Master 1 MAS & CHPS – Probabilités, Modèles et Applications
Responsable : Adrien Hardy, email : `adrien.hardy@univ-lille.fr`

Feuille d'exercices 5
Bases de Probabilités

Exercice 13 (Borel-Cantelli, le retour).

(a) Soit une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de $\mathscr{F}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k^c).$$

(b) En déduire que *si on a la condition d'indépendance suivante* :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) = \prod_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k^c),$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1.$$

(c) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$ et $\alpha \geq 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} X_i \geq \alpha \log n \text{ pour une infinité de } n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 2/\theta \\ 1 & \text{si } \alpha \leq 2/\theta \end{cases}.$$

(d) Soit X_n une suite de variables indépendantes où X_n est une variable de Bernoulli de paramètre $1/n$. Montrer que $X_n \to 0$ en probabilité mais pas presque sûrement. Donner une sous-suite $(X_{\varphi(n)})$ qui converge p.s. vers zéro.

Exercice 14. (Lemme de Scheffé). Soit X_n une suite de variables à valeurs dans $(E, \mathscr{T})$ de densité f_n par rapport à une mesure de référence ν sur E. On suppose que $f_n \to f$ ν-p.p et que f est une densité, c'est-à-dire que $\int f \,\mathrm{d}\nu = 1$ et $f \geq 0$.

(a) Montrer que $\int |f_n - f| \,\mathrm{d}\nu \to 0$ quand $n \to \infty$.

(b) En déduire que $X_n \to X$ en loi, où X est une variable de loi $f\mathrm{d}\nu$, et qu'on a même la convergence uniforme :

$$\sup_{A\in\mathscr{T}} |\mathbb{P}(X_n \in A) - \mathbb{P}(X \in A)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(c) Montrer que, si E est discret, alors $X_n \to X$ en loi si et seulement si,

$$\forall e \in E, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = e) = \mathbb{P}(X = e).$$

(d) Montrer que, si X_n suit une loi de Student[1] de paramètre n, alors X_n convergence en loi vers une variable $\mathcal{N}(0,1)$ quand $n \to \infty$.

Exercice 15 (Convolution). Montrer que si X et Y à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ sont indépendantes de densité respectives f et g par rapport à Lebesgue, alors $X+Y$ a une densité par rapport à Lebesgue donnée par le produit de convolution de f et g,

$$f * g(x) := \int f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

Exercice 16 (Entropie relative). Soit μ et ν deux mesures de probabilité sur $(E, \mathscr{T})$. L'entropie relative, ou divergence de Kullback-Leibler, de μ par rapport à ν est définie de la façon suivante :

$$H(\mu|\nu) := \begin{cases} \int \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} \log \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} \,\mathrm{d}\nu & \text{si } \mu \text{ est absolument continue par rapport à } \nu, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si X et Y sont des variables aléatoires de lois μ et ν, on écrira aussi $H(X|Y)$.

(a) Montrer qu'il existe une variable aléatoire $Z \geq 0$ telle que $\mathbb{E}[Z] = 1$ et

$$H(\mu|\nu) = \mathbb{E}[Z \log Z],$$

et en déduire que $H(\mu|\nu) \geq 0$.

(b) En admettant qu'on a égalité dans l'inégalité de Jensen $\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$ si et seulement si, $\varphi(x) = Ax + B$ ou X est une constante p.s, montrer que $H(\mu|\nu) = 0$ si et seulement si $\mu = \nu$.

(c) Si X et Y ont respectivement pour densité f et g par rapport à une mesure de référence η, exprimer $H(X|Y)$ en terme de f et g.

(d) Si $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$ sont des gausiennes réelles, calculer $H(X_1|X_2)$.

[1] Student de paramètre n veut dire de loi à densité $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}(1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.