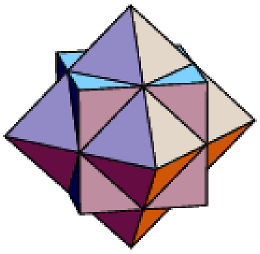
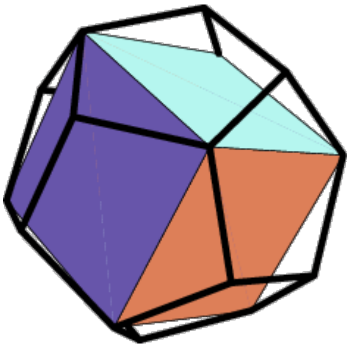
Géométrie 1

Exercice 3.1. Dans la figure suivante



déterminer si les sommets de l'octaèdre et du cube appartiennent à une même sphère

Exercice 3.2. Dans le dodécaèdre suivante



montrer que le polyèdre inscrit est un cube.

Exercice 3.3. On dit que sous-groupe discret Γ d'un groupe topologique G est *sans torsion* si $\gamma^k = e_G$ avec $\gamma \in \Gamma$ implique $\gamma = e_G$.

Soit $\mathbb{E}^n$ l'espace euclidien de dimension n et $\mathrm{Iso}(\mathbb{E}^n) \approx O(n) \ltimes T$ le groupe des isometries de $\mathbb{E}^n$. (On indiqué par T le sous-groupe de G formé par les translations de $\mathbb{E}^n$ et par $O(n)$ le groupe des automorphismes orthogonales de $\mathbb{E}^n$).

Rappelons qu'on a un homomorphisme $r\colon \mathrm{Iso}(\mathbb{E}^n) \to O(n)$ qui associe à $L \in \mathrm{Iso}(\mathbb{E}^n)$, défini par $Lv = Av + b$ ($A \in O(n)$, $b \in \mathbb{E}^n$), la partie rotationnelle $r(L) = A$.

Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Iso}(\mathbb{E}^n)$

(1) Montrer que $\Gamma \cap T$ un sous-groupe distingué sans torsion de Γ et que $\Gamma/\Gamma \cap T$ est isomorphe à $r(\Gamma)$.
(2) Montrer que Γ agit proprement sur $\mathbb{E}^n$ si et seulement si Γ est discret.
(3) Montrer que si Γ agit librement sur $\mathbb{E}^n$ alors Γ est discret et sans torsion. Montrer que si Γ est discret et sans torsion alors Γ agit librement sur $\mathbb{E}^n$.
(4) Conclure que si i Γ est discret et sans torsion alors $\mathbb{E}^n/\Gamma$ est une variété différentiable.