Topologie 1

Exercice 1.1. Montrer qu'un espace topologique X est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$ est un sous-ensemble fermé de $X \times X$. (L'espace $X \times X$ est muni de la topologie produit).

Exercice 1.2. On considère la relation suivante sur $\mathbb{R}$:

$$x \mathscr{R} y \iff \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = 2^n y.$$

(1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

(2) Montrer que tout point de l'intervalle $[2^n, 2^{n+1}[$ est équivalent à un unique point de l'intervalle $[1,2[$.

(3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique y appartenant à l'ensemble

$$Y =]-2,-1] \cup \{0\} \cup [1,2[$$

tel que $x\mathscr{R}y$. Conclure que on peut identifier l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathscr{R}$ à Y.

(4) On munit l'ensemble Y de la topologie quotient, après identification de $\mathbb{R}/\mathscr{R}$ à Y. Montrer que $0 \in Y$ possède un seul voisinage, à savoir Y. En déduire que tout $z \in Y$ est adhérent à 0 dans cette topologie sur Y.

(5) La projection canonique $p : \mathbb{R} \to Y$ est elle ouverte ?

(6) Tracer le graphe de la relation $\mathscr{R}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ce graphe est il fermé ?

Exercice 1.3. On regarde $\mathbb{Z}$ comme un sous-groupe discret du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$. On munit le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de la topologie quotient.

(1) Rappeler pourquoi $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est séparé.

(2) Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact.

(3) Soit $X = \{z\imath\mathbb{C} \in \mathbb{R}^2 \mid |z| = 1\}$ muni de la topologie induite par $\mathbb{C}$. Soit $f : \mathbb{R} \to X$ l'application $f(t) = \exp(2\pi i t)$. Montrer que l'application f passe au quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(4) Soit $\tilde{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to X$ l'application obtenue par passage au quotient de l'application f. Montrer que $\tilde{f}$ est continue et injective.

(5) Conclure que $\tilde{f}$ est un homéomorphisme.

(6) Montrer que $\tilde{f}$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 1.4. Soit G un groupe muni d'une topologie.

(1) Montrer que les applications $(g,h) \in G^2 \mapsto gh \in G$ et $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ sont continues si et seulement si l'application $(g,h) \in G^2 \mapsto gh^{-1} \in G$ est continue.

(2) Soit e_G l'élément neutre de G. Montrer que G est séparé si et seulement si le singleton $\{e_G\}$ est fermé. (Indication : Exercice 1.1).

Exercice 1.5. Soit G n groupe topologique. MOntrer que pour tout voisinage V de l'élément neutre e_G, il existe un voisinage W de e_G satisfaisant que $W^{-1} = W$ et $W \subset V$.

Exercice 1.6. On note $\mathrm{M}(m,\mathbb{F})$ l'espace vectoriel des matrices $m\times m$ à coefficient dans le corps $\mathbb{F}$ et $\mathrm{GL}(m,\mathbb{F})$ le *groupe linéaire sur* $\mathbb{F}$, c'est à dire les groupe formé par les éléments inversibles de $\mathrm{M}(m,\mathbb{F})$. L'espace $\mathrm{M}(m,\mathbb{F})$ est muni de la topologie induite par une norme. L'adjointe A^* d'une matrice $A\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ est définie par $A^*=\overline{({}^tA)}$.

(1) Montrer que $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ est un ouvert de $M(n,\mathbb{C})$ et un groupe topologique. De même $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ est un ouvert de $M(n,\mathbb{R})$ et un groupe topologique.

(2) Vérifier que $A\mapsto \mathrm{trace}(AA^*)$ est une norme sur $\mathrm{M}(m,\mathbb{C})$. Montrer que le groupes suivantes sont des sous-groupes compacts et connexes par arcs de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$: le *groupe unitaire*

$$\mathrm{U}(m)=\{A\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})\mid A^*A=I\}$$

et le*groupe spécial unitaire*

$$\mathrm{SU}(m)=\{A\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})\mid A^*A=I,\det A=1\}.$$

Montrer que le groupes suivantes sont des sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$: le *groupe orthogonal*

$$\mathrm{O}(m)=\{A\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})\mid {}^tAA=I\}$$

et le *groupe spécial orthogonal*

$$\mathrm{SO}(m)=\{A\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})\mid {}^tAA=I,\det A=1\}.$$

Montrer que $\mathrm{SO}(m)$ est connexe par arcs et que $\mathrm{O}(m)$ possède deux composantes connexes par arcs.