Master 1 MAS & CHPS – Probabilités, Modèles et Applications
Responsable : Adrien Hardy, email : `adrien.hardy@univ-lille.fr`

Feuille d'exercices 6
Espérance conditionnelle

Exercice 1. (Conditionnement par rapport à une somme i.i.d). Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables i.i.d de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Calculer

$$\mathbb{E}[X_1 | X_1 + \cdots + X_n].$$

Que pensez-vous du cas général où $X_1, \dots, X_n$ sont seulement supposées i.i.d L^1 ?

Exercice 2 (Données censurées). Supposons que X suit une loi de Poisson[♠] de paramètre λ et posons $Y = \min(X, N)$ où $N > 0$ est fixé. Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 3 (Linéarité en la seconde variable). Si X, Y, Z sont des variables réelles L^1, pensez-vous que $\mathbb{E}[X|Y + Z] = \mathbb{E}[X|Y] + \mathbb{E}[X|Z]$?

Exercice 4 (Vecteurs gaussiens). Si ${}^t(Y, X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien $\mathcal{N}(m, \Sigma)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, montrer qu'il existe ${}^t(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\mathbb{E}[Y | X_1, \dots, X_n] = \beta_0 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j X_j.$$

Exercice 5 (Variance conditionnelle). Si $X \in L^2$, on définit sa variance conditionnelle par rapport à une variable Y par

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X|Y] := \mathbb{E}[X^2|Y] - \mathbb{E}[X|Y]^2.$$

(a) Montrer que $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X|Y] \geq 0$ p.s.

(b) Montrer que $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X|Y] = 0$ p.s. si et seulement si X est $\sigma(Y)$-mesurable.

(c) Montrer la formule "de la variance totale",

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \mathbb{E}\,\mathbb{V}\mathrm{ar}[X|Y] + \mathbb{V}\mathrm{ar}\,\mathbb{E}[X|Y]$$

puis interpréter géométriquement cette formule dans l'espace L^2.

(d) Si $Y = f(X) + \varepsilon$ avec f une fonction mesurable et ε une variable aléatoire L^1 indépendante de X, calculer $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y|X]$. Même question si $Y = f(X)\,\varepsilon$.

[♠] Rappelons que, si le temps entre deux évènements aléatoires indépendants (par exemple, "une ampoule s'éteint") suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors le nombre d'évènements arrivés pendant un laps de temps t suit une loi de Poisson de paramètre λt.