M2 ISN – Chaînes de Markov et modélisation
Responsable : Adrien Hardy, email : `adrien.hardy@univ-lille.fr`

TP1

Ce TP est à réaliser avec Python, idéalement en version 3 et sur un Ipython notebook.

Exercice 1 (Etude et simulation d'une chaîne de Markov). On considère la matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Est-ce que P admet une mesure de probabilité invariante π ? Justifier.
2. Si la loi de X_0 est $\mu = (1, 0, 0)$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la chaîne de Markov associée de transition P, programmer un script qui renvoie la loi de X_n et en dessiner un graphique quand n varie. En déduire une approximation de la mesure invariante.
3. Calculer numériquement la mesure invariante comme solution d'un système d'équations linéaires.
4. Programmer un script qui renvoie un graphique de la trajectoire $(X_n)_{n=0}^N$ de longueur N de la chaîne partant d'une loi initiale μ donnée.
5. Montrer que P satisfait la condition de Doeblin et en déduire la vitesse de convergence vers la mesure d'équilibre.

Exercice 2 (PageRank). Etant donné une collection de pages web C, l'algorithme PageRank de Google attribue à chaque page $x \in C$ un classement donné par (une approximation de) la valeur π_x de la probabilité invariante π de la chaîne de Markov suivante. En partant d'une page x quelconque, la nouvelle page y est choisie par :

- on tire une variable B de Bernoulli de paramètre $0 < s < 1$,

(surf) si $B = 1$, on choisit une nouvelle page y vers laquelle x pointe, uniformément.

(teleport) si $B = 0$, on choisit une nouvelle page $y \in C$, uniformément.

1. Soit G la matrice d'adjacence du graphe de C, définie par $G_{xy} = 1$ si la page x pointe vers la page y et $G_{xy} = 0$ sinon. Exprimer la matrice de transition P de la chaine de Markov décrite ci-dessus en termes de G, s, et $|C|$.
2. Ecrire un script qui renvoie une approximation de π quand on lui donne en entrée une matrice d'adjacence G, le paramètre s, une mesure initiale μ et une condition pour arrêter l'algorithme (par exemple quand $\|\mu P^{n+1} - \mu P^n\|_{\ell^1} \leq \varepsilon$).
3. Tester l'exemple où $G_{xy} = 0$ sauf quand (x, y) vaut

   $(1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (3,4), (4,4), (4,5), (5,7), (6,6), (6,7), (7,4), (7,6), (7,7).$