Workshop Arithmetic of Curves and Covers

GTEM

Lille, France, November 21-23 2007

Sylvain Brochard (Versailles)

Champs algébriques et foncteur de Picard

Le foncteur de Picard d'un schéma, qui classifie les fibrés en droites sur celui-ci, a fait l'objet d'une étude approfondie dans les années soixante. La décennie suivante a vu naître avec les travaux de Giraud puis Deligne, Mumford, et enfin Artin la notion de *champ algébrique*, qui généralise celle de schéma. Se pose alors la question suivante : le foncteur de Picard d'un champ algébrique se comporte-t-il de la même manière que celui d'un schéma ? Nous expliquerons comment l'étude des déformations de faisceaux inversibles permet d'aboutir, sous des hypothèses raisonnables, à la représentabilité du foncteur de Picard par un espace algébrique. Nous essaierons de voir à travers quelques exemples comment l'ajout d'une certaine « structure champêtre » à un schéma modifie son foncteur de Picard.

Anna Cadoret (Bordeaux)

On uniform boundedness for twisted p-torsion on Abelian varieties (joint work with Akio Tamagawa)

Let $k/\mathbb{Q}$ be a finitely generated extension and $A \to k$ an abelian variety over k. Given a character $\chi : \Gamma_k \to \mathbb{Z}_p^\times$, define the *twisted p-torsion* associated with χ to be the Γ_k-module :

$$A[p^\infty](\chi) := \{T \in A[p^\infty] \mid {}^\sigma T = \chi(\sigma)T,\ \sigma \in \Gamma_k\},$$

where $A[p^\infty]$ denotes the p-torsion of $A(\overline{k})$. For instance, when χ is the trivial character, $A[p^\infty](\chi)$ is the p-torsion of $A(k)$. Say that $\chi : \Gamma_k \to \mathbb{Z}_p^\times$ is *non-Tate over k* if it does not appear as a subrepresentation of the p-adic representation associated with an abelian variety over k and that $\chi : \Gamma_k \to \mathbb{Z}_p^\times$ is *universally non-Tate over k* if $\chi|_{\Gamma_{k'}} : \Gamma_{k'} \to \mathbb{Z}_p^\times$ is non-Tate over k' for any finite extension k'/k. This holds, for instance, if χ is the trivial or the cyclotomic character. In that case, $A[p^\infty](\chi)$ is always finite. Our main result is about the uniform boundedness of $A[p^\infty](\chi)$ when A varies in family.

Theorem 1. *Let $S \to k$ be a smooth, geometrically connected curve and $A \to S$ an abelian scheme over S. Assume that $\chi : \Gamma_k \to \mathbb{Z}_p^\times$ is universally non-Tate over k. Then there exists an integer $N := N(A, k, \chi)$ such that for any $s \in S(k)$*

$$p^N A_s[p^\infty](\chi) = \{0\}.$$

Theorem 1 is a consequence of the following result for the p-torsion of abelian variety over function fields of curves.

Theorem 2. *Let K be the function field of a smooth, geometrically connected curve over an algebraically closed field of characteristic 0 and $A \to K$ an abelian variety over K. Assume that A contains no non-trivial isotrivial subvariety. Then for all $g \geq 0$ there exists an integer $N := N(g, A, p) \geq 0$ such that $p^N A[p^\infty](K') = \{0\}$ for all finite extension K'/K with K' of genus $\leq g$.*

Our original motivation for theorem 1 was Fried's 1-dimensional modular tower conjecture. After discussing briefly the proofs of theorem 2 and theorem 1, I will explain how theorem 1 yields Fried's 1-dimensional modular tower conjecture.

Bruno Deschamps (Le Mans)

Le groupe des unités d'un anneau de séries entières dans le cas fini

La question générale de décrire le groupe G des unités de l'anneau $A[[T]]$ quand A est un anneau commutatif et unitaire est naturelle. Dans cet exposé je m'attacherai au cas où A est fini, G devenant alors un groupe profini. Je montrerai que l'on peut décomposer G en une somme directe d'une partie prolibre et d'une partie de torsion, partie que l'on peut, sous une certaine condition assez faible, très bien décrire : c'est une puissance du nilradical de A.

Hidekazu Furusho (Nagoya)

Pentagon and hexagon equations of GT

My talk is on the defining equations of the Grothendieck-Teichmuller group, GT, introduced by Drinfel'd. I will explain that his pentagon equation implies his two hexagon equations.

Jean Gillibert(Bordeaux/Manchester)

Structures logarithmiques et modules galoisiens

Soit X un log schéma fin et saturé, et soit G un schéma en groupes commutatif fini et plat sur le schéma sous-jacent à X. Si l'on peut considérer que les G-torseurs pour la topologie fppf sont des objets non ramifiés par nature, au contraire les G-torseurs pour la topologie log plate nous permettent d'envisager de la ramification modérée. Ainsi les log structures fournissent une approche cohomologique de la notion d'action modérée. Ceci nous permet d'améliorer nos constructions d'invariants de classes pour les variétés abéliennes semi-stables.

Jung-Kyu Canci (Lille)

The Arithmetic of Dynamical Systems and Moduli Spaces

We will present some aspects of the arithmetic of dynamical systems. In particular, some results concerning periodic and preperiodic points of rational maps. Furthermore, we will describe the construction of some moduli spaces of rational maps and we will give some new results concerning quadratic rational maps.

Sylvain Maugeais (Le Mans)

Courbes équivariantes et torseurs

Soit S un schéma réduit, $C \to S$ une courbe propre et lisse, $D \subset C$ un diviseur de Cartier relatif et $\pi : U \to C \setminus D$ un torseur sous un groupe fini résoluble G. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que π se prolonge en un revêtement (ramifié) de courbes propres et lisses. Les méthodes utilisées généralisent des résultats de Harbater et Katz-Gabber au cas des courbes relatives.

Hiroaki Nakamura (Okayama)

Braid configuration spaces and Mordell covers

In my talk, I will discuss a special family of elliptic curves of Mordell type whose parameter space is taken from a special locus in a braid configuration space. We then deduce a formula that describes a behavior of the Grothendieck-Teichmueller parameter on the absolute Galois group of $\mathbb{Q}$ in terms of special values of the Anderson-Ihara adelic beta function. This is a joint work with Hiroshi Tsunogai and Seidai Yasuda.

Dajano Tossici (Roma)

Extension of $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-torsors over a d.v.r. of unequal characteristic

Let R be a d.v.r. of unequal characteristic which contains a primitive $(p^2)^{th}$-root of unity. We will give an explicit classification (i.e. we give the equations) of the finite and flat R-group schemes of order p^2 which are isomorphic to $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ on the generic fiber . This classification will be useful to study the effective models of $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-actions. More precisely, let $X = Spec(A)$ be an affine flat R scheme with integral fibers and such that A is a factorial algebra. And let $Y_K \to X_K$ a $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-torsor. Let suppose that Y, the normal closure of X in Y_K, has integral special fiber. We will attach to any such cover a degeneration data, which is an element of $\mathbb{N}^4$. This data determines the effective model (as introduced by Romagny) of the action of $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ on Y. In particular we will give a numerical criterion to see if Y is a torsor under some finite and flat group schemes of order p^2. We will give an example where Y has not a structure of G-torsor, for any G. An example of this type was given by Saidi and Romagny in characteristic p.

On the other hand we will show that, if X is a flat R-scheme with normal and connected generic fiber X_K and with special integral fiber X_k, then any G_K-torsor, with G_K a commutative group-scheme over K, can be extended (up to extend R) to a G-torsor over X, for some finite and flat group scheme G. We stress the fact that this extension is not unique. Moreover it can happen that any such extension is not normal. This is the case when the normalization of X in Y_K has no structure of G-torsor, for any G.