Master 1 MAS & CHPS – Probabilités, Modèles et Applications
Responsable : Adrien Hardy, email : `adrien.hardy@univ-lille.fr`

Feuille d'exercices 8
Chaines de Markov

Exercice 4 (Classes communicantes et réccurence). Donner les classes communicantes de la chaine de Markov associée à la matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

après avoir dessiné le graphe associé.

Exercice 5 (Recurrence de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$). On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, de matrice de transition $P_{xy} = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{|x-y|=1}$.

(a) Montrer que cette chaine de Markov est irréductible.

(b) Calculer $(P^n)_{00}$ pour tout $n \geq 1$.

(c) A l'aide de la formule de Stirling[?], montrer que cette chaine de Markov est récurrente.

(d) Que pensez-vous du cas de la marche aléatoire simple non-symétrique, définie par $X_0 := 0$ et $X_{n+1} = X_n + \varepsilon_n$ où $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{N}$ est une suite de variables i.i.d. telle que $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = p$ où $p \in]0, 1[$ et $p \neq 1/2$?

Exercice 6 (Loi des excursions). Soit (X_n) une chaine de Markov. On fixe $x \in E$ que l'on suppose récurrent et on considère pour tout $k \geq 1$ le temps d'arrêt $\tau_x^{(k)}$ introduit à l'Exercice 1, à savoir le k-ième temps de retour en $x \in E$. On s'intéresse à la loi des excursions successives $(E_0, E_1, \ldots)$ où

$$E_k := (X_{\tau_x^{(k)}}, X_{\tau_x^{(k)}+1}, \ldots, X_{\tau_x^{(k+1)}}).$$

(a) Décrivez l'ensemble $\mathscr{E}$ où les variables E_k prennent leurs valeurs.

(b) Si $X_0 := x$ p.s, montrer que la suite $(E_0, E_1, \ldots)$ est i.i.d.

[?] Formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n$ quand $n \to \infty$.

Exercice 7 (Recurrence et invariance). Pour $x \in E$ fixé, on considère la mesure $\pi^{(x)}$ sur E définie par

$$\pi_y^{(x)} := \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=0}^{\tau_x - 1} \mathbf{1}_{X_n = y} \right], \qquad y \in E.$$

(a) Montrer que $\pi^{(x)}(E) < \infty \Leftrightarrow x$ est récurrent positif.

(b) Montrer que $P\pi^{(x)} = \pi^{(x)} \Leftrightarrow x$ est récurrent.