Master 1 MAS & CHPS – Probabilités, Modèles et Applications
Responsable : Adrien Hardy, email : `adrien.hardy@univ-lille.fr`

Feuille d'exercices 7
Chaines de Markov

Exercice 1. Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus aléatoire sur un espace d'états E discret et $x \in E$. On suppose que $X_0 = x$ p.s. Si on définit par récurrence

$$\tau_x^{(0)} := 0, \qquad \tau_x^{(k+1)} := \inf\{n > \tau_x^{(k)} : \; X_n = x\},$$

que représente $\tau_x^{(k)}$? Montrer que $\tau_x^{(k)}$ est un temps d'arrêt pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (Suites récurrentes avec innovation). Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d à valeurs dans $(\tilde{E}, \tilde{\mathscr{T}})$ de loi ν. On considère le processus aléatoire $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$X_{n+1} = F(X_n, \varepsilon_n)$$

pour une fonction $F : E \times \tilde{E} \to E$ mesurable, et dont la loi μ de X_0 est spécifiée, avec X_0 indépendant de la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Montrer que la marche aléatoire simple (sur $\mathbb{Z}$) est un exemple de tels processus.

(b) Montrer que X est une chaine de Markov homogène et donner sa matrice de transition.

(c) On considère une file d'attente avec 0 clients au temps $n = 0$ et on suppose que, à chaque instant $n \geq 1$, un client est retiré de la file d'attente et q_n nouveaux clients se rajoutent, où $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables i.i.d de loi $\nu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$. Montrer que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du nombre de clients à l'instant n est un processus de Markov dont on donnera la matrice transition.

SOLUTION : on a $X_{n+1} = F(X_n, q_n)$ où $F(x, q) := (x-1)_+ + q$ est bien mesurable. On a ensuite, si $x \geq 1$,

$$P_{xy} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = y - 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = y \end{cases}$$

et si $x = 0$,

$$P_{xy} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = y \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = y + 1 \end{cases}$$

Exercice 3 (On-Off). On considère le système dynamique $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\{0,1\}$ de loi initiale $\mu = (\mu_0, \mu_1)$ et de matrice transition

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

(a) Quelles conditions doivent satisfaire a, b, c, d ?

(b) Calculer la loi de X_n puis la valeur de $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$ en fonction de a et b.

SOLUTION : On a $a, b \in [0,1]$ et $c = 1-a$ et $d = 1-b$. On calcule que P a deux valeurs propres 1 et $a-b$ puis

$$P = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix} S^{-1} \qquad S = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1-a & -1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \frac{1}{a-b-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ a-1 & b \end{bmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = 0) &= (P^n \mu)_0 \\ &= \left(\frac{1}{a-b-1} \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1-a & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (a-b)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ a-1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{bmatrix} \right)_0 \\ &= \frac{1}{1-a+b} \Big(b + (a-b)^n ((1-a)\mu_0 + b\mu_1) \Big) \end{aligned}$$

et $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$. Si $a, b \notin \{0,1\}$ alors $|a-b| < 1$ et $(a-b)^n \to 0$ d'où

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{b}{1-a+b} \qquad \text{et donc } \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1-a}{1-a+b}.$$

Dans tous les autres cas, la dynamique est triviale : il y a un état piège dont on ne s'échappe pas.