Master 1 MAS & CHPS – Probabilités, Modèles et Applications
Responsable : Adrien Hardy, email : `adrien.hardy@univ-lille.fr`

Feuille d'exercices 4
Bases de Probabilités

Exercice 10. A l'aide de R, simuler et représenter graphiquement 100 réalisations indépendantes d'un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^2$ de loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ où :

(a) $\Sigma = I_2$

(b) $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

On donnera dans chaque cas la densité par rapport à Lebesgue si elle existe.

Exercice 11. Soit (X_n) et (Y_n) deux suites de variables aléatoires et X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans le même espace métrique (E, d). Montrer que :

(a) $X_n \to X$ p.s. et $Y_n \to Y$ p.s. implique que $X_n + Y_n \to X + Y$ p.s.

(b) $X_n \to X$ en probabilité et $Y_n \to Y$ en probabilité implique que $X_n + Y_n \to X + Y$ en probabilité.

(c) $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to Y$ en loi n'implique *pas* que $X_n + Y_n \to X + Y$ en loi.

Exercice 12. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire à valeurs dans le même espace métrique (E, d). Montrer que si pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(d(X_n, X) > \varepsilon) < \infty$$

alors $X_n \to X$ p.s.