Master 1 MAS & CHPS – Probabilités, Modèles et Applications
Responsable : Adrien Hardy, email : adrien.hardy@univ-lille.fr

Feuille d'exercices 3
Bases de Probabilités

Exercice 1. Montrer que si $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 0$ alors X est constante p.s.

Exercice 2. Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$ une variable de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, définie par $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = p$. Quel est sa loi μ_X ? Montrer qu'elle a une densité par rapport à $\mu = \delta_0 + \delta_1$. Généraliser au cas d'une variable aléatoire quelconque à valeurs dans un espace discret.

Exercice 3. Montrer que si $X \sim \mathcal{E}(\theta)$ alors pour tout $s, t > 0$,

$$\mathbb{P}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t).$$

Exercice 4. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et Z définie par $\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(Z = 1) = 1/2$ qu'on suppose indépendante de X. On considère la variable $Y := ZX$.

(a) Montrer que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(b) Calculer $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

(c) Est-ce que le vecteur aléatoire ${}^{\mathbf{t}}(X,Y)$ est un vecteur Gaussien ?

Exercice 5. Calculer la fonction caractéristique $\varphi(t) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}]$ de $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Aide : On pourra montrer que $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$.

Exercice 6. On admet[1] que la fonction caractéristique d'un loi Gamma $\Gamma(k,\theta)$ est

$$\varphi(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - \mathrm{i}t}\right)^k.$$

(a) Montrer que

$$X \sim \Gamma(k,\theta), \quad Y \sim \Gamma(\ell,\theta), \quad X, Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad X + Y \sim \Gamma(k + \ell, \theta).$$

(b) Soit $X_1, \dots, X_d$ des variables i.i.d $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer la densité de la variable X_1^2 puis montrer que $X_1^2 + \cdots + X_d^2 \sim \Gamma(d/2, 1/2)$.

[1] Mais cela peut être prouvé avec la même idée que celle de l'exercice 5.

Exercice 7. On suppose que X est une variable aléatoire réelle.

(a) Montrer que
$$\lim_{R\to\infty} \mathbb{P}(|X| > R) = 0.$$

(b) Si on suppose de plus que $X \in L^p$, montrer que
$$\mathbb{P}(|X| > R) \leq \frac{\mathbb{E}|X|^p}{R^p},$$
et que si il existe $\alpha > 0$ tel que $C := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\alpha|X|}] < \infty$, alors
$$\mathbb{P}(|X| > R) \leq \frac{C}{\mathrm{e}^{\alpha R}}.$$
Discuter cette dernière condition pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $X \sim \mathcal{E}(\theta)$.

(c) Que pensez vous de la décroissante de $\mathbb{P}(|X| > R)$ quand $R \to \infty$ pour une variable X de Cauchy, c'est-à-dire de densité
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$
par rapport à Lebesgue ?

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que
$$\mathbb{E}|X| = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X| > t)\,\mathrm{d}t.$$
Aide : On pourra utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.

Plus généralement, montrer que si $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est croissante et dérivable p.p alors
$$\mathbb{E}\Big[\varphi(|X|)\Big] = \int_0^\infty \varphi'(t)\,\mathbb{P}(|X| > t)\,\mathrm{d}t + \varphi(0)$$
et donner des formules explicites pour $\varphi(x) = x^p$ et $\varphi(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$.

Exercice 9. Soit $X_1, \ldots, X_d$ des variables i.i.d $\mathcal{N}(0,1)$.

(a) Donner la densité du vecteur aléatoire $X = {}^{\mathbf{t}}(X_1, \ldots, X_d)$ par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$.

(b) Si $\mu \in \mathbb{R}^d$ et $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$, donner la densité du vecteur aléatoire $AX + \mu$.

(c) Que peut-on dire si A n'est pas inversible ?