Lavancier (2007))

Pour μ presque tout γ

$$\lim_{n \to \infty} \left((\hat{\alpha}_n(\gamma), \hat{\theta}_n(\gamma) \right) = (\alpha^*, \theta^*)$$



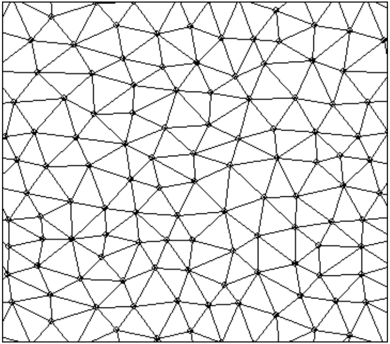
$\alpha = 1, \theta = 5$
$\hat{\alpha} = 0.94,\ \hat{\theta} = 4.3$

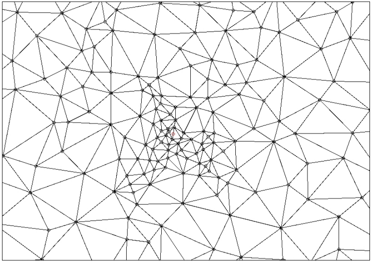


$\alpha = 1, \theta = -5$
$\hat{\alpha} = 0.57,\ \hat{\theta} = -5.3$

- E. Bertin, J.M. Billiot, R. Drouilhet, (1999)*Existence of nearest-neighbours spatial Gibbs models* , Adv. Appl. Prob. (SGSA) 31, 895-909.
- J. Besag , (1975). *Statistical analysis of non-lattice data*, The statistician, 24 192-236.
- J.-M. Billiot, , J.-F. Coeurjolly, and R. Drouilhet, (2008) *Maximum pseudolikelihood estimator for exponential family models of marked Gibbs point processes*, Electronic Journal of Statistics.
- D. Dereudre , (2007) *Gibbs Delaunay tessellations with geometric hardcore conditions*, to appear in J.S.P.
- D. Dereudre, R. Drouilhet and H.-O. Georgii, (2008) Gibbs Delaunay Tessellations, En cours d'écriture.
- D. Dereudre , F. Lavancier, (2007) *Pseudo-likelihood estimation for non-hereditary Gibbs point processes*, preprint.
- J.L. Jensen and H.R. Künsch, (1994) *On asymptotic normality of pseudo likelihood estimates for pairwise interaction process*, Ann. Inst. Statist. Math., Vol. 46, 3 :487-7486.
- J.L. Jensen and J. Moller (1991) *Pseudolikelihood for exponential family models of spatial point processes*, Ann. Appl. Probab. 1, 445-461.
- S. Mase (1995) *Consistency of maximum pseudo-likelihood estimator of continuous state space Gibbsian process* Ann. Appl. Probab. 5, 603-612.

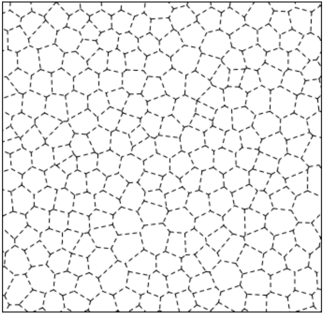
Mosaïques de Delaunay grands angles

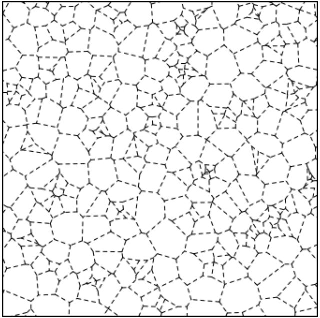




Mosaïques de Delaunay avec accumulation

Mosaïques de Voronoï avec "attraction" des cellules

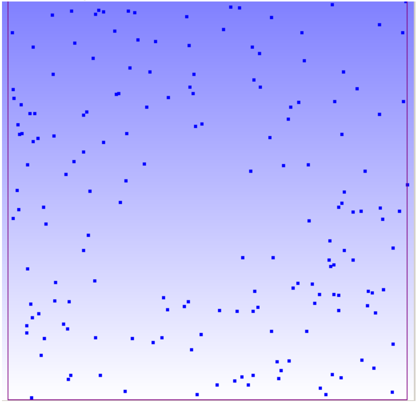




Mosaïques de Voronoï avec "répulsion" des cellules

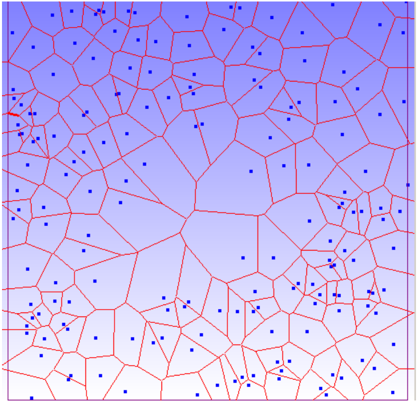
Intro

On considère un nuage de points localement fini dans $\mathbb{R}^2$



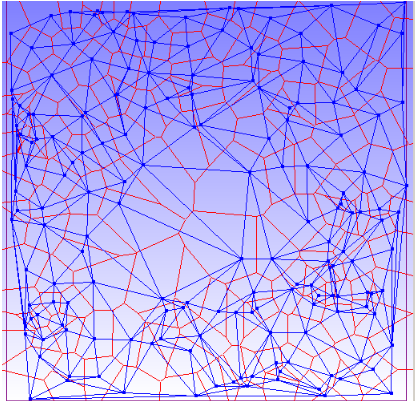
Intro

On considère un nuage de points localement fini dans $\mathbb{R}^2$



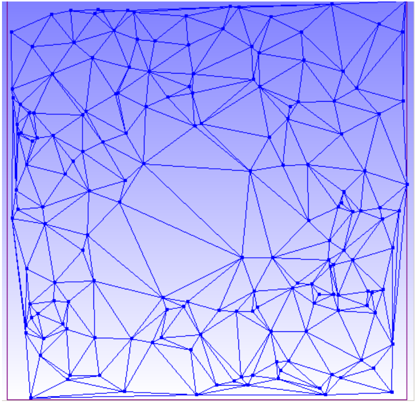
Intro

On considère un nuage de points localement fini dans $\mathbb{R}^2$



Intro

On considère un nuage de points localement fini dans $\mathbb{R}^2$



Intro